DOI 10.37882/2223–2966.2022.12–2.32

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ НЕЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ТЕРМИНАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

SUFFICIENT CONDITIONS FOR NON-EQUIVALENCE OF HYPERBOLIC EQUATIONS IN TERMS OF COMPUTER ALGEBRA

S. Startsev

Summary. This paper devoted to hyperbolic partial differential equations with special properties, which are satisfied, for example, by Darboux integrable equations (i.e., equations with nontrivial kernels of total derivatives by virtue of the equation). The equivalence problem of such equations is considered, that is, the question of whether one of the equations is related to the other by a point change of variables. We can associate an integer r ≥ 0 with any of the above equations. Since the integer r is preserved under point changes of variables, we can formulate a sufficient condition for the non-equivalence of the equations by using this number. We explain how a computer algebra system makes it easy for us to obtain a lower estimate for r and, in some cases, to find the exact value of r in a fully automatic mode. Using a Darboux integrable Moutard equation as an example, we demonstrate the efficiency and usefulness of this approach and show that the Moutard equation is not equivalent to any of the equations in a list of Darboux integrable equations.

Keywords: non-linear hyperbolic partial differential equations, Darboux integrability, equivalence problem, computer algebra.

Старцев Сергей Яковлевич
Старший научный сотрудник, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, Уфа
intsys@internet.ru

Аннотация. Рассматриваются гиперболические уравнения в частных производных со специальными свойствами, которым удовлетворяют, например, интегрируемые по Дарбу уравнения (то есть уравнения с нетривиальными ядрами полных производных в силу уравнения). Обсуждается проблема эквивалентности для таких уравнений, то есть вопрос о том, связано ли одно из уравнений с другим с помощью точечных замен переменных. С каждым из уравнений указанного класса можно связать некоторое целое число r ≥ 0, сохраняющееся при точечных заменах переменных, и сформулировать в терминах этой величины достаточное условие неэквивалентности уравнений. Показано, что с помощью систем аналитических вычислений нетрудно получить оценку снизу для r, а в некоторых случаях и найти точное значение r в полностью автоматическом режиме. На примере интегрируемого по Дарбу уравнения Мутара продемонстрирована эффективность и полезность этого подхода, и показано, что оно не эквивалентно ни одному из уравнений в одном из списков интегрируемых по Дарбу уравнений.

Ключевые слова: нелинейные гиперболические уравнения в частных производных, интегрируемость по Дарбу, проблема эквивалентности, компьютерная алгебра.

Введение

Одним из классов математических моделей являются дифференциальные уравнения в частных производных вида

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y). \quad (1)$$

Простейшим классическим примером уравнения этого класса является волновое уравнение $u_{tt} - u_{zz} = 0$, которое заменой переменных $t = x + y$, $z = x - y$ приводится к виду (1) с $F = 0$.

Как известно, $u = a(x) + b(y)$ является решением волнового уравнения $u_{xy} = 0$ для любых функций a и b. Наличие явной формулы для решения, зависящей от двух произвольных функций (и, вообще говоря, их производных), на самом деле является довольно редким свойством среди уравнений (1). Другим, хорошо известным специалистам, примером такого сорта является уравнение Луивилля $u_{xy} = e^u$: для любых функций a и b формула

$$u = \ln\left(\frac{a'(x)b'(y)}{(a(x)+b(y))^2}\right)$$

задает решение этого уравнения.

Таким образом, некоторые из уравнений (1) обладают особыми свойствами. Одной из математических задач является поиск или даже полное перечисление (классификация) уравнений (1), отличающихся от прочих теми или иными замечательными свойствам (указанное в предыдущем абзаце дает нам пример одного из таких свойств). При этом, при обнаружении предположительно нового уравнения всегда возникает вопрос не сводится ли оно к какому-то из уже известных точеными заменами переменных

$$x = \xi(\tilde{x}), \qquad y = \eta(\tilde{y}), \qquad u = \lambda(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}) \quad (2)$$

и перестановкой местами x и y. Ответ на этот вопрос не всегда очевиден даже при сравнении двух уравнений. При этом новые уравнения нужно сравнивать не с одним уравнением, а порой с достаточно длинным списком уже известных уравнений. Нельзя исключать, что похожие проблемы могут возникать и в каких-то более прикладных ситуациях — например, при проверке не содержится ли то или иное важное с практической точки зрения уравнение в справочнике наподобие [1]. Вопрос о сводимости уравнения с помощью преобразований (2) к какому-то наперед заданному уравнению (или списку уравнений) в дальнейшем мы будем называть проблемой эквивалентности.

В настоящей статье мы будем рассматривать вышеописанную проблему для тех из уравнений (1), для которых найдется функция g, зависящая от x, y, u и производных u по y, и удовлетворяющая соотношению

$$F_{u_y} = \frac{dg}{dx} \quad (3)$$

для любого решения соответствующего уравнения. Не любое уравнение (1) обладает таким свойством, но среди некоторых интересных с математической точки зрения классов уравнений оно достаточно распространено или даже должно выполняться в обязательном порядке.

Нетрудно проверить, что свойство (3) и порядок g (по есть порядок старшей из присутствующих в g производных[1]) сохраняются при заменах переменных (2). Порядок функции g для некоторых уравнений определяется из соотношения (3) неоднозначно. Но если взять минимальный из порядков g, то эта величина будет определена корректно и будет инвариантной относительно замен (2). В настоящей статье мы покажем, что указанную величину сравнительно нетрудно определить с привлечением систем аналитических вычислений (на примере системы аналитических вычислений Reduce) и на одном примере покажем, что эта величина как минимум иногда помогает быстро решить проблему эквивалентности.

Полные производные в силу уравнения и их ядра

[1] Если g не зависит от производных u, то ее порядок считается равным нулю.

При работе с соотношениями, выполняющимися для любого решения уравнения (наподобие соотношения (3)), мы можем исключить с помощью уравнения (1) и его дифференциальных следствий все смешанные производные u. Поэтому в таких ситуациях мы можем считать, что все выражения и функции зависят только от x, y и конечного числа переменных $u_0 \coloneqq u$, $u_i \coloneqq \partial^i u/\partial x^i$, $\bar{u}_j \coloneqq \partial^j u/\partial y^j$. Если в обычных формулах для полных производных исключить все смешанные производные как указано выше, то мы получим полные производные D_x и D_y в силу уравнения (1). Для любой зависящей от вышеуказанных переменных функции g эти полные производные задаются формулами

$$D_x(g) = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u} u_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\partial g}{\partial u_i} u_{i+1} + \frac{\partial g}{\partial \bar{u}_i} D_y^{i-1}(F) \right),$$
$$D_y(g) = \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial u} \bar{u}_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{u}_i} \bar{u}_{i+1} + \frac{\partial g}{\partial u_i} D_x^{i-1}(F) \right).$$

Что касается компьютерных вычислений, то на взгляд автора, D_x и D_y особенно легко задать в системе аналитических вычислений Reduce. Действительно, если в ней обозначить u_i через u(i) для $i \geq 0$, а через v(j) обозначить $\bar{u}_j$ для $j > 0$, и затем записать F в этих обозначениях, то D_x и D_y будут задаваться следующим кодом:

```
operator u; u(i);
operator v; v(i);
rhs:= F;
for all i such that i>-1 let df(u(i), x)=u(i+1);
let df(u(0), y)=v(1);
for all i such that i>0 let df(v(i), y)=v(i+1);
let df(v(1), x)=rhs;
let df(u(1), y)=rhs;
for all i such that i>1 let df(v(i), x)=df(rhs, y, i-1);
for all i such that i>1 let df(u(i), y)=df(rhs, x, i-1);
```

После этого Reduce будет вычислять df(expr, x) и df(expr, y) по вышеприведенным формулам для D_x и D_y соответственно. С учетом введенных обозначений, равенство (3) с функцией g, имеющей порядок r, можно записать как

$$F_{u_y} = D_x(g(x, y, u, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r)), \qquad g_{\bar{u}_r} \neq 0. \quad (4)$$

Для некоторых уравнений вида (1) ядра D_x и D_y состоят не только из функций от y и x соответственно. Простейший пример — это уравнение $u_{xy} = 0$, для которого $D_x(u_y) = 0$ и $D_y(u_x) = 0$. Чуть более сложный пример такого сорта дает нам упоминавшееся выше уравнение Лиувилля $u_{xv} = e^u$, у которого $2u_{yy} + u_y^2 \in \ker D_x$ и $2u_{xx} + u_x^2 \in \ker D_y$.

Определение. Функция $w(x, y, u, u_1, \ldots, u_k), w_{u_k} \neq 0$, называется x-интегралом порядка k для уравнения (1), если $D_y(w) = 0$. Аналогично, функция $\overline{w}(x, y, u, \overline{u}_1, \dots, \overline{u}_m)$, $\overline{w}_{\overline{u}_m} \neq 0$, называется y-интегралом порядка m для уравнения (1), если $D_x(\overline{w}) = 0$. Если уравнение обладает как x-интегралами, так и y-интегралами, то оно называется интегрируемым по Дарбу.

Если для уравнения (1) удается найти функцию g порядка r, удовлетворяющую (4), то она может оказаться суммой y-интеграла и какой-то другой функции $\hat{g}$, также удовлетворяющей (4) и имеющей порядок меньше r. Поэтому для нахождения решения (4) с минимальным r важно убедиться, что (1) не допускает y-интегралов порядка ниже $r+1$ (тогда ситуация, описанная в предыдущем предложении, будет невозможна — см. утверждение 1 ниже).

Убедиться в отсутствии y-интегралов ниже определенного порядка можно с помощью y-инвариантов Лапласа H_i уравнения (1). Они задаются рекуррентной формулой

$$H_{i+1} = 2H_i - D_x D_y(\ln(H_i)) - H_{i-1} \tag{5}$$

и первыми членами

$$H_0 = F_u + F_{u_x}F_{u_y} - D_x(F_{u_x}),$$

$$H_{-1} = F_u + F_{u_x}F_{u_y} - D_y(F_{u_y}).$$

В работе [2] было доказано, что уравнение (1) допускает y-интеграл порядка m только тогда, когда H_i является тождественным нулем для некоторого неотрицательного $i < m$. Формулы для x-инвариантов Лапласа K_i отличаются от вышеприведенных только тем, что надо в (5) заменить H на K и в качестве первых членов последовательности K_i взять $K_{-1} = H_0$ и $K_0 = H_{-1}$. Для x-инвариантов Лапласа, верно аналогичное утверждение: уравнение (1) допускает x-интеграл порядка m только тогда, когда K_i является тождественным нулем для некоторого неотрицательного $i < m$. Инварианты Лапласа легко задать в Reduce, если дополнить приведенный выше код следующим:

```
a0:=df(rhs, u(1));
b0:=df(rhs, v(1));
c0:=df(rhs, u(0));
h0:=c0+a0*b0-df(a0, x);
k0:=c0+a0*b0-df(b0, y);
operator h; h(i);
operator k; k(i);
let h(–1)=k0;
let h(0)=h0;
let k(–1)=h0;
let k(0)=k0;
for all i such that i>0 let h(i)=2*h(i-1)-df(log(h(i-1)), x, y)-h(i-2);
for all i such that i>0 let k(i)=2*k(i-1)-df(log(k(i-1)), x, y)-k(i-2);
```

С учетом вышеизложенного нетрудно доказать следующее утверждение, выполнение части условий которого легко проверить средствами Reduce.

Утверждение 1. Пусть для уравнения (1) найдется функция g, удовлетворяющая соотношению (4) и y-инварианты Лапласа H_i этого уравнения отличны от нуля для всех неотрицательных $i < r$. Тогда любая другая функция $\hat{g}$, такая что $D_x(\hat{g}) = F_{u_y}$, имеет порядок не ниже r.

Доказательство. Предположим противное — пусть $\hat{g}$ имеет порядок ниже r. Тогда получаем, что

$$D_x(\hat{g}) = F_{u_y} = D_x(g),$$

то есть $g - \hat{g}$ является y-интегралом порядка r. Но это противоречит предположение о неравенстве нулю H_i для всех неотрицательных $i < r$. Что и требовалось доказать.

В работе [3] также было доказано следующее утверждение.

Утверждение 2. Пусть для уравнения (1) найдется функция g, удовлетворяющая соотношению (4). Тогда $h_i = 0$ для некоторого неотрицательного $i \leq r$, где $h_i := (H_i)_{\overline{u}_{i+1}}$.

Предположим дополнительно, что $H_0 \neq 0$, и обозначим через n минимальное отличное от нуля число, для которого $h_n = 0$. Если $n > 1$, то

$$F_{u_y} = D_x(\ln(H_{n-1}) - \ln(h_{n-1})). \tag{6}$$

Из этого утверждения видно, что с помощью инвариантов Лапласа мы можем убедиться не только в отсутствии у уравнения интегралов, но и оценить снизу величину r в (4) и даже в каких-то ситуациях найти g минимального порядка в автоматическом режиме (формула (6) дает нам g порядка n, в то время как из $H_i \neq 0$ для i от 0 до $n-1$ следует, что у уравнения нет y-интегралов порядка ниже $n+1$).

Условие неэквивалентности и пример его применения

Прямым вычислением нетрудно проверить, что если для (1) выполнено (4), то для любого другого уравнения, которое можно получить из (1) преобразованием (2), соотношение (4) также будет выполнено с тем же самым r (но, вообще говоря, с другой функцией g). Поэтому очевидно, что верно следующее достаточное условие неэквивалентности уравнений.

Утверждение 3. Пусть для (1) выполнено (4) с минимальным возможным для этого уравнения r, а для уравнения

$$u_{xy} = C(x, y, u, u_x, u_y)$$

выполнено $C_{u_y} = D_x(\gamma)$ с функцией γ, имеющий порядок меньше r. Тогда эти уравнения не могут быть связаны между собой преобразованием вида (2).

В качестве иллюстрации рассмотрим уравнение

$$u_{xy} = (x - y)e^u u_y - e^u. \tag{7}$$

С помощью Reduce мгновенно получаем, что H_0 H_1 ≠ 0 и H_2 = 0. Из этого следует, что у уравнения (7) нет интегралов порядка ниже 3, а формула (6) дает нам, что для него выполнено (4) с $g = \ln(u_{yy} - u_y^2)$ (то есть порядок g является минимальным).

Это уравнение упоминалось, например, в [4] как одно из уравнений Мутара в контексте, позволяющем предположить, что это уравнение интегрируемо по Дарбу (возможно факт интегрируемости по Дарбу уравнения (7) упоминался в каких-то из старых публикаций, но из-за их плохой доступности это трудно проверить). В работе [5] были фактически предъявлены x- и y-интегралы уравнения (7). Они задаются формулами

$$w = u_x + (y - x)e^u,$$

$$\bar{w} = D_y(\ln(u_{yy} - u_y^2)) - u_y \tag{8}$$

и являются x- и y-интегралами минимальных порядков для (7).

То есть (7) является интегрируемым по Дарбу, но неясно не сводится ли оно точеными преобразованиями (2) к какому-то другому уравнению — например, к какому-нибудь уравнению из списка интегрируемых по Дарбу уравнений в работе [6]. Сравнивая (7) с уравнениями из указанного списка, мы видим, что интегрируемые по Дарбу уравнения в [6] имеют либо другие минимальные порядки интегралов (эти порядки сохраняются при заменах (2)), либо для них выполняется (4) с $r < 2$. Последнее легко проверяется с учетом того, что для всех уравнений в [6] указаны интегралы (не всегда минимального порядка) и из наличия у уравнения (1) y-интеграла $\bar{w}$ порядка m следует выполнение (4) с $g = -\ln\left(\bar{w}_{\bar{u}_m}\right)$ (см., например, [7]).

Таким образом, уравнение (7) отсутствует в [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики.— М.: Физматлит, 2002. 342 С.
2. Anderson I.M., Kamran N. The variational bicomplex for hyperbolic second-order scalar partial differential equations in the plane // Duke Math. J. 1997. Vol. 87. no. 2. P. 265–319.
3. Старцев С.Я. Законы сохранения для гиперболических уравнений: локальный алгоритм поиска прообраза относительно полной производной // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2019. Т. 162. С. 85–92.
4. Lainé M.E. Sur le méthode de Darboux et les équation de Moutard // Comptes rendus de l'Académie des sciences. 1927. Vol. 184. P. 319–320.
5. Жибер А.В., Юрьева А.М. Об одном классе гиперболических уравнений с интегралами второго порядка // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2018. Т. 152. С. 46–52.
6. Жибер А.В., Соколов В.В. Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа // Успехи мат. наук. 2001. Т. 56. № 1. С. 63–106.
7. Жибер А.В. Квазилинейные гиперболические уравнения с бесконечной алгеброй симметрий // Известия РАН, серия математическая. 1994. Т. 58. № 4. С. 33–54.

© Старцев Сергей Яковлевич (intsys@internet.ru).

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»