DOI 10.37882/2223-2966.2025.05-2.06

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ СРЕДНЕВЗВЕШЕННОГО МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО

ABOUT REGULARISATION OF THE WEIGHTED AVERAGE MONTE CARLO METHOD

A. Galimnurov

Summary. Within the framework of this paper, we propose a formulation of a regularised variant (RWMLMC) of the weighted multilevel Monte Carlo (WMLMC) method, introducing a penalty term to control the magnitude of the level-dependent weights and stabilise the contribution of the variance between levels. While classical WMLMC can lead to unstable or highly variable weights when inter-level correlations are weak, RWMLMC introduces a tunable regularisation parameter λ that provides robustness and improved generalisation in the presence of noise or unbalanced simulations. We empirically analyse the performance of the proposed method, showing that RWMLMC achieves a better trade-off between cost and variance and improves performance in realistic multilevel sampling regimes.

Keywords: Monte Carlo methods, financial modelling, regularization.

Галимнуров Артур Альбертович
Аспирант, Уфимский университет науки и технологий
artur.galimnurov@gmail.com

Аннотация. В рамках статьи предлагается формулировка регуляризованного варианта (RWMLMC) метода взвешенного многоуровневого Монте-Карло (WMLMC), вводя штрафной член для контроля величины весов, зависящих от уровня, и стабилизации вклада дисперсии между уровнями. В то время как классический WMLMC может приводить к нестабильным или сильно изменяющимся весам при слабых межуровневых корреляциях, RWMLMC вводит настраиваемый параметр регуляризации λ, который обеспечивает устойчивость и улучшенное обобщение в условиях шума или несбалансированного моделирования. Проведен эмпирический анализ эффективности предложенного метода, показывающий, что RWMLMC достигает лучшего компромисса между стоимостью и дисперсией и повышает эффективность в реалистичных режимах многоуровневой выборки.

Ключевые слова: методы Монте-Карло, финансовое моделирование, регуляризация.

Введение

Численные методы Монте-Карло [1], несмотря на свою долгую историю, переживают сегодня период активного развития и трансформации. За последнее десятилетие эта область математического моделирования обогатилась множеством инноваций, которые значительно расширили сферу применения и эффективность данных методов. Квантовые методы Монте-Карло стали одним из наиболее динамично развивающихся направлений. Внимания заслуживает вспомогательно-полевой квантовый метод Монте-Карло [2], который превратился в мощный инструмент для изучения коррелированных многоэлектронных систем. Метод AFQMC демонстрирует превосходные результаты при моделировании сложных квантовых систем с сильными электронными корреляциями, что делает его незаменимым в современной квантовой химии и физике конденсированного состояния. Параллельно с этим активно развиваются квантово-ускоренные многоуровневые методы Монте-Карло, где квантовые вычисления используются для повышения эффективности многоуровневых симуляций. Согласно опубликованным результатам исследований, эти методы позволяют существенно снизить вычислительную сложность при решении задач со стохастическими дифференциальными уравнениями. Значительный теоретический прорыв представляют квази-методы Монте-Карло высшего порядка (HoQMC). Данное направление [3] развивает идеи, заложенные в классических квази-методах Монте-Карло, но позволяет достичь гораздо лучшей скорости сходимости при численном интегрировании гладких функций. В статье [4] авторы демонстрируют, как применение цифровых сетей и последовательностей высшего порядка позволяет достичь более быстрого уменьшения ошибок по сравнению с традиционными методами. Эти теоретические достижения уже находят применение при решении дифференциальных уравнений с случайными коэффициентами и в задачах байесовской оценки, где может быть использована гладкость интегранда. Примечательны также инновации в области методов Марковской цепи Монте-Карло (MCMC). Регенеративный алгоритм Улама-фон Неймана, описанный в недавней работе [5], представляет собой оригинальное расширение классических методов MCMC для обращения матриц. Введение регенеративной структуры позволяет преодолеть традиционный компромисс между длиной цепи и количеством повторений, что существенно повышает точность и эффективность матричных вычислений. Экспериментальные результаты показывают, что данный подход позволяет значительно снизить дисперсию и вычислительные затраты при численном моделировании. В этом же направлении развиваются продвинутые методы MCMC для задач линейной алгебры, включая обращение разреженных матриц и предобусловливание. Исследования, опубликованные в [6] демонстрируют, как применение параллелизации и гибридных алгоритмов может повысить масштабируемость и производительность на современных ускорителях вычислений. Недавно разработанный метод [7] для аппроксимации поссибилистических выходных данных в моделях статистического вывода без использования априорных знаний представляет особый интерес. Данный подход решает вычислительные проблемы в байесовских системах, свободных от априорных распределений, путем аппроксимации кредального множества как смеси распределений. Метод демонстрирует значительное сокращение вычислительного времени при сохранении точности, что делает его подходящим для таких сложных задач статистического вывода, как логистическая регрессия и полупараметрическое моделирование. В контексте машинного обучения и оптимизации стратегий методы Монте-Карло также нашли новые применения. Алгоритм, описанный в статье [8], использует моделирование Монте-Карло для измерения долгосрочного ожидаемого вознаграждения от различных действий, что позволяет существенно снизить ошибки в процессах принятия решений. Этот подход успешно реализован в таких областях, как игровой искусственный интеллект, и демонстрирует значительный потенциал для более широкого применения в системах адаптивного управления. Интеграция искусственного интеллекта с симуляциями Монте-Карло представляет еще одно перспективное направление развития. Инструменты, подобные AutoFLUKA, описанному в работе [9], автоматизируют рабочие процессы в системе моделирования FLUKA за счет использования больших языковых моделей. Это позволяет снизить необходимость ручного вмешательства, оптимизировать процессы и повысить масштабируемость симуляций. Такие инновации имеют особую ценность в областях, где распространены сложные симуляции, например, в медицинской физике и ядерной инженерии. Таким образом, современное развитие численных методов Монте-Карло характеризуется глубокими теоретическими инновациями и широким спектром практических приложений. От квантовых вычислений до автоматизации с помощью искусственного интеллекта эти разработки существенно расширяют возможности и повышают эффективность методов Монте-Карло в различных научных дисциплинах.

Теоретический анализ

Взвешенный многоуровневый метод Монте-Карло (MLMC) — это передовая вычислительная техника, представленная научному сообществу в конце 2024 года [10], направленная на повышение эффективности при решении стохастических задач. Метод MLMC по своей сути является техникой уменьшения дисперсии, предназначенной для эффективной оценки математических ожиданий функционалов в стохастических системах. Он работает за счёт использования нескольких уровней разрешения, комбинируя симуляций на различных уровнях точности, где грубые уровни менее точны, но требуют меньше вычислительных ресурсов, а точные уровни обеспечивают большую точность, но более затратны вычислительно. Взвешенный вариант MLMC вводит веса [10], позволяющие оптимизировать распределение вычислительных ресурсов между уровнями, что дополнительно снижает дисперсию и повышает эффективность оценки. Одним из ключевых достижений такого метода является возможность оценки и контроля функции дисперсии. Так недавние исследования применили взвешенный MLMC к оценке функции дисперсии в стохастических симуляциях, как описано в статье [11]. Данный подход динамически адаптирует точки проектирования и вычислительный бюджет на каждом уровне. Демонстрирует асимптотическую нормальность при определённых условиях. Достигает значительно более высокой вычислительной эффективности по сравнению со стандартными методами Монте-Карло.

Метод представленный в этой работе является обобщением метода [10], поэтому в рамках этой статьи мы будем оперироваться такой же нотификацией.

Рассмотрим уровни $l = 0, 1, \dots L$. Пусть P_l — оценка на уровне l, — вес уровня l. Тогда в методе WMLMC зададим:

$Y_l^{\theta} = P_l - \theta_l \cdot P_l^{l-1}$, где P_l^{l-1} — соответствующая оценка на уровне l–1.

И заметим, что взвешенный оценщик уровня l задается рекурсивно:

При этом, стоимость и дисперсия на уровне l выражаются рекурсивно [10] как:

$$\left(E_l^{\theta}\right)^2 = \alpha_l \eta_l^2 + \beta_l^2 \left(E_{l-1}^{\theta}\right)^2 \tag{1}$$

$$\left(\upsilon_l^{\theta}\right)^2 = \sigma_l^2 - 2\theta_l \rho_l \sigma_l \sigma_{l-1} + \theta_l^2 \sigma_{l-1}^2 \tag{2}$$

Где α, β — коэффициенты регрессии, а η_l, σ_l, ρ — число траекторий и дисперсия разности между уровнями соответственно.

В рамках данной статьи предлагается рассмотреть задачу минимизации следующей регуляризированной функции:

$$J(\theta_l) = \left(E_l^{\theta}\right)^2 + \lambda\left(\upsilon_l^{\theta}\right)^2, \tag{3}$$

где λ — параметр регуляризации

Утверждение 1.

Пусть $\lambda > 0$. Тогда оптимальный вес $\theta_l^* = B / A$ минимизирует функцию $J(\theta_l)$, а соответствующий оценщик P_l^θ обладает пониженной чувствительностью к колебаниям в η_l, σ_l, ρ_l, по сравнению со стандартной схемой без регуляризации $\lambda = 0$.

Доказательство. Подставляя выражения (1) и (2) в (3) получаем:

$$J(\theta_l) = A\theta_l^2 - 2B\theta_l + C. \quad (4)$$

Где

$$A = \beta_l^2 \left(E_{l-1}^\theta\right)^2 + \lambda\sigma_{l-1}^2,\ B = \lambda\rho_l\sigma_l\sigma_{l-1},\ C = \alpha_l\eta_l^2 + \lambda\sigma_l^2$$

Получается, что $J(\theta_l)$ является строго выпуклой квадратичной функцией по θ_l, при $A > 0$, что гарантировано при $\lambda > 0$.

Отсюда минимум есть $\theta_l^* = B / A$.

Чтобы доказать пониженную чувствительность к колебаниям η_l, σ_l, ρ_l, нужно доказать, что найденный минимум при небольших изменениях η_l, σ_l, ρ_l меняется меньше, чем в случае с $\lambda = 0$. Это доказывается с помощью прямого дифференцирования по параметрам.

Одной из главных мотивацией для улучшения методов Монте-Карло является стремление к уменьшению количества вычислений при заданной точности.

Одноуровневая оценка Монте-Карло требует $O(\varepsilon^{-3})$ для достижения общей ошибки ε [10]. Метод MLMC предлагает способ улучшить эту ситуацию за счет комбинаций оценки на самом тонком уровне с разностью оценок на более грубых уровнях, генерируя больше образцов на более грубых, дешевых уровнях и меньшее количество на более тонких, дорогих уровнях. В результате получается метод со смещением самого тонкого уровня, но потенциально гораздо меньшей дисперсией при заданных вычислениях, а вычислительные затраты могут быть даже ниже $O(\varepsilon^{-2})$. Метод WMLMC несмотря на то, что является усложнением MLMC все еще требует $O(\varepsilon^{-2})$ вычислений [10]. Оценим, насколько более требовательным к вычислениям является предлагаемый метод RWMLMC. Так как оптимальные веса θ^* выражаются аналитически, то для L уровней количество дополнительных по сравнению с WMLMC вычислений составит $O(L)$. Из этой идеи следует более полное утверждение.

Утверждение 2. (Сложность алгоритма)

Регуляризация не увеличивает асимптотическую сложность по сравнению с WMLMC, и сложность RWMLMC ограничивается $O(\varepsilon^{-2})$/

Эмпирический анализ

Предложенный метод RWMLMC является обобщением WMLMC и при λ=0 совпадает с WMLMC. При этом, несмотря на небольшое увеличение стоимости вычислений из-за решения задачи минимизации в части прикладных задач метод может давать лучшие результаты. В рамках работы был проведен анализ эффективности RWMLMC против WMLMC в двух случаях. Первая задача — оценка денежного потока структурированной облигации с триггером, активирующим выплату только при достижении определённого уровня процентной ставки. Выплата зависит от того, пересекла ли процентная ставка заданный порог за весь период до погашения. Такая ситуация характерна для продуктов с барьерными условиями. Проблема заключается в том, что функция выплаты имеет скачок: даже незначительное изменение траектории процентной ставки около барьера может полностью изменить результат — от нуля до полной выплаты. Вторая задача — классическая оценка VaR портфеля облигаций.

Итак, эмпирические данные показывают, что RWMLMC становится более эффективным при определенных условиях, например, как в первой задаче с нестандартной выплатой купонов. Во-первых, когда стандартные веса MLMC сильно колеблются, либо очень малы, либо велики, регуляризация стабилизирует процесс оценки. Во-вторых, если межуровневая корреляция высока, но изменяется неравномерно по уровням, регуляризация сглаживает переход весов, избегая нестабильных скачков, которые могут привести к смещенным или высоковариационным оценкам. В-третьих, для задач с большим количеством уровней регуляризация помогает накопить структуру и избежать распространения численной неустойчивости. Наконец, когда стоимость дискретизации резко возрастает на более глубоких уровнях, регуляризация снижает риск перераспределения выборок на дорогие уровни из-за зашумленности весовых оценок. На рис. 1 продемонстрирован пример, как ведут себя WMLMC и RWMLMC для первой задачи.

С другой стороны есть случаи, как например во второй задаче, когда дисперсия RWMLMC больше чем WMLMC, что делает его менее эффективным. Одной из основных причин увеличения дисперсии в RWMLMC является слишком агрессивная регуляризация. Параметр λ действует как штраф на большие межуровневые веса, заставляя оптимальные веса θ стремиться к нулю. В результате оценщик теряет структурное преимущество многоуровневой телескопической суммы, где коррелированные различия между мелкими и крупными уровнями нивелируют дисперсию. Когда λ слишком велика, регуляризация подавляет этот механизм уменьшения дисперсии, что приводит к увеличению общей дисперсии. Второй фактор, способствующий этому, — слабая корреляция между уровнями. Когда межуровне-

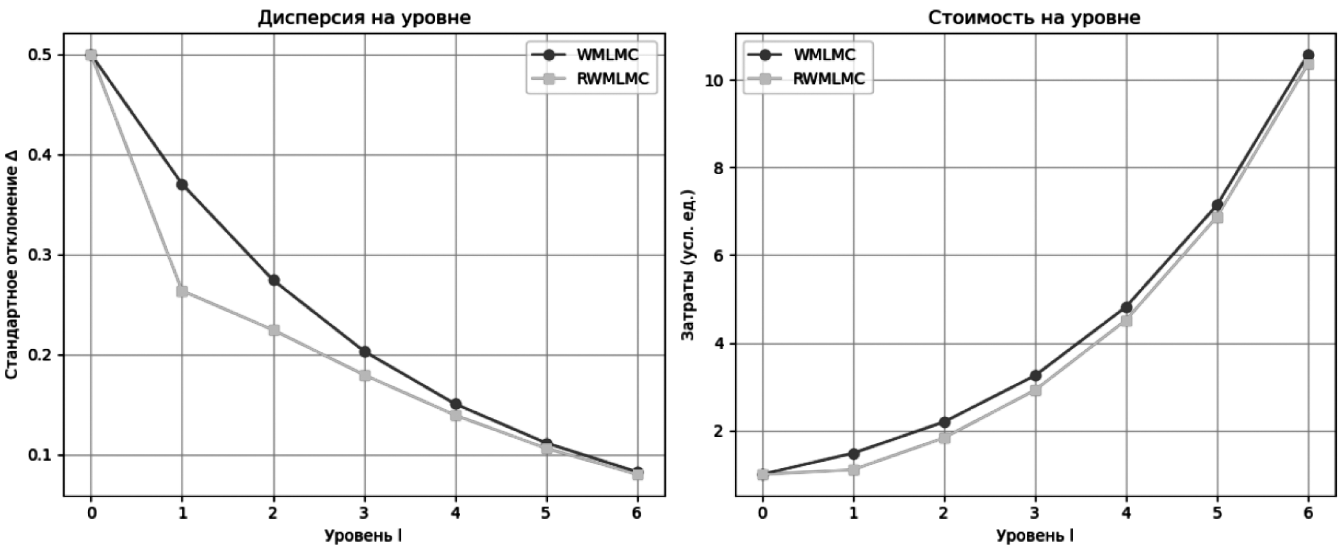

Рис. 1. Пример эффектиновсти RWMLMC в случае

вая корреляция уже мала, оптимальные веса в WMLMC естественно малы, и любое дополнительное сокращение с помощью регуляризации только усугубляет дисперсию. В-третьих, сама схема сравнения может повлиять на интерпретацию. Если фиксировать целевую дисперсию, но при этом не фиксировать бюджет вычислений, регуляризированная оценка может показаться хуже просто потому, что она жертвует дисперсией в пользу стабильности или робастности. Напротив, если целью является оптимизация компромисса между ошибкой и стоимостью, RWMLMC может оказаться лучше за счет лучшей стабильности на единицу стоимости, особенно в шумных или нестабильных режимах. Регуляризация по своей сути не гарантирует меньшую дисперсию, но она вводит полезные ограничения, которые могут улучшить устойчивость оценщика, особенно в условиях сильного шума, при наличии нестабильных или колебательных весовых моделей, или когда требуется настройка MLMC на основе данных. Следует отметить, что хотя RWMLMC иногда может давать несколько большую дисперсию, чем WMLMC при наивном сравнении, он дает преимущества в плане численной устойчивости, интерпретируемости, робастности и экономичности в сложных или высокоразмерных стохастических системах.

Заключение

В данной работе автор представил обобщение взвешенного много-порогового метода Монте-Карло, за счет введения штрафа за оценку дисперсии. Праведно утверждение, формализирующие аналитический поиск оптимальных весов при заданном параметре регуляризации и утверждения об вычислительной оценке предложенного обобщения. Эмпирические результаты, полученные в ходе исследования, продемонстрировали, что предложенная модель в определенных задачах превосходит WMLMC.

Таким образом, предложенный подход имеет не только имеет прочную теоретическую основу, но и демонстрирует практическую эффективность, что делает её ценным инструментом оценки финансовых инструментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. J.-C. Walter, G.T. Barkema, An introduction to Monte Carlo methods // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2015, Vol. 418, pp. 78–87, URL: doi.org/10.1016/j.physa.2014.06.014.
2. J. Lee, Q. Hung, D. Reichman, Twenty Years of Auxiliary-Field Quantum Monte Carlo in Quantum Chemistry: An Overview and Assessment on Main Group Chemistry and Bond-Breaking// 2022, URL: doi.org/10.48550/arXiv.2208.01280
3. Dick, Josef, Gantner, Robert N., Multilevel higher-order quasi-Monte Carlo Bayesian estimation // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2017, URL: doi.org/10.1142/S021820251750021X
4. T. Goda, K. Suzuki Recent advances in higher order quasi-Monte Carlo methods // 2019, URL: doi.org/10.48550/arXiv.1903.12353
5. S. Ghosh, L. Horesh, V. Kalantzis, Y. Lu, T. Nowicki // 2024, URL: doi.org/10.48550/arXiv.2407.16661
6. A. Lebedev, V. Alexandrov // 2024, URL: doi.org/10.48550/arXiv.2409.03095v1
7. R. Martin, No-prior Bayesian inference relMagined: probabilistic approximations of inferential models // 2025, URL: doi.org/10.48550/arXiv.2503.19748
8. G. Tesauro, G. R. Galperin On-line Policy Improvement using Monte-Carlo Search // 2025, URL: doi.org/10.48550/arXiv.2501.05407
9. Z. Ndum, J. Tao, J. Ford, Y. Liu AutoFLUKA: A Large Language Model Based Framework for Automating Monte Carlo Simulations in FLUKA // 2024, URL: doi.org/10.48550/arXiv. 2410.15222
10. Yu Li, A. Ware A WEIGHTED MULTILEVEL MONTE CARLO METHOD // 2024, URL: doi.org/10.48550/arXiv.2405.03453
11. J. Zhang, Xi Chen, Multilevel Monte Carlo Metamodeling for Variance Function Estimation // 2025, URL: doi.org/10.48550/arXiv.2503.19294v1

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»