ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ МОДЕЛЬЮ ЛОТКИ-ВОЛЬТЕРРЫ

OPTIMAL CONTROL OF DYNAMIC SYSTEMS DESCRIBED BY THE LOTKA-VOLTERRA MODEL

I. Alesova

Summary. A method of the synthesis of the optimal control of dynamic systems described by the Lotka-Volterra model in the neighborhood of a singular point is considered. The class of piecewise constant functions is used as the optimal control resource consumption. The problem of calculation of control stages switching moments is reduced to the problem of mathematical programming with linear functional and two nonlinear equations-restrictions with respect to switching moments of control stages and parameter of a target trajectory. The numerical method of sequential linear programming is used to calculate the switching moments and the reference parameter. Relevant examples of calculations are presented in the tables.

Keywords: optimal control, Lotka-Volterra equation, nonlinear programming.

Алесова Ирина Михайловна
Соискатель, Санкт-Петербургский государственный университет
alesovaim@mail.ru

Аннотация. Рассматривается метод ситеза оптимального управления динамичесими системами, описываемыми моделью Лотки-Вольтерры, в окрестности особой точки. В качестве оптимального по расходу ресурсов управления используется класс кусочно-постоянных функций. Задача расчета моментов переключения ступеней управления сводится к задаче математического программирования с линейным функционалом и двумя нелинейными уравнениями-ограничениями относительно времени переключения ступеней управления и параметра целевой траектории. Для расчета моментов переключения и опорного параметра используется численный метод последовательного линейного программирования. Соответствующие примеры расчетов представлены в таблицах.

Ключевые слова: оптимальное управление, уравнение Лотки-Вольтерры, нелинейное программирование.

Введение

Математическая модель Лотки-Вольтерры широко используется для описания процессов в биотехнических системах, экологии, медицине и других прикладных задачах [1, 2]. Как и многие другие системы, описывающие динамику биотехнических объектов, уравнение Лотки-Вольтерры нелинейно и имеет особые точки, в окрестности которых движение системы носит периодический характер.

В данной работе рассматривается задача оптимального по расходу ресурсов управления динамическими системами, описываемыми уравнением Лотки-Вольтерры, в окрестности особой точки.

Задача оптимального управления по критерию расхода ресурса для линейных динамических систем с постоянными коэффициентами была рассмотрена в монографии Бабаджанянц Л. К. и Потоцкой И. Ю. [3]. Алгоритмы расчета моментов переключения оптимального кусочно-постоянного управления линейной системой относительно равновесного состояния представлены в статье Бабаджанянц Л. К. и Пупышевой Ю.Ю [4]. Данная работа является продолжением выполненных исследований синтеза программного оптимального управления применительно к динамическим системам с периодическими коэффициентами.

Объект исследования и постановка задачи оптимального управления

Нормированная модель Лотки-Вольтерры записывается в виде [5]

$$\frac{dx}{dt} = x - y \cdot x, \quad \frac{dy}{dt} = \gamma \cdot y \cdot (x-1) \qquad (1)$$

где x, y — переменные состояния; t — независимая переменная времени; γ — параметр системы.

Рассматриваемая модель представляет собой систему двух нелинейных уравнений и имеет две особые точки: точка (0, 0) является особой точкой типа «седло», а точка (1, 1) — особой точкой типа «центр».

Уравнение движения системы (1) в приращениях переменных состояния относительно особой точки типа «седло», имеющей практическую значимость, записывается в виде

$$\frac{dx_1}{dt} = -y_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = \gamma \cdot x_1,$$

где x_1, y_1 — конечные приращения переменных состояния.

Таким образом, в окрестности особой точки интегральные кривые замкнуты, а решения являются периодическими и могут быть описаны моделью гармонических колебаний.

При управлении динамической системой требуется перевести систему с исходной траектории на заданную целевую траекторию. Целевая (опорная) траектория $(\bar{x}, \bar{y})$ определяется следующими периодическими функциями:

$$\bar{x}(t) = C \cdot \cos(\omega t + \varphi) + 1,$$

$$\bar{y}(t) = C \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi) + 1 \qquad (2)$$

где C — заданная амплитуда периодического движения; $\omega = \sqrt{\gamma}$ — частота периодического движения; φ — фазовый параметр опорной траектории, значение которого может быть задано или рассчитано из условий оптимизации.

Переменные текущего состояния системы (2) представляются в виде

$$x = \bar{x} + \delta x, \; y = \bar{y} + \delta y,$$

где δx, δy — приращения соответствующих переменных состояния.

Принимая во внимание выражения для искомой траектории (2) и опуская для простоты записи символ «δ», получим следующую систему двух дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами:

$$\frac{dx}{dt} = -x \cdot C \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi) - y \cdot (C \cdot \cos(\omega t + \varphi) + 1),$$
$$\frac{dy}{dt} = \gamma \cdot y \cdot C \cdot \cos(\omega t + \varphi) +$$
$$+ \gamma \cdot x \cdot (C \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi) + 1) - u(t). \qquad (3)$$

Уравнение системы в матричном виде записывается как

$$\frac{dz}{dt} = A(t, \varphi) \cdot z - r_2 \cdot u(\tau), \qquad (4)$$

где $z = (x \;\; y)^T$ — вектор состояния; $r_2 = (0 \;\; 1)^T$ — вектор влияния управления; символ «T» обозначает операцию транспонирования; $u(t)$ — скалярная функция управления;

$\sigma = \dfrac{1}{C}$ — параметр опорной траектории; $A(t, \varphi)$ — матрица системы (3)

$$A(t,\varphi) = C \cdot \begin{bmatrix} -\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi) & -\cos(\omega t + \varphi) - \sigma \\ \gamma \cdot (\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi) + \sigma) & \gamma \cdot \cos(\omega t + \varphi) \end{bmatrix}.$$

Таким образом, модель объекта управления описывается линейной системой дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами (4). Моделирование движения системы (3), (4) показывает, что в достаточно широком диапазоне параметров $\sigma \in (1, 100)$, $\gamma \in (0, 5)$ мультипликаторы системы (4) не превышают по модулю 1 и, следовательно, система является устойчивой, а кроме того, на основании теоремы Флоке ее решения имеют периодический характер.

Синтез оптимального программного управления выполняется исходя из условия минимального расхода ресурсов с учетом ограничения на величину управления:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_e} |\, u(\tau) \,|\, d\tau \to \min, \; |u(t)| \le u_0 \qquad (5)$$

где t_0, t_e – начальный и конечный моменты управления; $u_0 > 0$ — заданное ограничение на величину управляющего воздействия.

Задача оптимального управления формулируется следующим образом: необходимо перевести динамическую систему (4) из исходного состояния к опорной траектории (2) с учетом минимизируемого функционала расхода и ограничения на управление (5).

Для получения необходимых условий задачи функции оптимального управления используется принцип максимума Понтрягина Л. С. Сопряженная система записывается в виде:

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \psi_1 \cdot C \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi) -$$
$$- \psi_2 \cdot \gamma \cdot [C \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi) + 1],$$
$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_2 \cdot \gamma \cdot C \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi) +$$
$$+ \psi_1 \cdot [C \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi) + 1]. \qquad (6)$$

В соответствии с принципом максимума, оптимальное управление имеет кусочно-постоянную форму [6]

$$u(t) = u_0 \cdot \begin{cases} 0, \; если\, |\psi_2| < 1, \\ sign(\psi_2), \; если\, |\psi_2| \ge 1. \end{cases} \qquad (7)$$

Если параметр фазы опорной траектории φ не фиксирован, то необходимые условия принципа максимума содержат дополнительное уравнение [7]

$$\int_{t_0}^{t_e} \psi^T(\tau) \cdot \frac{\partial A(\tau, \varphi)}{\partial \varphi} \cdot z(\tau) \cdot d\tau = 0,$$

где $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T$ — вектор сопряженных функций.

Исходя из свойств объекта управления, можно показать, что задача оптимизации, основанная на необходимых условиях, является нормальной и решения задачи локально единственны.

Метод синтеза программного управления

Оптимальная функция управления для системы дифференциальных уравнений (4) имеет кусочно-постоянную форму (6) с положительными и отрицательными ступенями и может быть записана в виде [8]

$$u(t) = u_0 \cdot \sum_{j=1}^{2\cdot p} (-1)^{j+1} \cdot H(t - t_j) - u_0 \cdot \sum_{j=1}^{2\cdot s} (-1)^{j+1} \cdot H(t - \hat{t}_j), \quad (8)$$

где $H(\tau)$ — функция Хэвисайда; t_j, $\hat{t}_j$ — моменты включения/выключения положительных и отрицательных ступеней управления соответственно; p, s — число положительных и отрицательных ступеней.

Решение системы (4) представляется в виде

$$z(t,\varphi) = Z(t,\varphi) \cdot z_0 + Z(t,\varphi) \cdot \int_0^t Z^{-1}(\tau,\varphi) \cdot r_2 \cdot u(\tau) \cdot d\tau,$$

где $Z(t,\varphi)$ — фундаментальная матрица системы; z_0 — вектор начальных параметров.

Тогда краевые условия изменения состояния в результате применения управления записываются как

$$\int_{t_0}^{t_e} Z^{-1}(\tau,\varphi) \cdot r_2 \cdot u(\tau) \cdot d\tau = z_0 \quad (9)$$

где z_0 — заданные начальные параметры.

Для вычисления обратной фундаментальной матрицы $Z^{-1}(t,\varphi) = \Psi^*(t,\varphi)$ применяется разложение Еругина Н. П. для сопряженной системы [9]. Итерационная процедура расчета записывается следующим образом:

$$\Psi(t,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k(t,\varphi),$$
$$\Psi_k(t,\varphi) = -\int_0^t \left[A^T(\tau,\varphi) \cdot \Psi_{k-1}(\tau,\varphi)\right] \cdot d\tau, \quad (10)$$

где k — номер итерации (k=1,2,…); $\Psi(t,\varphi)$ — фундаментальная матрица сопряженной системы; $\Psi_0(t,\varphi) = I$ — начальное условие; I — единичная матрица.

Итерации выполняются в символьной форме. В работе [10] доказана теорема о том, что такой итерационный процесс (10) бесконечно выполним в элементарных (тригонометрических и степенных) функциях.

В результате, проблема синтеза оптимального управления сводится к задаче нелинейного программирования с неизвестными моментами переключения управления t_j, $\hat{t}_j$ и фазовым параметром φ:

$$J(t_j, \hat{t}_j) = \sum_{j=1}^{2\cdot p} (-1)^j \cdot t_j - \sum_{j=1}^{2\cdot s} (-1)^j \cdot \hat{t}_j \to \min,$$

$$R(t_j, \hat{t}_j, \varphi) = \sum_{j=1}^{2\cdot p} (-1)^j \cdot g(t_j,\varphi) - \sum_{j=1}^{2\cdot s} (-1)^j \cdot g(\hat{t}_j,\varphi) = \frac{z_0}{u_0}, \quad (11)$$

где функция $g(t,\varphi) = \int_0^t Z^{-1}(\tau,\varphi) \cdot r_2 \cdot u(\tau) \cdot d\tau$.

Задача оптимизации содержит линейный минимизируемый функционал и два ограничения-равенства, обладающие свойством сепарабельности относительно моментов переключения ступеней управления t_j, $\hat{t}_j$.

Для решения оптимизационной задачи (11) был использован метод последовательного линейного программирования (SLP) [11]. На каждом шаге итерации минимизируемый функционал и граничные условия (11) представляются их линейными приближениями $(\Delta t_j, \Delta\hat{t}_j, \Delta\varphi)$ относительно приращений для известных значений времени переключения и опорного параметра на предыдущей итерации $(\bar{t}_j, \bar{\hat{t}}_j, \bar{\varphi})$. В результате, решается следующая задача линейного программирования

$$\sum_{j=1}^{2\cdot p} (-1)^{j+1} \cdot \Delta t_j + \sum_{j=1}^{2\cdot s} (-1)^{j+1} \cdot \Delta\hat{t}_j \to \min, \quad (12)$$

с дополнительными адаптивными ограничениями

$$\Delta t_{j,d} \le \Delta t_j \le \Delta t_{j,u},\ \Delta\hat{t}_{j,d} \le \Delta\hat{t}_j \le \Delta\hat{t}_{j,u}, \Delta\varphi_d \le \Delta\varphi \le \Delta\varphi_u,$$

где $g'_{\bar{\varphi}}(\bar{\hat{t}}_j, \bar{\varphi}) = \int_0^{\bar{t}_j} \frac{\partial Z^{-1}(\tau,\varphi)}{\partial\varphi} \cdot r_2 \cdot d\tau$.

Если значение фазового параметра φ фиксировано, то оно исключается из множества неизвестных вместе с соответствующими уравнениями метода.

Примеры расчета

Рассматривается управление динамической системой (1) со следующими параметрами модели, опорной траектории и границ управления: γ = 1, C = 0.2, u_0 = 0.1. При заданных начальных условиях выполнен расчет оптимального управления, удовлетворяющего критерию качества и ограничению (5).

В первом случае решается задача при фиксированном опорном параметре φ = 0, т.е. задача приведения системы к фиксированной точке траектории, соответствующей начальным параметрам (задача «встречи на орбите»). Во втором случае рассчитывается значение параметра φ, когда решается задача оптимального приведения системы к «ближайшей» точке опорной траектории.

Таблица 1. Начальные условия и структура управления

Номер расчета	Начальные условия	Структура управления
1	$x(0)=1.1;\ y(0)=0.8$	2 ступени: отрицательная (неполная), положительная
2	$x(0)=1.5;\ y(0)=1.0$	2 ступени: положительная, отрицательная
3	$x(0)=1.3;\ y(0)=1.0$	1 положительная ступень
4	$x(0)=0.9;\ y(0)=1.0$	1 положительная ступень

Таблица 2. Моменты и фазовые параметры

Номер расчета	Ступень 1		Ступень 2		φ
	t_1	t_2	t_3	t_4	
1	0*	0.5678	2.752	4.317	0*
2	0.9024	1.962	3.831	5.576	0*
3	0.948	1.990	–	–	0.05
4	1.088	2.141	–	–	3.28

Примечание * Значения фиксированы.

Рассматривается управление системой для различного количества ступеней управления. Начальные условия и структура управления (количество переключений и последовательность ступеней) представлены в таблице 1. Начальные условия приведены для расчета относительно начальной точки опорной траектории с координатами (1.2, 0).

Числовые значения моментов переключения и опорного параметра, полученные в результате расчетов, представлены в таблице 2.

Заключение

В данной работе решается задача синтеза оптимального управления динамическими системами, описываемыми уравнением Лотки-Вольтерры. Целью искомого управления является приведение динамической системы к замкнутой периодической фазовой траектории с учетом ограничения на управление и обеспечения минимума расхода ресурса.

На основании необходимых условий показано, что задача нормальна и управление имеет кусочно-постоянную форму. Проблема сводится к задаче математического программирования с линейным минимизируемым функционалом и нелинейными ограничениями-равенствами, сепарабельными относительно моментов переключения ступеней управления. В качестве численного метода расчета неизвестных использован метод последовательного линейного программирования (SLP).

Представлены численные примеры расчета моментов переключения ступеней оптимального управления для двух случаев: с фиксированным параметром опорной траектории и рассчитываемым в процессе синтеза управления.

Рассмотренный метод может быть обобщен для синтеза оптимального программного управления нелинейными динамическими системами в окрестности особых точек типа «центр» и «фокус» (устойчивый и неустойчивый).

ЛИТЕРАТУРА

1. Макаренко С. И. Модели воздействия средств радиоэлектронной борьбы на систему связи на основе методов популяционной динамики // Вестн. Воронежск. гос. тех. университета, 2011, т. 7, № 1, с. 96–99.
2. Огурцова Т.А., Перова С. А. Модель Лотки-Вольтерра в задаче оптимизации прибыли двух конкурирующих фирм // Инновационная наука, 2015, № 12–2, с. 113–116.
3. Бабаджанянц Л.К., Потоцкая И. Ю. Управление по критерию расхода в механических системах.— СПб.: С.-Петерб. гос. ун-т, 2003, 137с.
4. Бабаджанянц Л.К., Пупышева Ю. Ю. Управление вращением спутника на круговой орбите. // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Труды X Международной Четаевской конференции, т. 3, ч. 1, Казань, 2012, с. 169–182.

5. Трубецков Д. И. Феномен математической модели Лотки-Вольтерры. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика, т. 19, 2011, № 2, с. 69–88.
6. L.K. Babadzanjanz, I. Yu. Pototskaya, I. M. Alesova and A. T. Saakyan, "Control of Satellite Oscillations with Considering the Changes in the Aerodynamic Moment", 2017 International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, Thessaloniki, 2017.
7. L.S. Pontryagin. Selected works (volume 4): The Mathematical Theory of Optimal Processes. Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1986.
8. L.K. Babadzanjanz, I. Yu. Pototskaya, I. M. Alesova and A. T. Saakyan, "Fuel Optimal Control of Non-Linear Oscillations of a Satellite on Elliptical Orbit", 2016 International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiys Conference), Moscow, 2016, edited by V. N. Tkhai (Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., NJ, 2016), 7541157.
9. Еругин Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами.— Минск: Изд. АН БССР, 1963, 272 с.
10. G.M. Armando Neves. Symbolic Computation of High-Order Exact Picard Iterates for Systems of Linear Differential Equations with Time-Periodic Coefficients// ICCS, 2003.
11. T.F. Edgar, D. M. Himmelblau and L. S. Lasdon, Optimization of Chemical Processes. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 2nd ed., New York, 2001.

Санкт-Петербургский государственный университет