DOI 10.37882/2223-2966.2023.6-2.07

РАЗРАБОТКА КАЛЬКУЛЯТОРА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

DEVELOPMENT OF A CALCULATOR FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

M. Georgieva
I. Georgieva
O. Blieva
S. Arvanova
B. Ezaova
D. Tlepsheva

Summary: In mathematics, differential equations are one of the foundations of mathematical analysis. They are used to solve various problems in science and technology. Numerical methods for solving differential equations are a set of procedures and algorithms that allow you to approximately solve a differential equation on a specific segment or point. These methods are often used in practical applications where an exact answer is not required, but fast calculations using computer technology are required.
That is why the development of a program that solves differential equations numerically is an important step in solving this problem.

Keywords: ordinary differential equations, numerical methods, algebraic equations, calculator.

Георгиева Марьяна Альбековна
ст. преподаватель,
Кабардино-Балкарский Государственный Университет им. Х.М. Бербекова, г. Нальчик
maryana.g@list.ru
Георгиева Ирина Альбековна
Ассистент,
Кабардино-Балкарский Государственный Университет им. Х.М. Бербекова, г. Нальчик
irka2725@mail.ru
Блиева Оксана Зауровна
ведущий инженер,
Кабардино-Балкарский Государственный Университет им. Х.М. Бербекова, г. Нальчик
roksy_85@mail.ru
Арванова Саният Мухамедовна
ст. преподаватель,
Кабардино-Балкарский Государственный Университет им. Х.М. Бербекова, г. Нальчик
sani_07@mail.ru
Езаова Бэлла Заурбиевна
Кабардино-Балкарский Государственный Университет им. Х.М. Бербекова, г. Нальчик
alena_ezaova@mail.ru
Тлепшева Диана Ануаровна
Кабардино-Балкарский Государственный Университет им. Х.М. Бербекова, г. Нальчик
tliepshieva@list.ru

Аннотация. В математике дифференциальные уравнения являются одной из основ математического анализа. Они применяются для решения различных задач в науке и технике. Численные методы для решения дифференциальных уравнений являются набором процедур и алгоритмов, которые позволяют приблизительно решить дифференциальное уравнение на конкретном отрезке или в точке. Эти методы часто используются в практических приложениях, где точный ответ не требуется, но требуются быстрые вычисления, использующие компьютерную технологию.
Именно поэтому разработка программы, выполняющей решение дифференциальных уравнений численным методом, является важным шагом для решения данной проблемы.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, численные методы, алгебраические уравнения, калькулятор.

Целью данной работы являлась разработка прикладной программы, обеспечивающей численные вычисления обыкновенных ДУ методом Эйлера и методом Рунге-Кутта.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи [1-6]:
- изучить математическую составляющую вопроса, проанализировать формулы и законы, рассмотреть частные случаи, составить алгоритм решения ОДУ;
- разработать оптимальную схему взаимодействия «пользователь — система», определить требования к программе по решению ОДУ, включая форматы входных и выходных данных;
- построить примерную блок-схему программы;
- выбрать язык программирования для реализации алгоритма и создать проект в разрабатываемой

среде. Реализовать алгоритм решения ОДУ с помощью выбранного языка программирования;
- получить и проанализировать результаты проделанной работы;
- оценить качество программы и провести ее оптимизацию при необходимости. Создать документацию для программы, описывающую ее возможности и инструкции по использованию.

Главное меню программы (рис. 1) содержит 3 активные кнопки:
- Начать — запускается основная часть программы;
- О программе — открывает раздел с описанием данной программы;
- Выход — завершает работу программы.

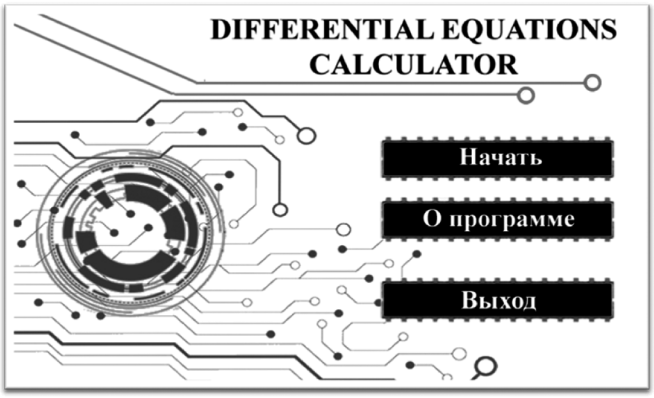

Рис. 1. Главное меню

В разделе «О программе» имеется информация об авторе проекта, а также описание самой программы.

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений осуществляется методом Эйлера или методом Рунге-Кутта.

Дифференциальное уравнение (ДУ) — это уравнение, содержащее производные или дифференциалы функции от одной или нескольких переменных. Решение дифференциальных уравнений имеет множество практических применений во многих областях науки, техники и экономики.

$$F\left(x, y, y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

где x — неизвестная переменная.

Линейным дифференциальным уравнением называется уравнение, линейное относительно искомой функции $y(x)$ и ее производных.

Аналитический способ решения дифференциальных уравнений состоит в последовательном интегрировании уравнений столько раз, каков порядок уравнения. При каждом интегрировании возникает неопределенная постоянная.

Решением дифференциального уравнения называется всякая n раз дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая после ее подстановки в исходное дифференциальное уравнение превращает его в тождество. Общим решением такого уравнения называется решение, содержащее произвольную постоянную.

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка содержит n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и является решением при любых значениях произвольных постоянных:

$$y = \varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right).$$

Для определения произвольной постоянной необходимы начальные условия, называемые **условиями Коши**. Их количество на 1 меньше порядка уравнения. Они представляют собой значения искомой функции и ее производных для n–1-го порядка при некотором значении x.

В случае, когда дифференциальное уравнение имеет сложный вид, применяются **численные методы решения**.

На рисунке 2 представлен основной экран программы. На нем расположены:
- поля для ввода данных, необходимых при вычислении;
- кнопки для выбора метода вычисления, очистки полей ввода, возвращения на экран главного меню;
- поле для вывода результата вычислений с двумя активными кнопками (копировать и сохранить);
- значок для отображения подсказки;

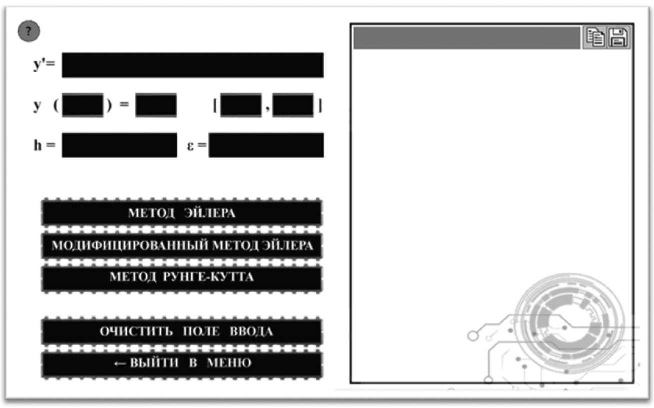

Рис. 2. Основной экран

На рисунке 3 изображена вкладка с подсказкой:

1. Решение задачи Коши методом Эйлера.

Пусть требуется решить задачу Коши:

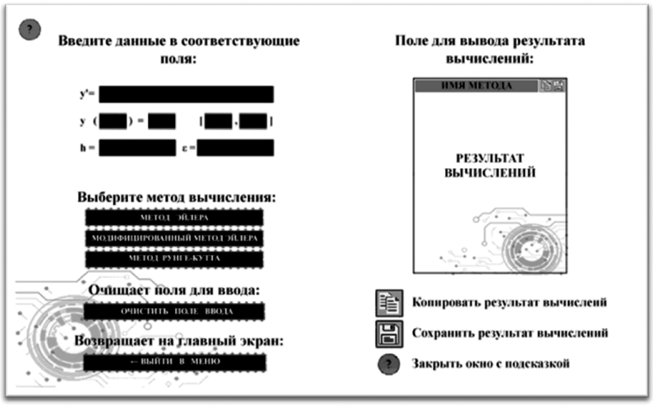

Рис. 3. Подсказка

$$y' = f(x, y), \quad (1)$$

$$y(x_0) = y_0,$$

$$x \in [a, b]$$

На отрезке [*a*, *b*] выберем множество точек, удовлетворяющих условию:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

Данное множество точек имеет равноотстоящие узлы, т.е. $x_{i+1} - x_i = h$.

Произведем конечно-разностную аппроксимацию производной. Для этого воспользуемся определением производной. Получаем:

$$y'(x_i) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

Подставляя y' в дифференциальное уравнение (1), получим:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), i = 0,1,\ldots,n-1$$

С помощью этой формулы определим значение сеточной функции y_{i+1} в узле x_{i+1} по ее значению y_i в предыдущем узле x_i.

На рисунках 4 и 5 показан результат работы программы при выборе **метода Эйлера**:

В **модифицированном методе Эйлера** сначала вычисляется первое приближение y_{i+1} по формуле:

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Затем находится **уточненное окончательное значение** по формуле:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})\right)$$

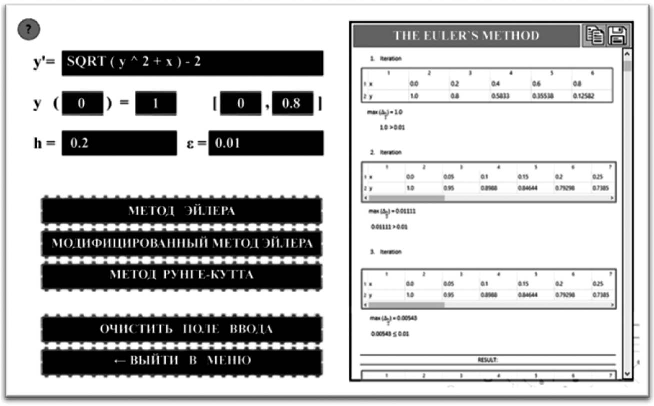

Рис. 4. Результат вычислений методом Эйлера

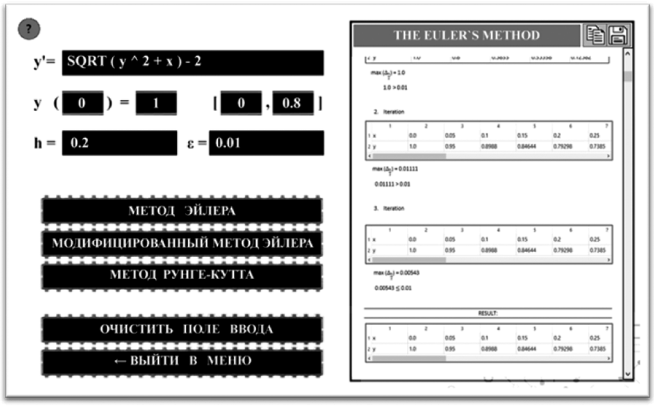

Рис. 5. Результат вычислений методом Эйлера

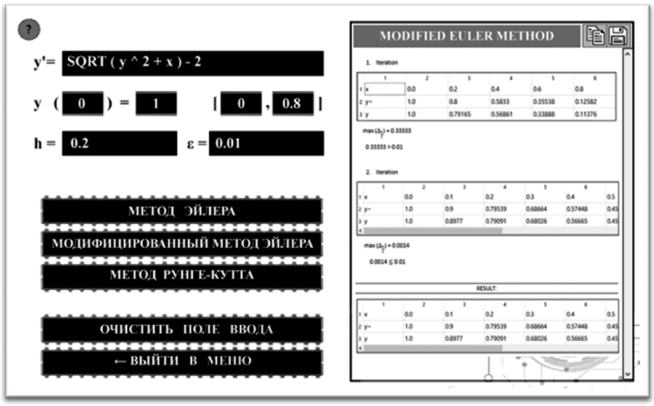

Рис. 6. Результат вычислений модифицированным методом Эйлера

Для практической оценки погрешности решения дифференциального уравнения проводят вычисления с шагами *h* и $\frac{h}{2}$. За **оценку погрешности решения**, полученного с шагом $\frac{h}{2}$, принимают величину:

$$\Delta_{\frac{h}{2}} = \max_i \frac{\left|y_i^h - y_{2i}^h\right|}{2^p - 1},$$

где *p* — порядок точности =

$$= \begin{cases} 1, \text{метод Эйлера} \\ 2, \text{модифицированный метод Эйлера} \\ 4, \text{метод Рунге — Кутта} \end{cases}$$

Для достижения заданной точности вычисления повторяют, последовательно уменьшая шаг. Процесс вычислений заканчивается, когда для очередного значения $\frac{h}{2}$ выполняется условие:

$\Delta_{\frac{h}{2}} \leq \varepsilon$, где ε — заданная точность

На рисунке 6 показан результат работы программы при выборе **модифицированного метода Эйлера**:

2. Метод Рунге-Кутта

Метод Рунге-Кутта требует большего объема вычислений по сравнению с методом Эйлера. Тем не менее данный метод позволяет делать вычисления с повышенной точностью, что дает возможность проводить счет с большим шагом. Другими словами, для получения результатов с одинаковой точностью в методе Эйлера потребуется значительно меньший шаг, чем в методе Рунге-Кутта.

Метод Эйлера является частным случаем методов первого и второго порядков, относящихся к классу методов Рунге-Кутта. Эти методы применяют для вычисления значения y_{i+1}, ($i = 0, 1, \ldots$) через y_i и $f(x, y)$, определенных при некоторых специальным образом выбираемых значениях $x \in [x_i, x_{i+1}]$ и $y(x)$. На их основе могут быть построены разностные схемы разного порядка точности. Одним из наиболее часто используемых методов является **метод Рунге-Кутта четвертого порядка**. Алгоритм метода записывается в виде:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3),$$

$$k_0 = hf(x_i, y_i),$$

$$k_1 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2}\right),$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right).$$

$$k_3 = hf(x_i + h, y_i + k_2).$$

Данный метод требует на каждом шаге четырёхкратного вычисления правой части $f(x, y)$ уравнения (1). Суммарная погрешность этого метода есть величина $O(h^4)$. Дополнительного повышения точности расчетов можно добиться, повысив порядок метода за счет увеличения количества операций на один шаг разностной сетки.

В случае длительных расчетов, требующих большого количества вычислений, можно сократить время расчета за счет использования переменного шага разностной сетки h. При использовании переменного шага в расчетах контролируется разность между соседними значениями сеточной функции $\Delta = (y_i - y_{i+1})$. В случае превышения Δ заданной погрешности ε шаг сетки уменьшается в два раза, при малых значениях Δ шаг увеличивается в два раза. Условия автоматического выбора шага сетки представлены следующими уравнениями:

$$h_{i+1} = \begin{cases} 2 \cdot h_i, \Delta \leq \frac{5}{32}\varepsilon \\ 0{,}5 \cdot h_i, \Delta \geq 5\varepsilon \\ h_i \frac{5}{32}\varepsilon < \Delta < \varepsilon \cdot 5 \end{cases}$$

Эти условия позволяют значительно сократить время расчёта задачи, сохранив при этом точность решения.

На рисунке 7 показан результат работы программы при выборе **метода Рунге-Кутта**:

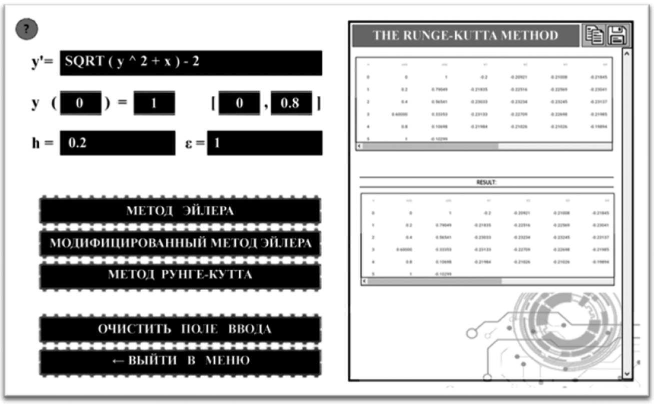

Рис. 7. Результат вычислений методом Рунге-Кутта

На рисунке 8 показан результат сохранения в файл вычислений методом Рунге-Кутта:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	--								
2			THE RUNGE-KUTTA METHOD						
3	--								
4									
5	n	x{n}	y{n}	k1	k2	k3	k4	y{n+1}	
6	0	0	1,00000	-0,20000	-0.20921	-0.21008	-0.21845	0.79049	
7	1	0.2	0,79049	-0,21835	-0.22516	-0.22569	-0.23041	0.56541	
8	2	0.4	0,56541	-0,23033	-0.23234	-0.23245	-0.23137	0.33353	
9	3	0.6	0,33353	-0,23133	-0.22709	-0.22698	-0.21985	0.10698	
10	4	0.8	0,10698	-0,21984	-0.21026	-0.21026	-0.19894	-0.10299	
11	5	1	-0,10299						
12									
13									
14		y	-0,10299						
15									
16									

Рис. 8. Сохранение в файл

Подводя итоги, можно сказать, что была разработана и реализована программа, написанная на языке программирования Python, представляющая собой калькулятор для вычисления ОДУ тремя различными методами. Таким образом, все поставленные задачи решены, и цель работы достигнута.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эрик Мэтиз. Изучаем Python. Программирование игр, визуализация данных, веб-приложения. Электронное издание.
2. Н.В. Гредасова, М.А. Корешникова. Линейная алгебра. Электронное издание.
3. Георгиева М. А., Георгиева И.А., Арванова С.М., Чочиева А.М., Лосанов Х.Х., Тлепшева Д.А. Обучающая система на основе чат-бота // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и Технические Науки. — 2022. — № 08. — С. 68–73
4. Георгиева М.А., Езаова А.Г., Блиева О.З., Арванова С.М., Георгиева И.А., Хамдохова Х.Р. Разработка калькулятора для систем ОДУ 1-го порядка // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и Технические Науки. — 2022. — №03/2. — С. 39–44
5. Георгиева М.А., Ксенофонтов А.С., Блиева О.З., Дзамихова Ф.Х., Езаова Б.З., Тлепшева Д.А. Разработка калькулятора для решения систем линейных алгебраических уравнений // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и Технические Науки. — 2023. — №01. — С. 68–76

© Георгиева Марьяна Альбековна (maryana.g@list.ru); Георгиева Ирина Альбековна (irka2725@mail.ru); Блиева Оксана Зауровна (roksy_85@mail.ru); Арванова Саният Мухамедовна (sani_07@mail.ru); Езаова Бэлла Заурбиевна (alena_ezaova@mail.ru); Тлепшева Диана Ануаровна (tliepshieva@list.ru)

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»