ОБ ЭРГОДИЧНОСТИ В МОДЕЛИРОВАНИИ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ КРУПНОГО ГОРОДА

Мациевский Сергей Валентинович
К.ф.-м.н., доцент, Балтийский федеральный университет им. И. Канта (Калининград)
sergei.matsievsky@ya.ru
Дроздецкий Семен Андреевич
Аспирант, Балтийский федеральный университет им. И. Канта (Калининград)
Тарновский Павел Владимирович
Аспирант, Балтийский федеральный университет им. И. Канта (Калининград)
Юрков Павел Сергеевич
Аспирант, Балтийский федеральный университет им. И. Канта (Калининград)
Музычин Владимир Витальевич
Аспирант, Балтийский федеральный университет им. И. Канта (Калининград)
Дубинин Иван Витальевич
Аспирант, Балтийский федеральный университет им. И. Канта (Калининград)

Аннотация. Обосновывается использование эргодичности при моделировании транспортных потоков. Рассматриваются термины, составляющие понятие эргодичности. Обсуждается эргодическая теорема как обоснование статистических свойств группы преобразований измеримого пространства. Обсуждается парадокс Цермело. Приводится доказательство теоремы Пуанкаре о возвращении. Обосновывается использование численных методов минимизации выпуклой функции.

Ключевые слова: моделирование, транспортные потоки, эргодичность, эргодическая теорема, теорема Пуанкаре о возвращении, парадокс Цермело, минимизация выпуклой функции.

ABOUT ERGODICITY FOR SIMULATION OF TRAFFIC FLOWS OF A LARGE CITY

S. Matsievsky
S. Drozdetsky
P. Tarnovsky
P. Yurkov
V. Muzychin
I. Dubinin

Summary. Use of ergodicity for traffic flow simulation is proved. The terms of a concept of ergodicity are considered. Ergodic Theorem as justification of statistical properties of a measurable space group action is discussed. Zermelo paradox is discussed. A proof of Poincare recurrence theorem is provided. Use of numerical methods of convex function minimization is proved.

Keywords: simulation, traffic flow, ergodicity, Ergodic Theorem, Poincare recurrence theorem, Zermelo paradox, convex function minimization.

Ведение

В математическом моделировании транспортных потоков важную роль играют эргодические приложения. Сразу заметим, что при моделировании «фазовых переходов» нельзя пользоваться моделями, использующими эргодичность, поскольку инвариантная мера транспортных потоков не единственна.

Тем не менее эргодичность при моделировании транспортных потоков важна, поскольку основная проблема — не нехватка вычислительных ресурсов, а существенная зависимость действующей транспортной системы от начальных данных (например, таких, как параметры стоков и источников транспорта), а также хроническая неполнота реальных данных. Один из способов, позволяющих ликвидировать такое состояния неопределенности — моделирование усредненных показателей, подобных теории систем массового обслуживания. Оказывается, что обгоны транспорта, его очереди и так далее описывается соответствующим образом. А именно, на основе эргодических процессов, когда моделируется усредненный тренд и не учитываются высокочастотные случайные колебания.

В статье исследуется понятие эргодичности, которое на сегодняшний день является достаточно запутанным, а приложения основных теорем к реальным процессам — достаточно сомнительными.

1. Постановка задачи

1.1. Определение статистического свойства. Вслед за Я. Г. Синай [1–3] будем считать, что основные задачи эргодической теории заключаются в изучении статистических свойств групп (полугрупп) движений неслучайных объектов. Это самая общая постановка. Разберем составляющие ее термины.

Определения *статистического свойства* мы не нашли. С другой стороны, этот термин достаточно очевиден, хотя, может быть, лучше использовать термин *вероятностное свойство*. Будем отталкиваться от понятия *статистика*.

Определения математической статистики в русскоязычной научной традиции так или иначе исходят из определения советской математической энциклопедии (была переведена на английский язык). *Математическая статистика* — это раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и использования статистических данных для научных и практических выводов. При этом *статистическими данными* называются сведения о числе объектов в какой-либо более или менее обширной совокупности, обладающих теми или иными признаками [4–5]. Имеем правильное и неконкретное определение, слишком абстрактное.

Англоязычное определение математической статистики правильное и конкретное, складывается более понятная картина. *Математическая статистика* — это применение теории вероятностей, отрасли математики, к *статистике*, в отличие от методов сбора статистических данных. Конкретные математические методы, которые используются для этого, включают математический анализ, линейную алгебру, стохастический анализ, дифференциальные уравнения и теорию меры [6].

Нужный нам термин «статистика» в математической энциклопедии не описан. Воспользуемся Википедией. *Статистика* — это отрасль знаний, наука, в которой излагаются общие вопросы сбора, измерения, мониторинга и анализа массовых статистических (количественных или качественных) данных; изучение количественной стороны массовых общественных явлений в числовой форме [7]. Вот вероятностный анализ данных в статистике и есть математическая статистика.

Таким образом, получается, что в нашем случае *статистическое свойство* — это свойство объекта, выраженное в терминах математическое статистики.

Синоним статистического свойства — *случайное свойство* — лучше не использовать, поскольку это также и философское понятие [8].

1.2. Определение группы (полугруппы) движений. Снова воспользуемся математической энциклопедией. *Группа движений* — непрерывная группа преобразований пространства, элементами которой являются движения этого пространства, а групповой операцией — последовательное выполнение в указанном порядке двух движений [9–10].

Непрерывная, или топологическая, группа — это группа, которая одновременно является топологическим пространством, причем умножение элементов группы и операция взятия обратного элемента непрерывны в используемой топологии [11].

Группа — это множество с одной бинарной операцией, удовлетворяющей следующим аксиомам: 1) операция ассоциативна; 2) операция гарантирует единицу; 3) операция гарантирует обратные элементы [12].

Понятия полугруппы движений мы не нашли. Будем считать, что *полугруппа движений* — это группа движений, где понятие группы заменено на полугруппу. *Полугруппа* — это множество с одной бинарной операцией, удовлетворяющей только одной аксиоме: операция ассоциативна [13].

Топологическое пространство — множество с дополнительной структурой определенного типа (так называемой топологией) [14]. *Топология* — **система** подмножеств некоторого множества при выполнении трех аксиом: 1) **система** замкнута относительно операции бесконечного объединения; 2) **система** замкнута относительно операции конечного пересечения; 3) исходное и пустое множества входят в **систему** [14].

1.3. Определение сигма-алгебры. А теперь объединим термины вместе и рассмотрим понятие статистического свойства группы движений. Для простоты и наглядности перейдем к частному случаю группы движений как топологическому пространству. А именно, введем следующие обозначения.

Исходное топологическое пространство обозначим буквой M. Будем рассматривать только частный случай топологического пространства — *измеримое пространство*, т.е. в нем должна быть выделена естественная *мера* μ, т.е. σ-алгебра $\mathcal{M}$ его подмножеств. Во всех конкретных случаях выделение этой σ-алгебры не вызывает трудностей.

σ-алгебра — это **система** $\mathcal{M}$ подмножеств $A \in M$ некоторого множества M при выполнении трех аксиом: 1) **система** замкнута относительно операции счетного объединения; 2) **система** замкнута относительно операции дополнения; 3) исходное множество входит в **систему** [15]. Следовательно, **система** замкнута относительно операции счетного пересечения, поскольку

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = M \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (M \setminus A_n) \right).$$

Отсюда видно, что *σ-алгебра* — это частный случай топологического пространства, замкнутый относительно операции дополнения. Частный случай потому, что требуется замкнутость относительно операции всего лишь счетного объединения.

1.4. Определение группы с измеримым преобразованием. Допустим, что имеется некоторая группа (полугруппа) G с элементами g. Для каждого элемента $g \in G$ определим преобразование Tg: $M \to M$ с двумя аксиомами:

(i) *Tg сохраняет измеримость*, т.е. *Tg измеримо*: если $A \in \mathcal{M}$, то и $T_g^{-1}A \in \mathcal{M}$ (здесь $T_g^{-1}A = \{x \in M : T_g x \in A\}$ — *полный прообраз A*);

(ii) *Tg сохраняет групповую операцию*: $T_{g_1} \circ T_{g_2} = T_{g_1 g_2}$.

Из (ii) следует, что в случае, когда G есть группа, а не только подгруппа, каждое Tg обратимо и $(T_g)^{-1} = T_{g^{-1}}$.

Приведем два примера.

Пример 1. $G = \{1, 2, \ldots\} =$ ¢+,

$$T_n = \underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ T}_{n \text{ раз}} = T_n,$$

где T — некоторый *эндоморфизм* пространства M, т.е. однозначное (но не обязательно взаимно однозначное) преобразование M.

G — полугруппа относительно сложения, поскольку $\mathbb{Z}^+$ замкнуто относительно сложения: если $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^+$, то и $n_1 n_2 = n_1 + n_2 \in \mathbb{Z}^+$; и операция сложения ассоциативна. G не группа, поскольку нет единицы группы (нуль) и нет обратных элементов (отрицательные числа). В качестве T можно взять $T(k) = k + 1$ или $T(k) = 1$, $k \in \mathbb{Z}^+$.

Например, если $T(k) = k + 1$, то $T_n(k) = k + n$, и тогда

$$T_{n_1} \circ T_{n_2}(k) = T_{n_1}(k + n_2) = k + n_2 + n_1 =$$

$$= k + n_1 + n_2 = T_{n_1 n_2}(k).$$

Пример 2. $G = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\} = \mathbb{Z}$,

$$T_n = \underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ T}_{n \text{ раз}} = T_n,$$

где T — некоторый *автоморфизм* пространства M, т.е. взаимно однозначное преобразование пространства M. В качестве T можно взять $T(n) = n + 1$ или $T(n) = -n$.

Можно рассматривать и более общий случай, когда G — произвольная счетная коммутативная группа (полугруппа). Но пока ограничимся этими двумя примерами.

1.5. Действие группы случайно. Рассмотрим чрезвычайно важную и довольно общую проблему: *что значит, что действие группы G обладает случайными (или статистическими) свойствами?*

Отметим, что предлагаемая далее схема не является максимально общей. Например, в нее не укладываются применения эргодической теории к теории алгебраических полей, о которых идет речь в книге [16].

2. Существование конечной меры μ, инвариантной относительно G

2.1. Инвариантная мера. В нашем случае, который был описан выше в первом разделе, *инвариантность меры* μ относительно действия группы G означает, что для любого множества $A \in \mathcal{M}$ и для любого элемента $g \in G$ преобразование T не только измеримо, но и, кроме того,

$$\mu(A) = \mu(T_g^{-1}A).$$

Не ограничивая общность, можно считать, что $\mu(M) = 1$ (этого всегда можно добиться нормировкой). Это позволяет использовать вероятностную терминологию, интерпретируя μ как *вероятность*, интеграл по мере μ — как *математическое ожидание* и т.д.

Так как наше множество M есть измеримое пространство, то можно рассмотреть измеримые функции (*случайные величины*) $f(x)$, $x \in M$, и *сопряженную*, т.е. действующую на функции $f(x)$, группу (полугруппу) преобразований $\{U_g\}$ (для каждого $g \in G$ она своя):

$$U_g: f(x) \to f(T_g x).$$

Утверждение 1. *Инвариантность меры μ эквивалентна следующему соотношению:*

$$\int f(x)d\mu(x) = \int f(T_g x)d\mu(x) \equiv \int (U_g f)(x)d\mu(x),$$

которое должно выполняться для любого $g \in G$.

Доказательство. В силу линейности математического ожидания (интеграла) достаточно проверить утверждение теоремы для индикаторов измеримых множеств $A \in \mathcal{M}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in A, \\ 0, \text{ если } x \notin A. \end{cases}$$

Подставляя $f(x) = \chi A(x)$ в утверждение теоремы, получаем:

$$\int_M \chi_A(x)d\mu(x) = \mu(A),$$

$$\int_M \chi_A(T_g x)d\mu(x) = \int_M \chi_{T_g^{-1}A}(x)d\mu(x) = \mu(T_g^{-1}A),$$

и, таким образом, утверждение теоремы сводится к определению инвариантности $\mu(A) = \mu(T_g^{-1}A)$. □

В том случае, если G — группа, то $T_g^{-1} = T_{g^{-1}}$ и, значит,

$$\mu(T_g^{-1}A) = \mu(A) = \mu(T_{g^{-1}}^{-1}A) = \mu(T_g A)$$

для любого $g \in G$, т.е. мера любого измеримого множества равна и мере образа, и мере прообраза этого множества.

2.2. Эргодическая теорема. Следующая теорема показывает, почему наличие инвариантной меры можно отнести к статистическим свойствам действия преобразований $\{Tg\}$. В ее формулировке подразумевается, что G — либо $\mathbb{Z}^+$, либо $\mathbb{Z}$, хотя можно рассматривать и более общую ситуацию.

Теорема 1 (эргодическая теорема Биркгофа — Хинчина). *Пусть мера* μ *инвариантна относительно G и* $f(x) \in L^1(M, \mu)$. *Тогда с вероятностью 1 (т.е. для почти всех x по мере* μ*) существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (U^k f)(x) = \hat{f}(x).$$

При этом с вероятностью 1

$$\hat{f}(Tx) = \hat{f}(x) \text{ и } \int_M f(x)d\mu(x) = \int_M \hat{f}(x)d\mu(x).$$

В случае, когда G — группа,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^{-k} x).$$

с вероятностью 1.

В теории вероятностей подобные утверждения называются *законами больших чисел*; т.к. здесь идет речь о сходимости, то эргодическая теорема Биркгофа — Хинчина есть теорема типа *усиленного закона больших чисел*. Доказательство этой теоремы имеется в [17].

Очень часто, в особенности в физической литературе, недостаточно подчеркивается, что эргодическая теорема Биркгофа — Хинчина верна лишь почти всюду. Точки x, для которых она выполняется в случае «хороших» функций, естественно назвать *типичными*. В реальных ситуациях могут встречаться нетипичные точки, и это зачастую сильно усложняет исследования.

2.3. Теорема Пуанкаре о возвращении. Тот факт, что при наличии инвариантной меры можно проводить усреднение по времени, означает, что система находится в *стационарном*, не меняющемся со временем, режиме. Если система с течением времени выходит на какой-нибудь стационарный режим, то этот режим естественно изучать с помощью той инвариантной меры, которая ему соответствует.

Сейчас мы получим первое, самое простое следствие существования инвариантной меры.

Теорема 2 (теорема Пуанкаре о возвращении). *Пусть в пространстве M действует группа {T*^{s}*} степеней автоморфизма T. Для всякого множества A такого, что* $\mu(A) > 0$*, и для почти каждой точки* $x \in A$ *существует бесконечная возрастающая последовательность номеров nk, при которых* $T^{n_k}x \in A$.

Отметим, что теорема Пуанкаре верна и для непрерывного времени $G = \mathbb{R}^{-1}$; доказательство при этом почти не меняется.

Прежде чем доказывать эту теорему, рассмотрим парадокс Цермело, связанный с теоремой Пуанкаре о возвращении.

2.4. Парадокс Цермело. Рассмотрим газ, находящийся в некотором замкнутом объеме. В классической статистической механике считается, что газ состоит из большого числа молекул, взаимодействующих между собой и движущихся по законам классической механики. Иными словами, такой газ есть гамильтонова система, хотя и с очень большим числом степеней свободы (при нормальных условиях в 1 см^3 находится примерно 1020 молекул). Как мы увидим позже, всякая замкнутая гамильтонова система обладает конечной инвариантной мерой и, стало быть, применима теорема Пуанкаре о возращении. Возьмем в качестве множества A множество тех начальных данных, когда все молекулы находятся в левой половине сосуда. Из вида меры следует, что $\mu(A) > 0$. Но тогда по теореме Пуанкаре о возвращении для почти каждой точки $x \in A$ должны существовать сколь угодно большие моменты времени, когда траектория точки x попадет в множество A и, таким образом, молекулы газа занимают половину отведенного им объема. Однако за всю историю существования человечества не отмечено ни одного такого случая. Этот парадокс называется *парадоксом Цермело* и связан с основаниями статистической механики. Для его разрешения обычно говорят, что циклы Пуанкаре настолько длинные, что превышают все разумные сроки существования галактики и, в частности, наблюдаемого объема газа. С другой стороны, в моделях газа с небольшим числом молекул циклы Пуанкаре можно наблюдать при численном моделировании. Следует заметить, что подобное численное моделирование присутствует только на бумаге, найти реальные примеры не удается. Кроме того, бесполезно изучать реальные физические процессы для подтверждения теоремы: система должна быть не только замкнута, но и не иметь диссипации, что не наблюдается в действительности.

2.5. Доказательство теоремы Пуанкаре. Перейдем к доказательству теоремы Пуанкаре. Обозначим через $A1$ множество тех точек из A, которые возвращаются в A хотя бы один раз:

$$A_1 = \{x \in A: \exists j > 0 \text{ такое, что } T^j x \in A\}.$$

Если мы докажем, что $\mu(A) = \mu(A1)$, то отсюда будет легко следовать утверждение теоремы. В самом деле, тогда для множеств

$$A_k = \{x \in A_{k-1}: \exists j > 0 \text{ такое, что } T^j x \in A_{k-1}\}$$

получаем $\mu(A_k) = \mu(A_{k+1})$, $k \geq 1$. Ясно, что множество

$$A_\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

состоит их тех точек, которые мы ищем. Так как множества A_k монотонно убывают, то $\mu(A_\infty) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(A)$, откуда $\mu(A \backslash A_\infty) = 0$.

Итак, положим

$$B = A \backslash A_1 = \{x \in A: \forall k > 0 \; T^k x \notin A_1\}$$

и покажем, что $\mu(B) = 0$. Заметим, что $T^{-k}B \cap B = \varnothing$ при всех $k > 0$. Отсюда следует, что множества $\{T^{-k}B, k > 0\}$ попарно не пересекаются, поэтому

$$\mu(\bigcup_k T^{-k}B) = \sum_k \mu(T^{-k}B) \leqslant 1$$

в силу нормированности меры. С другой стороны, поскольку преобразование T сохраняет меру, то

$$\sum_k \mu(T^{-k}B) = \sum_k \mu(B) = \infty,$$

если $\mu(B) > 0$. Следовательно, $\mu(B) = 0$, т.е. $\mu(A) = \mu(A_1)$.□

Заключение

Рассмотрено, каким образом предложенный «геометрический подход», заключающийся в действии некоторой группы на измеримом пространстве, обладает статистическими свойствами. С группой можно связать некоторое измеримое преобразование измеримого пространства, причем это преобразование сохраняет групповую операцию. Это позволяет интерпретировать инвариантную меру как вероятность, а интеграл по мере — как математическое ожидание, измеримые функции тогда становятся случайными величинами.

Таким образом, эргодическая теорема, аналогичная законам больших чисел, позволяет применять при математическом моделировании транспортных потоков некоторый усредненный вероятностный тренд. Основное следствие эргодической теоремы, теорема Пуанкаре о возвращении, позволяет ввести на пространстве макросостояний при моделировании транспортных потоков инвариантную меру, которая является положением равновесия макросистемы. Отсюда получаем простое решение задачи моделирования через соответствующие двойственные переменные. Учитывая тот факт, что количество ограничений существенно меньше прямых переменных, получаем весьма эффективные численные методы, которые основаны на решении следующей стандартной двойственной задачи: минимизации выпуклой функции.

ЛИТЕРАТУРА

3. Синай Я. Г. Введение в эргодическую теорию. Ереван: Изд-во Ереванского университета, 1973.
4. Sinai Ya. G. Introduction to ergodic theory. Translated by V. Scheffer. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1976.
5. Синай Я. Г. Введение в эргодическую теорию. 2-е изд. М.: ФАЗИС, 1996.
6. Математическая статистика // Математическая энциклопедия. Гл. ред. И. М. Виноградов. Т. 3. М.: Советская энциклопедия, 1982. URL: https://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_mathematics/3039/математическая_статистика
7. Mathematical statistics // Encyclopaedia of Mathematics. Ed. by Michiel Hazewinkel. Vol. 6. Amsterdam, Kluwer Academic Publishers, 1990. ISBN1–55608–005–0. URL: https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Mathematical_statistics
8. Mathematical statistics // Wikipedia. The Free Encyclopedia. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_statistics
9. Статистика // Википедия. Свободная энциклопедия. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Статистика
10. Акциденция // Википедия. Свободная энциклопедия. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Акциденция
11. Движений группа // Математическая энциклопедия. Гл. ред. И. М. Виноградов. Т. 2. М.: Советская энциклопедия, 1979. URL: https://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_mathematics/1334/движений_группа
12. Group of motions // Encyclopaedia of Mathematics. Ed. by Michiel Hazewinkel. Vol. 4. Amsterdam, Kluwer Academic Publishers, 1989. ISBN1–55608–003–4. URL: https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Group_of_motions

13. Топологическая группа // Математическая энциклопедия. Гл. ред. И. М. Виноградов. Т. 5. М.: Советская энциклопедия, 1985. URL: https://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_mathematics/5574/топологическая_группа
14. Группа // Там же. Т. 1. М.: Советская энциклопедия, 1977. URL: https://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_mathematics/1286/группа
15. Полугруппа // Там же. Т. 4. М.: Советская энциклопедия, 1984. URL: https://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_mathematics/4145/полугруппа
16. Топологическое пространство // Википедия. Свободная энциклопедия. URL: ttps://ru.wikipedia.org/wiki/Топологическое_пространство
17. Сигма-алгебра // Википедия. Свободная энциклопедия. URL: ttps://ru.wikipedia.org/wiki/Сигма-алгебра
18. Линник Ю. В. Эргодические свойства алгебраических полей. Л.: Изд-во ЛГУ, 1967.
19. Биллингслей П. Эргодическая теория и информация. М.: Мир, 1969.

Балтийский федеральный университет им. И. Канта