ОБЩИЙ СЛУЧАЙ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В ЗАШУМЛЕННЫХ СИГНАЛАХ

Кротов Александр Васильевич
К.т.н., доцент, РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина
a.krotov@sovtigaz.ru

Аннотация. Рассмотрен общий случай дифференцирования зашумленных гауссовских стационарных сигналов, близкий по своим характеристикам к оптимальному в среднеквадратическом смысле дифференциатору. Представлена схема реализации дифференциатора на основе систем с переменной структурой.

Ключевые слова: дифференцирование, оптимальный, система с переменной структурой.

THE GENERAL CASE OF SOLVING THE PROBLEM OF DIFFERENTIATION OF NOISY SIGNALS

A. Krotov

Summary. The general case of differentiation of noisy Gaussian stationary signals close in its characteristics to the optimal differentiator in the mean square sense is considered. The scheme of realization of the differentiator on the basis of systems with variable structure is presented.

Keywords: differentiation, optimal, system with variable structure.

Решение задачи идентификации параметров математических моделей технологических объектов в ряде случаев связано с определением производных первого и второго порядка от переходных характеристик, полученных в результате прямых измерений контролируемых технологических параметров. Однако поиск производных затруднен наличием в измеряемых сигналов шумов.

В статье предлагается близкий к оптимальному в среднеквадратическом смысле метод решения задач дифференцирования гауссовских стационарных сигналов. Задача решается с помощью нелинейных динамических систем, а методом исследования этих систем является метод статистической линеаризации.

Постановка задачи дифференцирования.

Будем рассматривать сигнал следующего вида:

$$y(t) = x(t) + \xi(t) \quad (1)$$

где: $x(t)$ — полезный стационарный гауссовский сигнал, $\xi(t)$ — некоррелированная с $x(t)$ стационарная гауссовская помеха.

При этом будем считать, что спектральные плотности полезного сигнала и помехи известны с точностью до уровня, то есть спектральная плотность полезного сигнала:

$$f_x(Q,\omega) = \frac{Q\cdot\left(\sum_{j=1}^{m-p} b_j\cdot\omega^{2\cdot j}+1\right)}{\sum_{j=1}^{n} a_j\cdot\omega^{2\cdot j}+1} \quad (2)$$

где: $m < n$, $m - p > 0$, m, n, p, b_j, a_j, — известные параметры, $Q > 0$ — неизвестный параметр.

Спектральная плотность помехи:

$$f_\xi(R,\omega) = \frac{R\cdot\sum_{l=1}^{e} b_l\cdot\omega^{2\cdot l}}{\sum_{l=1}^{d} a_l\cdot\omega^{2\cdot l}+1} \quad (3)$$

где: $d \le n$, e, d, a_l, b_l — известные параметры, $R > 0$ — неизвестный параметр.

В работе [1] показано, что передаточная функция оптимального с точки зрения минимума среднеквадратической ошибки фильтра определяется соотношением:

$$W_o\left(\frac{Q}{R}, i\omega\right) = \frac{\sum_{j=0}^{n} k_j\left(\frac{Q}{R}\right)\cdot(i\omega)^j}{\sum_{j=0}^{n-1} \dot{k}_j\left(\frac{Q}{R}\right)\cdot(i\omega)^j+(i\omega)^n} \quad (4)$$

где: k_j, $\dot{k}_j$ — параметры передаточной функции

$W_o\left(\frac{Q}{R}, i\omega\right)$,

являются непрерывной функцией отношения Q/R.

Оптимальный фильтр (4) реализуется по схеме, приведенной на рис. 1.

Передаточная функция оптимального дифференциатора (4) используется для синтеза нелинейного дифференциатора переменной структуры, эквивалентная передаточная функция которого будет близка к передаточной функции оптимального дифференциатора при любых значениях отношения Q/R. Близость этих передаточных функций при произвольных Q/R будет гаранти-

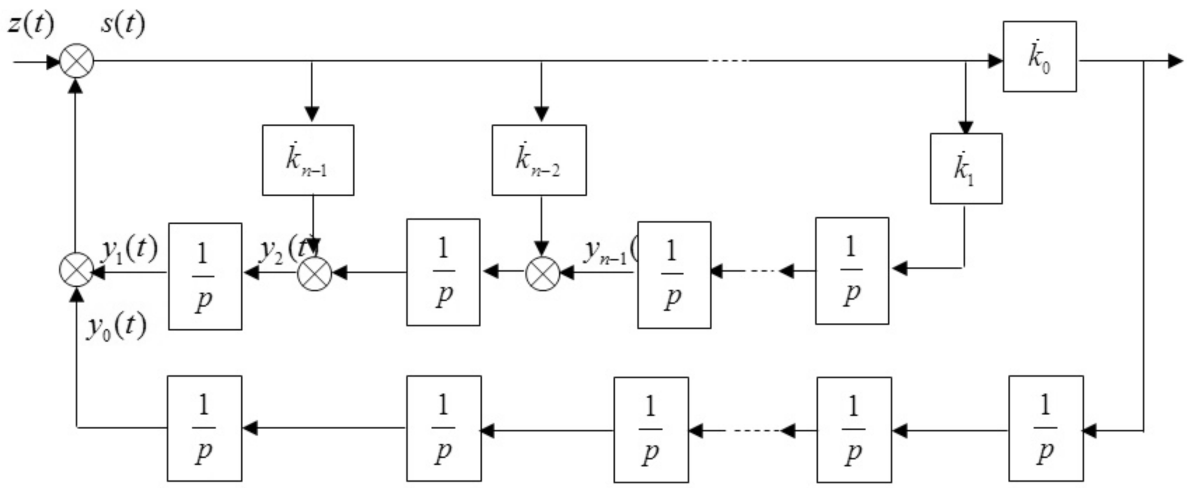

Рис. 1. Схема оптимального фильтра.

ровать высокое качество дифференцирования нелинейного дифференциатора.

Нелинейные близкие к оптимальным дифференциаторы синтезируем с помощью переключающих элементов систем с переменной структурой вида:

$$u_a(t) = \begin{cases} u_a^*(t), \text{при } s(t) > 0 \\ -u_a^*(t), \text{при } s(t) < 0 \end{cases} \tag{5}$$

где $u_a^*(t)$ — некоторая неотрицательная функция, имеющая вид:

$$u_a^*(t) = k_{ga} \cdot |g(t)|^a \cdot |s(t)|^{1-a}$$

где $g(t)$ — линейное преобразование $y(t)$.

$s(t)$ — сигнал ошибки оптимального фильтра, связан с $y(t)$ передаточной функцией:

$$W_{ys}(i\omega) = \frac{(i\omega)^n}{\sum_{j=0}^{n-1} k_j\left(\frac{Q}{R}\right)\cdot(i\omega)^j + (i\omega)^n} \tag{6}$$

Переключающий элемент с логикой (5), (6) будем называть Ψ_s^a-элементом.

Найдем эквивалентный коэффициент передачи Ψ_s^a-элемента, обеспечивающий минимальную среднеквадратическую ошибку:

$$\sigma^2 = M\{[u'(t) - u_a(t)]^2\} = min \tag{7}$$

Где^

$$u'(t) = k_{\Psi_s^a} \cdot s(t) \tag{8}$$

Выражение (7) справедливо в предположении, что $q(t)$ и $s(t)$ имеют нулевые математические ожидания. Минимум выражения (2.13) ищется из условий:

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial k_{\Psi_s^a}} = \frac{\partial M\{[u'(t) - u_a(t)]^2\}}{\partial k_{\Psi_s^a}} = 0 \tag{9}$$

После дифференцирования (9) получаем:

$$k_{\Psi_s^a} = \frac{M\{u_a(t) \cdot s(t)\}}{M\{s^2(t)\}} \tag{10}$$

Считая, что $g(t)$ и $s(t)$ — независимые гауссовские сигналы, получим выражение для $k_{\Psi_s^a}$:

$$k_{\Psi_s^a} = \frac{k_{ga} \cdot \sigma_g^a}{\pi \cdot \sigma_s^a} \cdot \Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3-a}{2}\right) \tag{11}$$

Из (11) видно, что эквивалентный коэффициент передачи $k_{\Psi_s^a}$ зависит от отношения дисперсий, характеризующих сигналы $g(t)$ и $s(t)$.

Отмеченные свойства оптимального дифференциатора и найденный эквивалентный коэффициент передачи $k_{\Psi_s^a}$ (11) Ψ_s^a-элемента дают возможность синтезировать нелинейный дифференциатор, эквивалентная передаточная функция которого близка при произвольных отношениях Q/R к передаточной функции оптимального дифференциатора, что гарантирует его устойчивость.

Для этого достаточно, чтобы знаменатель эквивалентной передаточной функции дифференциатора при произвольных отношениях Q/R был близок к передаточной функции оптимального дифференциатора. В этом случае устойчивость искомого дифференциатора будет обеспечена автоматически, так как оптимальный дифференциатор, рассчитанный из условия минимума среднеквадратической ошибки, всегда устойчив.

Добиться близости знаменателей эквивалентной передаточной функции нелинейного дифференциатора и

$W_o\left(\frac{Q}{R}, i\omega\right)$ (4)

можно, заменив элементы $\dot{k}_j$ (j=1,…, n) Ψ_s^a-элементами так, чтобы их эквивалентные коэффициенты передачи при любом значении отношения Q/R были сколь угодно близки к

$\dot{k}_j\left(\frac{Q}{R}\right)$.

Для проведения такой замены необходимо установить связь между эквивалентным коэффициентом передачи $k_{\Psi_s^a}$ (11) и отношением Q/R.

Пусть одним из входных сигналов Ψ_s^a-элемента является сигнал $s(t)$, дисперсия которого определяется помехой:

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R\cdot\sum_{l=1}^{e} b_l\cdot\omega^{2l}}{\sum_{l=1}^{d} a_l\cdot\omega^{2l+1}}d\omega = R\cdot A \quad (12)$$

В качестве второго сигнала Ψ_s^a-элемента, возьмем выходной сигнал $g(t)$ низкочастотного линейного фильтра с передаточной функцией $W_{yg}(i\omega)$, на входе которого действует наблюдаемый гауссовский сигнал $y(t)$.

В силу того, что фильтр низкочастотный, гауссовский сигнал $g(t)$ будет определяться низкочастотной составляющей сигнала $y(t)$. Дисперсия сигнала $g(t)$ имеет вид:

$$\sigma_g^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|W_{yg}(i\omega)\right|^2 f_{yx}(Q,R,\omega)d\omega =$$
$$= Q\cdot B + R\cdot C \quad (13)$$

где

$$B = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|W_{yg}(i\omega)\right|^2\frac{\sum_{j=1}^{m-p} b_j\cdot\omega^{2j+1}}{\sum_{j=1}^{n} a_j\cdot\omega^{2j+1}}d\omega \quad (14)$$

$$C = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|W_{yg}(i\omega)\right|^2\frac{\sum_{l=1}^{e} b_l\cdot\omega^{2l}}{\sum_{l=1}^{d} a_l\cdot\omega^{2l+1}}d\omega \quad (15)$$

Или

$$\sigma_g = \sqrt{Q\cdot B + R\cdot C} \quad (16)$$

Эквивалентный коэффициент передачи:

$$k_{\Psi_s^a} = \frac{k_{ga}}{\pi\cdot A^{0.5a}}\cdot\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3-a}{2}\right)\cdot B^{0.5a}\left(\frac{Q}{R}+\frac{C}{B}\right)^{0.5a} \quad (17)$$

Для совпадения знаменателей эквивалентной передаточной функции нелинейного фильтра и передаточной функции оптимального фильтра достаточно каждый из коэффициентов $\dot{k}_j$ (j=1,…, n) представить с требуемой степенью точности в виде разложения по функциям

$$\dot{k}_j\left(\frac{Q}{R}\right) \approx \sum_{l=1}^{N_j}\dot{k}_{jl}\left(\frac{Q}{R}+D\right)^{\beta_{jl}} \quad (18)$$

Коэффициенты разложения $\dot{k}_{jl}$ совпадут с соответствующими коэффициентами перед степенными функциями в $k_{\Psi_s^a}$ при выполнении равенства:

$$\dot{k}_{jl} = \frac{k_{g2\beta_{jl}}\cdot\Gamma\left(\frac{2\beta_{jl}+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3-2\beta_{jl}}{2}\right)\cdot B^{\beta_{jl}}}{\pi\cdot A^{\beta_{jl}}} \quad (19)$$

где

$$\beta_{jl} = \frac{a_{jl}}{2}$$

Отсюда:

$$k_{g2\beta_{jl}} = \frac{\dot{k}_{jl}\cdot\pi\cdot A^{\beta_{jl}}}{\Gamma\left(\frac{2\beta_{jl}+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3-2\beta_{jl}}{2}\right)\cdot B^{\beta_{jl}}} \quad (20)$$

Заменяя в (4) каждый из $\dot{k}_{jl}$ группой Ψ_s^a-элементов с параметрами

$\beta_{jl} = \frac{a_{jl}}{2}$ и $k_{g2\beta_{jl}}$

добьемся того, что знаменатель эквивалентной передаточной функции нелинейного дифференциатора будет с требуемой степенью точности совпадать со знаменателем передаточной функции оптимального дифференциатора при любом отношении Q/R. Следовательно, степень устойчивости нелинейного дифференциатора сколь угодно близка к степени устойчивости оптимального дифференциатора.

Качество дифференцирования будет тем выше, чем меньше

$$\left[W_{эк}\left(\frac{Q}{R}, i\omega\right) - W_o\left(\frac{Q}{R}, i\omega\right)\right]^2$$

при любых $\frac{Q}{R} > 0$, где $W_{эк}\left(\frac{Q}{R}, i\omega\right)$—

эквивалентная передаточная функция нелинейного дифференциатора.

Чтобы добиться приемлемого качества дифференцирования необходимо обеспечить соответствие предельных и допредельных соотношений эквивалентной передаточной функцией нелинейного дифференциатора и передаточной функцией оптимального дифференциатора. В частности, при

$\frac{Q}{R}\to\infty$

передаточная функция

$W_o\left(\frac{Q}{R}, i\omega\right)$

близка к величине $W_q(i\omega) = (i\omega)^q$, q=0, 1, 2,…, p. С другой стороны при

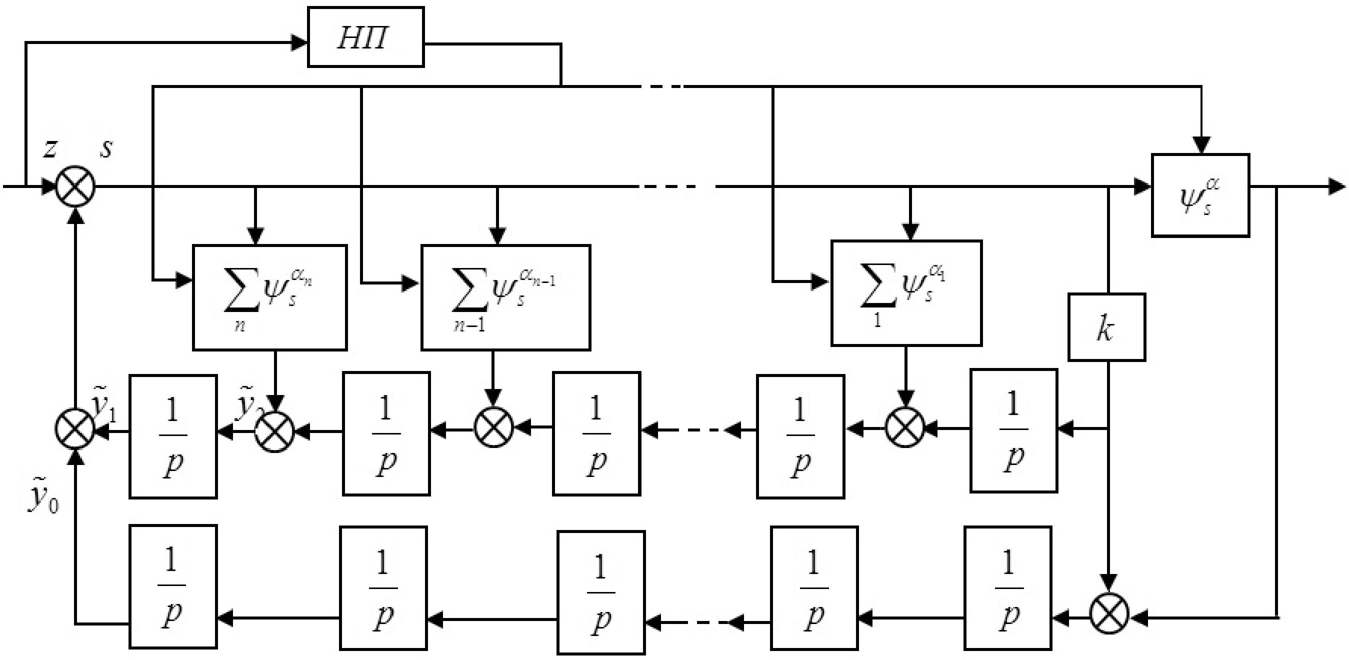

Рис. 2. Схема нелинейного дифференциатора.

$0 < \frac{Q}{R} < 1 \; W_o\left(\frac{Q}{R}, i\omega\right)$

близка к нулю, а при

$\frac{Q}{R} \to 0 \; W_o\left(\frac{Q}{R}, i\omega\right) \to 0.$

Введение в схему дифференциатора рис. 1 безынерционных линейных элементов с коэффициентом передачи k, как показано на рис. 2, обеспечит высокое качество дифференцирования при произвольных

$\frac{Q}{R} > 0$, если k удовлетворяет условию:

$$k = \lim_{\frac{Q}{R}\to 0} \sum_{l=1}^{N_0} \dot{k}_{0l} \cdot \left(\frac{Q}{R} + D\right)^{\beta_{0l}} \tag{21}$$

где $\sum_{l=1}^{N_0} \dot{k}_{0l} \cdot \left(\frac{Q}{R} + D\right)^{\beta_{0l}} = k_{\text{экв}}$

В этом случае получим эквивалентную передаточную функцию нелинейного дифференциатора:

$$W_{\text{экв}}\left(\frac{Q}{R}, i\omega\right) = \frac{(i\omega)^q \cdot \left[k_{\text{экв}}\left(\frac{Q}{R}\right) - k\right]}{\sum_{j=0}^{n-1} \dot{k}_j\left(\frac{Q}{R}\right) \cdot (i\omega)^j + (i\omega)^n} \tag{22}$$

Введение в схему нелинейного дифференциатора элемента k сказалось только на числителе. При этом полученная передаточная функция нелинейного дифференциатора дает необходимые нам предельные соотношения. В частности при

$\frac{Q}{R} \to \infty$

передаточная функция

$W_{\text{экв}}\left(\frac{Q}{R}, i\omega\right) \to (i\omega)^q,$

q=0, 1, 2,…, p, а при

$\frac{Q}{R} \to 0 \; W_o\left(\frac{Q}{R}, i\omega\right) \to 0.$

Таким образом, получили нелинейный дифференциатор, среднеквадратическая ошибка которого в достаточно широком диапазоне

$\frac{Q}{R} > 0$

близка к ошибке оптимального линейного дифференциатора.

Можно сказать, что незначительно проигрывая в качестве дифференцирования, нелинейный дифференциатор, во-первых, существенно проще реализуется подстраиваемого оптимального дифференциатора, и во-вторых, время адаптации к изменяющимся параметрам Q и R в нелинейном дифференциаторе, который не требует набора статистики, существенно меньше времени адаптации в подстраиваемом оптимальном дифференциаторе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория систем с переменной структурой, под редакцией С. В. Емельянова, Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1970, 592 стр.
2. Емельянов С. В., Уткин В. И., Таран В. А., Костылева Н. Е., Шубладзе А. М., Езеров В. Б., Дубровский Е. Н. Теория систем с переменной структурой. М., Изд-во «Наука». 1970.
3. Нелинейные помехозащищенные дифференциаторы // Проблемы управления / С. В. Гуляев, А. М. Шубладзе, С.и. Кузнецов, А. В. Кротов, В. Р. Ольшванг, В. А. Малахов, — 2010. — № 3. — С. 26–29.

© Кротов Александр Васильевич (a.krotov@sovtigaz.ru).

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»