

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КАТАСТРОФ В МОДЕЛИРОВАНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Силантьев Данила Михайлович

Аспирант, МГТУ «СТАНКИН»

silad.micher@mail.ru

## MATHEMATICAL THEORY OF CATASTROPHES IN THE MODELING OF PHYSICAL PROCESSES

D. Silantev

*Summary.* The mathematical theory of catastrophes is a branch of singularity theory that studies the behavior of systems at critical points, when small changes in parameters can cause abrupt changes in the state of the system. The article discusses the application of catastrophe theory to the modeling of physical processes, where small disturbances lead to unexpected and abrupt changes in the behavior of the system. The research is based on a mathematical model describing the interaction of nonlinear functions and critical point analysis. The theory of catastrophes by Christopher Ziman and Rene Thom is used to determine the main types of elementary catastrophes (folding, fork, topological structural instability, etc.). Methods of differential equations and bifurcation theory were used for analysis. The model includes a description of the dynamic interaction of system parameters and tracking the stage of occurrence of catastrophic events based on a set of variables. The analysis showed that the mathematical theory of catastrophes effectively describes abrupt changes in various physical processes, such as the model of brittle destruction of materials, the behavior of a liquid at a critical temperature or the propagation of waves in an environment with abnormal properties. In particular, it was revealed that changing specific parameters can serve as a trigger for the birth of a new phase of the system. It is shown that transitions between states are nonlinear in nature and can be effectively modeled using a simplified classification of catastrophes. The work demonstrates that the theory of catastrophes is a powerful tool for modeling abrupt changes in physical systems. In the future, it is necessary to develop specialized models for specific processes, taking into account many factors that can lead to bifurcations and catastrophes in dynamic systems.

*Keywords:* mathematical theory of catastrophes, mathematical modeling, physics.

*Аннотация.* Математическая теория катастроф представляет собой раздел теории сингулярностей, изучающий поведение систем в критических точках, когда небольшие изменения параметров могут вызывать резкие изменения состояния системы. В статье рассматривается применение теории катастроф к моделированию физических процессов, где малые возмущения ведут к неожиданным и резким изменениям поведения системы. Исследование основывается на математической модели, описывающей взаимодействие нелинейных функций и анализа критических точек. Теория катастроф Кристофера Зимана и Рене Тома используется для определения основных типов элементарных катастроф (складывание, развилка, топологическая структурная неустойчивость и др.). Для анализа применялись методы дифференциальных уравнений и теория бифуркаций. Модель включает описание динамического взаимодействия параметров системы и отслеживание стадии возникновения катастрофических явлений на основе набора переменных. Анализ показал, что математическая теория катастроф эффективно описывает резкие изменения в различных физических процессах, таких как модель хрупких разрушений материалов, поведение жидкости в критической температуре или распространение волн в среде с аномальными свойствами. В частности, было выявлено, что изменение конкретных параметров может служить триггером для рождения новой фазы системы. Показано, что переходы между состояниями носят нелинейный характер и могут быть эффективно моделированы с помощью упрощенной классификации катастроф. Работа демонстрирует, что теория катастроф является мощным инструментом для моделирования резких изменений в физических системах. В дальнейшем требуется разработка специализированных моделей для конкретных процессов с учетом множества факторов, которые могут приводить к бифуркациям и катастрофам в динамических системах.

*Ключевые слова:* математическая теория катастроф, математическое моделирование, физика.

### Введение

Теория катастроф во многом была разработана математиками Рене Томом, Кристофером Зиманом и Владимиром Игоревичем Арнольдом, взяв своё начало в 1960-70-х годах. Она является продолжением теории бифуркаций, теории устойчивости и теории особенностей. Данная теория позволяет описывать модели, ограничиваясь небольшим числом управляющих параметров, что является её колоссальным достоинством. Другое достоинство — схожесть самих катастроф (под катастрофой подразумевается резкое,

скачкообразное состояние системы) в различных областях науки, от физики до биологии, от социологии до криминалистики. Данный факт позволяет рассматривать применение теории катастроф в различных моделях физических процессов с целью выявления общих решений и приёмов.

Структура статьи представляет собой обзор литературных источников с целью выявления общих критериев, принципов и закономерностей в применении теории катастроф в моделировании физических процессов.

**Анализ современных публикаций**

В одном случае [1] рассматривается применение математической теории катастроф в моделировании тектонических землетрясений. После обзора определений, таких как, собственно, тектоническое землетрясение, их типы, рассматриваются катастрофы Рене Тома. За основу берётся некоторая система, описываемая величиной  $x \in \mathbb{R}^n$ , изменяемой по закону

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial V(x,u)}{\partial x}, u \in \mathbb{R}^k. \quad (1)$$

В данной системе полагается, что семейство  $V(x,u)$  имеет особенность в точке  $x = 0$ , если  $V(0,u) = 0$ ,  $d_x V(0,u) = 0$ . За множество катастроф семейства  $V(x,u)$  берётся множество

$$C_V = \{(x,u) : d_x V(x,u) = 0\},$$

оно же множество равновесий. Множество особенностей образуется из вырожденных стационарных равновесий и описывается следующим образом:

$$\Sigma_V = \{(x,u) \in C_V : \det d_x^2 V(x,u) = 0\},$$

проекция  $\pi_V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  которого на плоскость  $u \in \mathbb{R}^k$  даёт бифуркационное множество:

$$B_V = \pi_V(\Sigma_V) = \{u \in \mathbb{R}^k : \exists x((x,u) \in \Sigma_V)\}.$$

Отмечается, что при изменении системного параметра  $u$  с пересечением множества  $B_V$  происходит скачкообразная, прерывистая смена равновесия, что и является катастрофой.

Также приводится теорема ниже с таблицей стандартных катастроф Рене Тома.

**Теорема 1.** Для  $n \geq 1$  и  $k \leq 4$  существует открытое и плотное множество структурно устойчивых гладких  $k$ -параметрических семейств  $V(x,u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ , эквивалентных вблизи любой точки одному из семи канонических семейств  $CG(x) + F(x,u)$ , перечисленных в таблице 1.

Далее автор рассматривает катастрофу типа «сборка» для предсказания времени и магнитуды землетрясения. Доказывается пропорциональность площади сейсмического разлома и сейсмической энергии:

$$\sum S \propto \sum E^{2/3}. \quad (2)$$

После чего делается предположение о представлении  $\sum E^{2/3}$  как функции времени  $t$  вида:

$$\sum E^{2/3} = j^4 f = a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0. \quad (3)$$

И после преобразований, с целью устранения члена третьего порядка:

$$t \rightarrow z - q, q = \frac{a_3}{4a_4}, \quad (4)$$

уравнение принимает вид:

$$\sum E^{2/3} = b_4 z^4 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0, \quad (5)$$

где

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^4 & -q^3 & q^2 & -q & 1 \\ -4q^3 & 3q^2 & -2q & 1 & 0 \\ 6q^2 & -3q & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Данное уравнение (5) имеет вид катастрофы «сборка».

Таблица 1.

Катастрофы Рене Тома при  $k \leq 4$

Тип	$n$	$k$	$CG(x)$	$F(x,u)$
Складка	1	1	$x^2$	$u_1 x$
Сборка	1	2	$\pm x^4$	$u_1 x + u_2 x^2$
Ласточкин хвост	1	3	$x^5$	$u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3$
Бабочка	1	4	$\pm x^6$	$u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + u_4 x^4$
Гиперболическая омбилическая точка	2	3	$x^3 + y^3$	$u_1 x + u_2 y + u_3 xy$
Параболическая омбилическая точка	2	3	$\pm(x^2 y + y^4)$	$u_1 x + u_2 y + u_3 x^2 + u_4 y^2$
Эллиптическая омбилическая точка	2	4	$x^3 - xy^2$	$u_1 x + u_2 y + u_3(x^2 + y^2)$

Дальнейшая работа над видом уравнения (5) представлена следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{2}Az^2 + Bz + C, \tag{7}$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{4b_4} \sum E^{2/3}, A = \frac{b_2}{2b_4}, B = \frac{b_1}{4b_4}, C = \frac{b_0}{4b_4}. \tag{8}$$

Многообразие катастроф функции  $\varepsilon$ :

$$C_\varepsilon = \{z: z^3 + Az + B = 0\}. \tag{9}$$

Бифуркационное множество:

$$B_\varepsilon = \{(A, B) : 4A^3 + 27B^2 = 0\}. \tag{10}$$

На основе данных формул делается вывод, что при  $D < 0$  (где  $D = 4A^3 + 27B^2$ )  $\varepsilon$  находится в неустойчивом равновесии, тогда как при  $D > 0$  это же  $\varepsilon$  находится в устойчивом равновесии. При  $D = 0$  параметры управления  $A$  и  $B$  попадают на границу бифуркационного множества, а  $\varepsilon$  находится в критическом состоянии между устойчивым и неустойчивым равновесием. Автором отмечается, что смысл управляющих параметров  $A$  и  $B$  не проясняется, а основная формула (3) постулируется, не выводится.

На базе проделанной работы выводится критерий определения риска землетрясения: противоположный знак  $b_4$  и  $D$ . Приведённый в статье анализ показывает, что соответствует  $z_0$  только время возникновения землетрясения  $T_{max}$ , что соответствует условию:

$$\frac{\partial^3}{\partial z^2} \sum E^{2/3} < 0, \tag{11}$$

иначе говоря:  $z_0 - z^* < 0$  при  $b_4 > 0$  и  $z_0 - z^* > 0$  при  $b_4 < 0$ , где критическая точка  $z_0$  взята из  $C_\varepsilon$ , а  $z^* = \sqrt{-\frac{A}{3}}$ .

Далее был представлен алгоритм предсказания землетрясения из 10 пунктов, который в текущем обзоре рассматривать нет смысла.

Аналогичным образом автор рассматривает сейсмические процессы в качестве катастрофы «бабочка», разломное землетрясение — катастрофы «ласточкин хвост», иные землетрясения в качестве катастрофы «складка», сдвиговый разлом — катастрофа «сборка». Таким образом были охвачены все катастрофы Тома с одной переменной состояния системы.

В другом случае [2, с. 37] рассматривается применение математической теории катастроф в моделировании влияния неоднородностей ионосферы Земли на распространение радиоволн коротковолнового диапазона. Автор приводит бихарактеристическую систему в виде системы уравнений:

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{r}}, \frac{d\vec{k}}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{k}}, \frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega}, \tag{12}$$

где

$$\Gamma = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\vec{r}, \vec{k}, \omega). \tag{13}$$

В свою очередь  $\Gamma$  — гамильтониан,  $t$  — групповое время,  $\tau$  — параметр вдоль траектории,  $\varepsilon$  — эффективная диэлектрическая проницаемость.

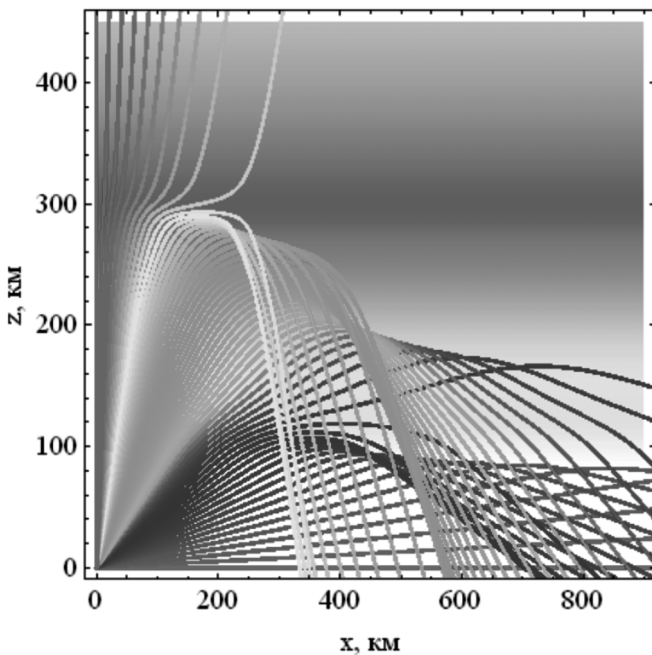


Рис. 1. Лучевые структуры в плоскости (x, z), о-волна

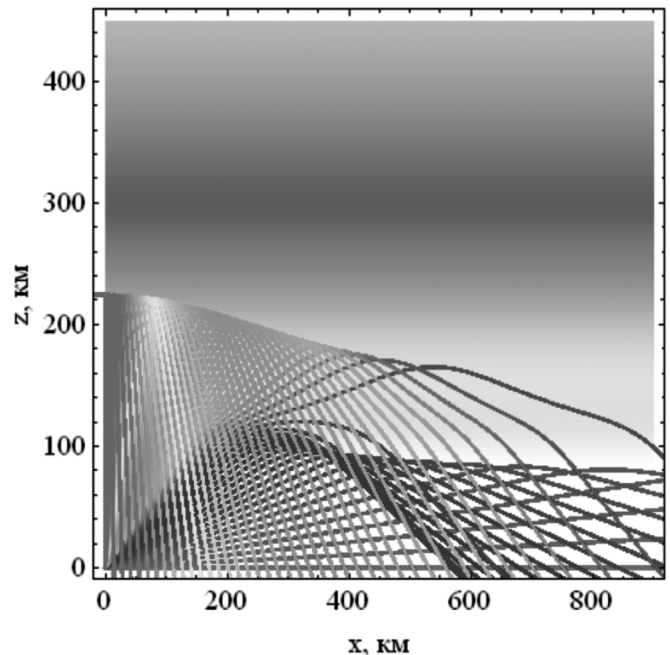


Рис. 2. Лучевые структуры в плоскости (x, z), х-волна

В результате приведён расчёт лучевой структуры радиосигнала в проекции на плоскость  $(x, z)$  для обыкновенной волны (о-волны) и необыкновенной волны (х-волны) на рис. 1 и рис. 2 соответственно.

Семейство лучей, приведённых на рис. 1, образует сложную каустическую структуру, которая содержит три каустических острия.

Дальнейшая структура работы выполнена как предоставление результатов моделирования амплитуды поля х- и о-волн в окрестности каустик на основе бихарактеристической системы с применением методов волновой теории катастроф. Подробности моделирования, в том числе реализация волновой теории катастроф в модели, не приведены.

В третьем случае [3] проведено исследования набора бифуркационных траекторий для цилиндрической оболочки под внешним давлением и осевом сжатии. Здесь были использованы уравнения фон Кармана:

$$\begin{aligned} a_1 \nabla^4 w + T(w, \Phi) - \nabla_k^2 \Phi = \\ = q, a_2 \nabla^4 \Phi - \frac{1}{2} T(w, w) - \nabla_k^2 w = 0' \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla_k^2 \alpha = k_1 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} + k_2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2}; \\ T(\alpha, \beta) = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial l_1^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial l_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial l_1 \partial l_2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial l_1 \partial l_2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial l_2^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial l_1^2}; \end{aligned}$$

$w = (x_1, x_2)$ ,  $\Phi = \Phi(x_1, x_2)$  — нормальные смещения (средней поверхности оболочки) и функция силы соответственно.  $q = q(x_1, x_2)$  является функцией внешнего давления; для осевого сжатия  $q(x_1, x_2) \equiv 0$ . Для оболочки, сжатой в осевом направлении,  $\Delta$  обозначает смещение концов оболочки. Задача задана в цилиндрической области  $\Omega = \{0 \leq x_1 \leq L/R, 0 \leq x_2 \leq 2\pi\}$ ;  $\Gamma \equiv \partial\Omega$  обозначает ее границу.  $L, R$  и  $h$  — длина, радиус и толщина оболочки.  $E$  и  $\mu$  обозначают модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки соответственно.

Далее, все переменные являются безразмерными, и следующие соотношения определяют безразмерные переменные (черта над переменной означает, что она является размерной):

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 = x_1 R, 0 \leq x_1 \leq L/R, \bar{x}_2 = x_2 L, 0 \leq x_2 \leq 2\pi, \\ \bar{w} = wh, \bar{\Phi} = \Phi E h^3, \bar{\Delta} = \Delta h \frac{h}{R}, \bar{q} = q \frac{E h^4}{R^4}. \end{aligned}$$

Для вариационной постановки рассматриваемой нелинейной краевой задачи используется следующий функционал энергии деформации:

$$E = U - A, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} U = \frac{E h^5}{R^5} \int_0^{2\pi} \int_0^{L/R} \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{12(1-\mu^2)} \left( \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 \right) + \right. \\ \left. + \left( -\frac{T_{11}^2}{2} + \mu T_{11} T_{22} - \frac{T_{22}^2}{2} - (1+\mu) T_{12}^2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} T_{11} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{2} T_{22} \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 - \right. \\ \left. - T_{12} \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{R}{h} T_{22} w \right] dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (16)$$

Силы, действующие на среднюю поверхность оболочки,  $T_{ij}$  определяются:

для оболочки, находящейся под внешним давлением:

$$T_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}, T_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}, T_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (17)$$

для оболочки, сжатой в осевом направлении:

$$T_{11} = \Phi_0(x_2) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}, T_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}, T_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}; \quad (18)$$

$\Phi_0(x_2)$  соответствует решениям пути предбифуркационного равновесия.

Работа внешней силы записывается как:

для оболочки, находящейся под внешним давлением:

$$A = -\frac{E h^5}{R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{L/R} q(x_1, x_2) w(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (19)$$

для оболочки, сжатой в осевом направлении:

$$A = \frac{E h^5}{R^2} \int_0^{2\pi} \Delta T_{11}(x_2)_{\Gamma} dx_2. \quad (20)$$

Как для дифференциальной, так и для вариационной формулировок к дифференциальным соотношениям добавлены граничные условия на концах оболочки. Автор отмечает, что, граничные условия симметрии должны быть наложены на линии  $x_2 = 0$  и  $x_2 = \pi$ ; тем самым расширяются границы области определения: отсюда  $\Gamma_1$  обозначает части границы  $x_1 = const$  (края оболочки),  $\Gamma_2$  части границы  $x_2 = const$  (с сформулированными на них условиями симметрии);  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ .

Также указывается, что

$$V(x_1, x_2) = (v_p(x_1, x_2), p = 1, 2)$$

обозначает пару  $(w(x_1, x_2), \Phi(x_1, x_2))$ , тогда как  $\Omega = \{x_1^{(1)} \leq x_1 \leq x_1^{(2)}, x_2^{(1)} \leq x_2 \leq x_2^{(2)}\}$  область определения; дифференциальная формулировка записывается в виде  $L(V) = 0$ , вариационная формулировка в виде  $minE(V)$ , граничные условия как  $S(V_\Gamma) = 0$ .

Для решения рассматриваемой задачи вектор неизвестных функций  $V(x_1, x_2)$  представлен произведением функций с одной переменной:

$$v_p(x_1, x_2) = h_p(x_1)g_p(x_2). \tag{21}$$

где

$$h(x_1) = \{h_p(x_1)\}, g(x_2) = \{g_p(x_2)\};$$

$$n = dimh(x_1) = dimg(x_2) = dimV(x_1, x_2).$$

Переписав функционал вариационной формулировки  $minE(V)$  в терминах (21), было получено:

$$minE_{x_1x_2}(h, g) \tag{22}$$

При варьировании функционала (22) относительно неизвестных функций  $h(x_1)$  и  $g(x_2)$  получена система интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{dh}{dx_1} = f^{x_1}(h(x_1), a^{x_2}, q), x_1 \in [x_1^{min}, x_1^{max}], \tag{23 a}$$

$$\frac{dg}{dx_2} = f^{x_2}(g(x_2), a^{x_1}, q), x_2 \in [x_2^{min}, x_2^{max}]. \tag{23 b}$$

Компоненты векторов  $a^{x_1}, a^{x_2}$  являются определенными интегралами от компонент вектор-функций  $h(x_1)$  и  $g(x_2)$  их производных: компоненты  $a^{x_2}$  зависят от  $g(x_2)$ :

$$a^{x_2} = \int_{x_2^{min}}^{x_2^{max}} g_{j_1}(x_2)g_{j_2}(x_2)dx_2$$

$$\left( a^{x_2} = \int_{x_2^{min}}^{x_2^{max}} g_{j_1}(x_2)g_{j_2}(x_2)g_{j_3}(x_2)dx_2 \right) \tag{24 a}$$

для коэффициентов для линейных (нелинейных) членов уравнения (23 a).

Компоненты  $a^{x_1}$  зависят от  $h(x_1)$ :

$$a^{x_1} = \int_{x_1^{min}}^{x_1^{max}} h_{j_1}(x_1)h_{j_2}(x_1)dx_1$$

$$\left( a^{x_1} = \int_{x_1^{min}}^{x_1^{max}} h_{j_1}(x_1)h_{j_2}(x_1)h_{j_3}(x_1)dx_1 \right) \tag{24 b}$$

для коэффициентов для линейных (нелинейных) членов уравнения (23b).

Приведенная выше система дополняется граничными условиями, вытекающими из (18):

$$S_{\Gamma_1} = 0 (dimS_{\Gamma_1} = n) \tag{25 a}$$

$$S_{\Gamma_2} = 0 (dimS_{\Gamma_2} = n) \text{ (условия симметрии).} \tag{25 b}$$

Функционал (22) с ограничениями (25a) и (25b) дает функцию Лагранжа:

$$minE_b(h, g) \tag{26}$$

в которых уравнения Эйлера-Лагранжа имеют вид (23 a) и (23 b) и естественные граничные условия (25 a) и (25 b).

Практическая реализация воплощена в виде итерационного обобщенного метода Канторовича.

Далее была приведена бифуркационная структура уравнений фон Кармана, представленная на рис. 3.

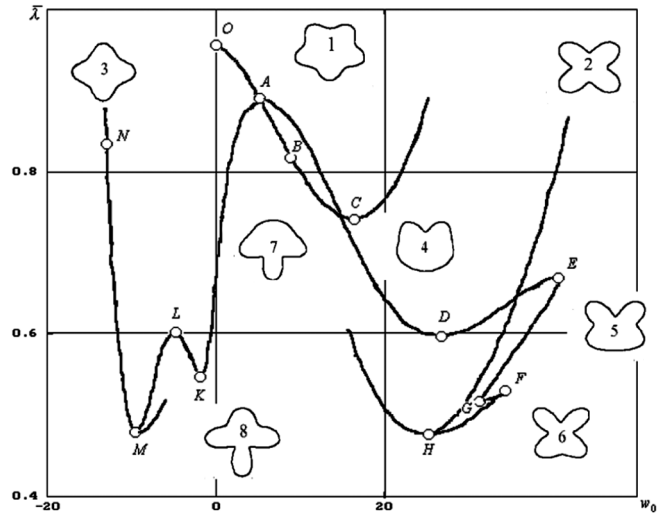


Рис. 3. Бифуркационная структура уравнений фон Кармана, определённых на замкнутой цилиндрической области для постоянного правого члена и однородных граничных условий

По оси  $x$  отложено типичное значение  $w$  (связанное с толщиной оболочки), по оси  $y$  — амплитуда правого члена  $\lambda$ , (связанная с минимальным значением бифуркации соответствующей линеаризованной задачи). Центральные сечения решений (функция  $w$ ) расположены вблизи соответствующих участков бифуркационных траекторий. Кружки обозначают сингулярные точки решений. На рисунке показаны предбифуркационный путь (совпадает с осью  $y$ ); первичные бифуркационные пути  $O-A-B-C$  (соответствует регулярному решению 1),  $M-N$  (регулярное решение 3), с точкой минимума  $H$  (ре-

гулярное решение 3); вторичные бифуркационные пути A-D-G-E-F-H (локализованные решения 4, 5 и 6) и A-K-L-M (локализованные решения 7 и 8).

В результате были получены бифуркационные пути для катастроф цилиндрической оболочки под внешним давлением (рис. 4, 5 и 6) и при осевом сжатии (рис. 7).

На основе полученных результатов делаются выводы о характере бифуркационных путей и их зависимостях от ключевых параметров. Достоинством работы является подробность описанного математического аппарата и детальность анализа деформации цилиндрической оболочки.

В новом случае [4] рассматриваются феноменологические модели сегнетоэластиков с полносимметричным параметром порядка и классифицируются методами эк-

вивариантной теории катастроф. За основу берётся разложение термодинамического потенциала в формальный ряд Тейлора по степеням параметра порядка:

$$\begin{aligned} \Phi &= a_1\eta + b_1\xi + b_2\xi^2 + c_1\eta^2\xi + \eta^2 + \kappa\eta^2\xi^2 + \xi^4 + \dots \\ &= a_1l_1 + b_1l_2 + b_2l_2^2 + c_1l_1l_2 + l_1^2 + l_1l_2^2 + l_2^4 + \dots \end{aligned} \quad (27)$$

где  $l_1 = \eta, l_2 = \xi$  — базисные инварианты.

Сделав предположение, что члены 4-й степени являются ростком (главными), автор выводит модель с 4 управляющими параметрами:

$$\begin{aligned} \Phi &= a_1l_1 + b_1l_2 + b_2l_2^2 + c_1l_1l_2 + l_1^2 + l_1l_2^2 + l_2^4, \\ \Phi &= a_1\eta + b_1\xi + b_2\xi^2 + c_1\eta^2\xi + \eta^2 + \kappa\eta^2\xi^2 + \xi^4. \end{aligned} \quad (28)$$

В результате было получено двумерное сечение фазовой диаграммы модели (28).

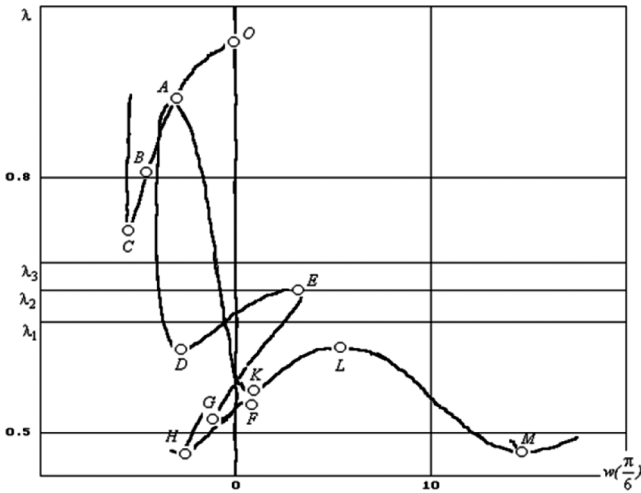


Рис. 4. Сжатие под внешним давлением в координатах  $w(\pi/6) - \lambda$

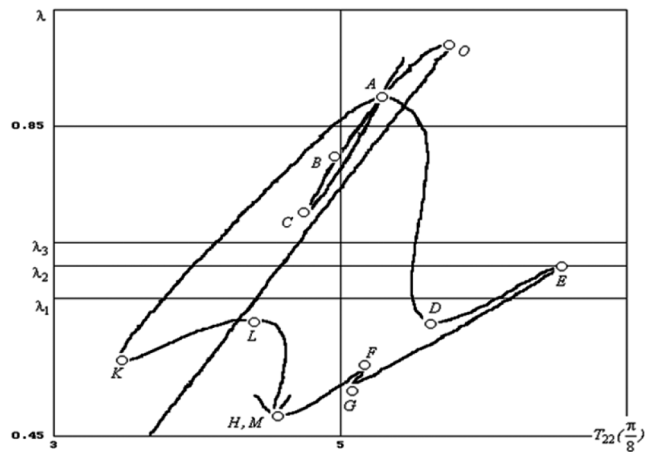


Рис. 5. Сжатие под внешним давлением в координатах  $T_{22}(\pi/8) - \lambda$

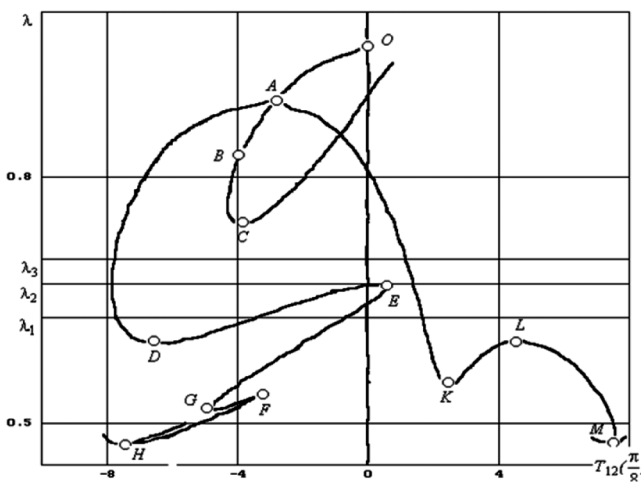


Рис. 6. Сжатие под внешним давлением в координатах  $T_{12}(\pi/8) - \lambda$

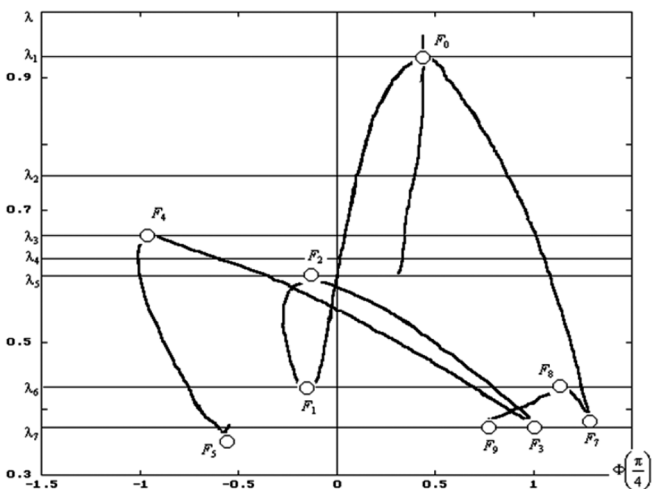


Рис. 7. Осевое сжатие цилиндрической оболочки

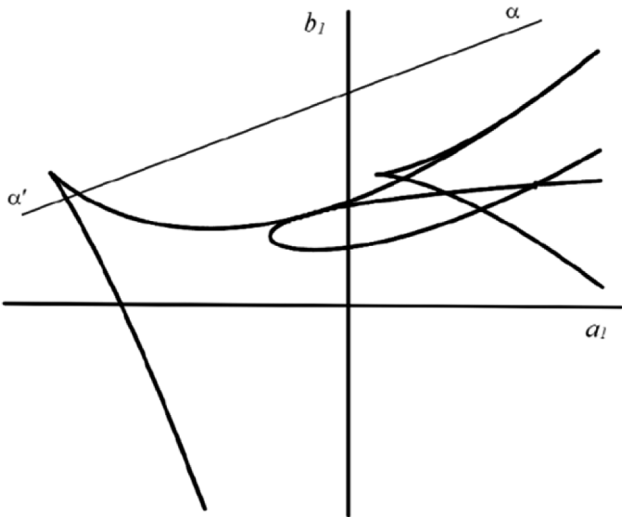


Рис. 8. Двумерное сечение фазовой диаграммы модели (28)

Здесь  $\alpha\alpha'$  — термодинамический путь, пересекающий линию фазового перехода из фазы 1 в фазу 2 ( $a_1 = 0$ ) и линию изомерного фазового перехода.

На основе полученных результатов автор делает вывод о присутствии линий и областей изомерного фазового перехода с критическими точками типа жидкость-пар.

У того же автора схожим образом [5] разбираются феноменологические модели фазовых переходов с многокомпонентными взаимодействующими параметрами порядка с использованием методов теории особенностей.

В ещё одном случае [6, с. 98] исследуются катастрофы решений уравнений одномерной газовой динамики и наследование ростков катастроф решений волнового уравнения. За основу берётся система уравнений одномерной газовой динамики:

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \alpha(\rho)\rho_x = 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0, \end{cases} \quad (29)$$

где функция  $\alpha(\rho) = \frac{p_\rho}{\rho}$  раскладывается в ряд Тейлора в окрестности точки  $\rho_* > 0$ . Здесь  $p(\rho)$  — уравнение состояния газа,  $p > 0$ . Результаты исследований в тексте не приводятся.

В следующем случае [7, с. 541] рассматривается математическое моделирование специальных функций каспоидных краевых волновых катастроф. За основу берётся равномерная асимптотика волнового поля  $U$  в окрестности краевой катастрофы  $B_N$ :

$$U \cong \exp(i\theta) \left( I_1^g I_N^{\beta\pm} + \sum_{j=1}^{N-2} I_{j+1}^g \frac{\partial I_N^{\beta\pm}}{\partial \lambda_j} + I_1^e \right), \quad (30)$$

где  $\theta$  — фаза бегущей волны;  $I_1^g, I_1^e$  — асимптотически расходящиеся ряды;  $I_N^{\beta\pm}$  — специальная функция краевой катастрофы:

$$\begin{aligned} I_N^{\beta\pm}(\bar{\lambda}) &\equiv I = \int_0^{+\infty} \exp\left[ iF_{B_N^{\beta\pm}}(x, \bar{\lambda}) \right] dx, F_{B_N^{\beta\pm}} = \\ &= kx^N + \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_j x^j, k = \pm 1 \end{aligned} \quad (31)$$

Функция  $F_{B_N^{\beta\pm}}$  является универсальной деформацией катастрофы  $B_N$ .

По итогу дальнейших преобразований и моделирования были получены характерные сечения амплитудных и фазовых структур краевых катастроф  $B_3, B_4$  и  $B_5$ .

В другом случае [8, с. 448] оценивается повреждаемость стальных конструкций. В данной работе применяется функция типа «сборка»:

$$f(\sigma) = a\varepsilon + b\varepsilon^2 + \varepsilon^4 \quad (32)$$

Данное уравнение (32) применяется в описании кривой усталости конструкционных сталей:

$$N = N_R e^{-\alpha[f(\sigma) - \text{const}(\sigma_R)]} \quad (33)$$

где  $N, N_R$  — общее число циклов, соответствующих точке перелома кривой усталости для коэффициента асимметрии цикла  $R$ ;  $\alpha$  — коэффициент пропорциональности;  $f(\sigma)$  — некоторая реакция от приложенных усилий;  $\text{const}(\sigma_R)$  — величина сдвига экспоненты, соответствующая пределу выносливости  $\sigma_R$ .

В процессе моделирования получены изменения модулей упругости и изменения предела выносливости для сталей различных марок.

Принципы, изложенные в оставшихся случаях [9; 10], мало чем отличаются от описанного ранее.

### Выводы

Была исследована отечественная и зарубежная литература в области применения математической теории катастроф в моделировании физических процессов.

Ключевым в моделировании является составление системы уравнений, имеющей сходство с одной из типичных катастроф, и поиск управляющих параметров.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А.К. Гуц ТЕКТОНИЧЕСКИЕ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ И ТЕОРИЯ КАТАСТРОФ // МСИМ. 2023. №4 (68). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/tektonicheskie-zemletryaseniya-i-teoriya-katastrof>.
2. Моделирование влияния неоднородностей ионосферы Земли на распространение радиоволн коротковолнового диапазона / А.С. Крюковский, Д.С. Лукин, Е.В. Михалева [и др.] // Распространение радиоволн : Сборник докладов XXVIII Всероссийской открытой научной конференции, Йошкар-Ола, 16–19 мая 2023 года / Редколлегия: Д.С. Лукин, Д.В. Иванов, Н.В. Рябова [и др.]. — Йошкар-Ола: Поволжский государственный технологический университет, 2023. — С. 35–42. — EDN DWTVPM.
3. Gromov, Vasilii. (2020). Catastrophes of Cylindrical Shell. 10.13140/RG.2.2.10958.28481.
4. Павлов Сергей Васильевич. Феноменологические модели сегнетоэластиков с полносимметричным параметром порядка: классификация методами эквивариантной теории катастроф // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2023. №5. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/fenomenologicheskie-modeli-segnetoelastikov-s-polnosimmetrichnym-parametrom-poryadka-klassifikatsiya-metodami-ekvivariantnoy-teorii>.
5. Павлов Сергей Васильевич. Феноменологические модели фазовых переходов с многокомпонентными взаимодействующими параметрами порядка: построение и классификация методами теории особенностей // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2024. №3. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/fenomenologicheskie-modeli-fazovyh-perehodov-s-mnogokomponentnymi-vzaimodeystvuyuschimi-parametrami-poryadka-postroenie-i>.
6. Шавлуков, А.М. Катастрофы решений уравнений одномерной газовой динамики и наследование ростков катастроф решений волнового уравнения / А.М. Шавлуков // Уфимская осенняя математическая школа: Материалы Международной научной конференции, Уфа, 28 сентября — 01 2022 года / Отв. редактор З.Ю. Фазуллин. Том 2. — Уфа: Федеральное Государственное Бюджетное Образовательное Учреждение Высшего Образования «Уфимский Университет Науки И Технологий», 2022. — С. 97–98. — DOI 10.33184/uomsh2t-2022-09-28.35. — EDN SDMBLY.
7. Крюковский, А.С. Математическое моделирование специальных функций каспидных краевых волновых катастроф / А.С. Крюковский, М.С. Домнина, Д.В. Растягаев // Распространение радиоволн : Сборник докладов XXVIII Всероссийской открытой научной конференции, Йошкар-Ола, 16–19 мая 2023 года / Редколлегия: Д.С. Лукин, Д.В. Иванов, Н.В. Рябова [и др.]. — Йошкар-Ола: Поволжский государственный технологический университет, 2023. — С. 540–543. — EDN GOACFC.
8. Применение мониторинга для оценки повреждаемости стальных конструкции / В.Н. Гадалов, С.Н. Кутепов, О.М. Губанов, А.А. Калинин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. — 2023. — № 9. — С. 447–450. — DOI 10.24412/2071-6168-2023-9-442-443. — EDN USWHNK.
9. Jain, Samyak & Bhagwat, Ameeya. (2023). Catastrophe theoretic approach to the Higgs Mechanism. 10.48550/arXiv.2307.12042.
10. Liang, Jing-Yu & Dan, Long & Wang, Min & Hu, Yun-Qi & Du, Chun-Guang & Yang, Lan & Long, Gui-Lu. (2024). Observation of limit torus and catastrophe point in optomechanical systems. New Journal of Physics. 26. 10.1088/1367-2630/ad7e49.

© Силантьев Данила Михайлович (silad.micher@mail.ru)

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»