

DOI 10.37882/2223–2966.2022.10.30

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ «ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО» ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ ЖИДКОСТИ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА ПРИСТЕННОГО СКОЛЬЖЕНИЯ¹

Сафрончик Мария Ильинична

Аспирант

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени

Н.Г. Чернышевского

safronchikmi@yandex.ru

Андрейченко Дмитрий Константинович

Доктор физико-математических наук, профессор

Саратовский национальный исследовательский

государственный университет имени

Н.Г. Чернышевского

kr_andreichenko@renet.ru

SIMULATION OF AN UNSTABLE DELAYED FLOW OF A VISCOPLASTIC FLUID ALONG AN INCLINED PLANE, TAKING INTO ACCOUNT THE EFFECT OF WALL SLIDING

**M. Safronchik
D. Andreichenko**

Summary. The stages of unsteady flow of a “retarded” viscoplastic medium along an inclined plane under the influence of gravity are modeled, taking into account the effect of slippage along a solid wall. The boundary of the flow zone at the stages of development and attenuation of the flow is not known in advance and is determined in the process of solving the problem. The angle of inclination is chosen in such a way that, over time, the so-called “slip” effect along the solid wall appears. The problem is posed within the framework of the five-parameter Slibar-Paslay model, which makes it possible to take into account the difference in the behavior of the material under loading and unloading. The possible “slip” of the material along the solid wall is taken into account using a model of a smooth transition from sticking to slipping similar to the hypothesis of prof. N.P. Petrov for a viscous liquid. The solution of the problem is constructed using the Galerkin projection method using orthogonal Chebyshev polynomials of the first kind as the basis functions.

Keywords: unsteady flow, mathematical and computer modeling, non-Newtonian fluids, viscoplastic materials, multiphase flows, wall slip effect.

Аннотация. В статье моделируются этапы нестационарного течения «запаздывающей» вязкопластичной среды по наклонной плоскости под воздействием силы тяжести с учетом эффекта проскальзывания вдоль твердой стенки. Граница зоны течения на этапах развития и затухания течения заранее неизвестна и определяется в процессе решения задачи. Угол наклона выбирается таким образом, чтобы с течением времени проявился так называемый эффект «проскальзывания» вдоль твердой стенки. Задача ставится в рамках пятипараметрической модели Слибара — Паслая, позволяющей учесть различие в поведении материала при нагружении и разгрузке. Возможное «проскальзывание» материала вдоль твердой стенки учитывается с помощью модели плавного перехода от прилипания к проскальзыванию аналогичной гипотезе проф. Н.П. Петрова для вязкой жидкости. Решение задачи строится с помощью проекционного метода Галеркина с использованием в качестве базисных функций ортогональных полиномов Чебышёва первого рода.

Ключевые слова: нестационарное течение, математическое и компьютерное моделирование, неньютоновские жидкости, вязкопластические материалы, многофазные течения, эффект «пристенного скольжения».

Введение

Поведение вязкопластичных сред значительно отличается от обычных ньютоновских жидкостей, что обусловлено их сложной внутренней структурой и характеризуется изменяющимися фазовыми состояниями. Течение развивается постепенно при достижении определенного внутреннего касатель-

ного напряжения, ниже которого материал испытывает лишь упругие деформации и ведет себя как твердое тело. При исследовании нестационарных течений возникают определенные математические трудности, так как область течения отсутствует в начальный момент и приходится решать начально-краевые задачи с возникновением области начального существования фазы в особую точку.

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20–31–90040

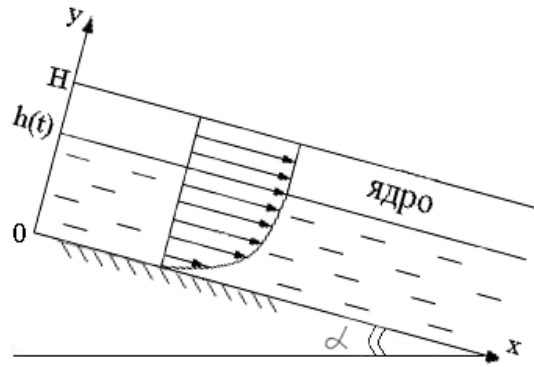


Рис. 2. Схема течения по наклонной плоскости

Существует еще ряд особенностей в реодинамике таких сред. Это различия в поведении материала при разрушении внутренней структуры на этапе развития течения и восстановлении структуры на этапе затухания течения, которые проходят при различных пределах текучести, также аномальное поведение у твердых стенок, заключающееся в резком изменении сопротивления материала при определенных скоростях движения. Это явление получило название эффекта «пристенного скольжения».

При воздействии на вязкопластичную среду немотонной нагрузкой, можно выделить несколько характерных временных этапов её поведения: разрушение структуры без «пристенного скольжения», разрушение структуры со скольжением, переходный этап со скольжением, переходный этап без скольжения и восстановление структуры материала [1, с. 176].

В данной статье представлены результаты моделирования течения вязкопластичной среды по наклонной плоскости под действием силы тяжести в рамках пятипараметрической модели Слибара — Паслая [2], позволяющей учесть гистерезис деформации материала при нагружении и разгрузке. Для учета возможного проскальзывания вдоль твердой стенки используется гипотеза, аналогичная гипотезе проф. Н.П. Петрова для вязкой жидкости [3]. Решение строится с помощью проекционного метода Галеркина с использованием в качестве базисных функций ортогональных полиномов Чебышёва первого рода [4].

Математическая модель и вычислительные методы

1. Этап разрушения структуры без «проскальзывания»

Пусть слой вязкопластичной среды толщины H находится на горизонтальной плоскости в состоянии по-

кою. В момент $t=0$ плоскость была наклонена на угол α к горизонту. Область течения развивается постепенно при достижении касательным напряжением статического предела текучести и граница этой области заранее неизвестна. Течение считается плоскопараллельным. Направим ось Ox вдоль плоскости, а ось Oy перпендикулярно потоку, как показано на рисунке 1 [5, с. 137].

Реологическая модель Слибара — Паслая для случая чистого сдвига имеет вид:

$$\begin{aligned} & \text{Нагружение} \\ \tau - \tau_d &= \eta \left| \frac{\partial V}{\partial n} \right| \text{sign} \frac{\partial V}{\partial n} \quad \text{при } \tau > \tau_s \\ & 0 = \frac{\partial V}{\partial n} \quad \text{при } \tau \leq \tau_s \\ & \text{Разгрузка} \\ \tau - \tau_d &= \eta \left| \frac{\partial V}{\partial n} \right| \text{sign} \frac{\partial V}{\partial n} \quad \text{при } \tau > \tau_d \\ & 0 = \frac{\partial V}{\partial n} \quad \text{при } \tau \leq \tau_d \end{aligned} \tag{1}$$

где τ_s — статический предел текучести, τ_d — динамический предел текучести, η — структурная вязкость, V — скорость, n — нормаль к направлению скорости.

Величина угла наклона плоскости выбирается такой, чтобы с течением времени появился эффект «проскальзывания». Согласно гипотезе Н.П. Петрова для вязкой жидкости, сопротивление на твердой стенке падает и материал начинает проскальзывать вдоль неё при достижении касательным напряжением некоторого критического значения τ^* . Скорость скольжения предлагается считать пропорциональной разнице между фактическим и критическим напряжениями

$$\begin{aligned} \tau - \tau^* &= \lambda |V_{fluid} - V_{wall}|, \quad \tau > \tau^* \\ V_{fluid} &= V_{wall}, \quad \tau \leq \tau^* \end{aligned} \tag{2}$$

коэффициент λ можно условно назвать коэффициентом «внешнего» трения вязкопластичной среды о твердую стенку. Для данной задачи соотношение между параметрами в рамках пятипараметрической модели будет следующим: $g\rho Hs\sin\alpha > \tau^* > \tau_s > \tau_d$.

Для единственной компоненты скорости краевая задача имеет вид:

$$\frac{\partial V_x(y,t)}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 V_x(y,t)}{\partial y^2} + g \sin \alpha, \quad 0 < y < h(t), \quad 0 < t \leq T_1 \quad (3)$$

$$V_x(y,0) = 0, \quad h(0) = 0 \quad (4)$$

$$V_x(0,t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leq T^* \\ (\tau(0,t) - \tau^*) / \lambda, & T^* < t \leq T_1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} \right)_{y \rightarrow h(t)-0} = \frac{\tau_s - \tau_d}{\eta} \quad (6)$$

$$V_x|_{y \rightarrow h(t)-0} = U(t), \quad \text{где } \frac{dU(t)}{dt} = g \sin \alpha - \frac{\tau_s}{(H - h(t))\rho} \quad (7)$$

$$\text{где } \nu = \frac{\eta}{\rho}$$

аналог кинематической вязкости, $U(t)$ — скорость ядра течения. Вводя новые переменные по формулам:

$$z = Hy / h(t), \quad V_x(y,t) = V_x(z,t) \quad (8)$$

получим краевую задачу в области с постоянными границами $0 < z < H, 0 < t < T_1$.

$$\frac{\partial V_x(z,t)}{\partial t} = \frac{\nu H^2}{h^2(t)} \frac{\partial^2 V_x(z,t)}{\partial z^2} + z \frac{h'(t)}{h(t)} \frac{\partial V_x(z,t)}{\partial z} + g \sin \alpha \quad (10)$$

$$V_x(z,0) = 0, \quad h(0) = 0 \quad (11)$$

$$V_x(0,t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leq T^* \\ (\tau(0,t) - \tau^*) / \lambda, & T^* < t \leq T_1 \end{cases} \quad (12)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_{z=H} = \frac{h(t)}{H} \frac{\tau_s - \tau_d}{\eta} \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{h(t)}{H} \frac{\tau(0,t) - \tau_d}{\eta} \quad (14)$$

Из (10) при $z = H$ и (7) после замены переменных следует:

$$\frac{\nu H^2}{h(t)} \frac{\partial^2 V_x(H,t)}{\partial z^2} + H h'(t) \frac{\partial V_x(H,t)}{\partial z} = - \frac{\tau_s h(t)}{\rho(H - h(t))} \quad (15)$$

Построение решения

Начально-краевая задача (3) — (7) в области с неизвестной подвижной границей принадлежит к классу не вполне корректных задач, т.к. в начальный момент область течения отсутствует. Как следствие, требование отсутствия особенностей решения начально-краевой задачи (10) — (15) при $t \rightarrow +0$ приводит к асимптотическому представлению

$$h(t) = At + \bar{o}(t), \quad V(z,t) = Bzt + B_1 z t^2 \left(1 - \frac{z}{2H} \right) + \bar{o}(t),$$

$$t \rightarrow 0$$

$$A = \frac{\eta}{\tau_s - \tau_d} \left[g \sin \alpha - \frac{\tau_s}{\rho H} \right], \quad B = \frac{1}{H} \left[g \sin \alpha - \frac{\tau_s}{\rho H} \right],$$

$$B_1 = \frac{A^2 g \sin \alpha}{\nu H} \quad (16)$$

Представим функцию $V_x(z, t)$ в виде ряда по ортогональным полиномам Чебышёва:

$$V(z,t) \approx \sum_{n=0}^{N+2} V_n(t) T_n \left(2 \frac{z}{H} - 1 \right), \quad T_n(\cdot) = \cos(\arccos(\cdot))$$

$$T_n(z) = \cos(n \arccos z) \quad (17)$$

Представим (10) в виде:

$$\mathbb{F}[V] = - \frac{\partial V_x(z,t)}{\partial t} + \frac{\nu H^2}{h^2(t)} \frac{\partial^2 V_x(z,t)}{\partial z^2} + z \frac{h'(t)}{h(t)} \frac{\partial V_x(z,t)}{\partial z} + g \sin \alpha = 0 \quad (18)$$

из (12) и (17) выбирая сначала условие прилипания, следует

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V_n(t) = 0, \quad 0 < t \leq T^* \quad (19)$$

из (13) и (17)

$$\sum_{n=1}^{N+2} n^2 V_n(t) = \frac{h(t)}{2} \frac{\tau_s - \tau_d}{\eta} \quad (20)$$

из (15) и (17)

$$\begin{aligned} & \frac{4\nu}{3h(t)} \sum_{n=2}^{N+2} n^2 (n^2 - 1) V_n(t) = \\ & = -2h'(t) \sum_{n=1}^{N+2} n^2 V_n(t) - \frac{\tau_s h(t)}{\rho(H - h(t))} \end{aligned} \quad (21)$$

Для того, чтобы приближенно выполнить уравнение (17), требуем:

$$\int_0^H \mathbb{F}[V] T_n \left(2 \frac{z}{H} - 1\right) dz = 0, \quad n = \overline{0, N} \quad (22)$$

$$A_{n,m}^{(0)} = \int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) dx$$

$$A_{n,m}^{(k)} = \int_{-1}^1 T_n(x) T_m^{(k)}(x) dx \quad (23)$$

$$-\frac{4\nu}{h(t)} \sum_{m=0}^{N+2} A_{n,m}^{(2)} V_m(t) + h(t) \sum_{m=0}^{N+2} A_{n,m}^{(0)} V_m'(t) -$$

$$-h'(t) \sum_{m=0}^{N+2} \left(A_{n,m}^{(1)} + \frac{1}{2} (A_{n+1,m}^{(1)} + A_{n-1,m}^{(1)}) \right) V_m(t) -$$

$$-h(t) g \sin \alpha = 0 \quad (24)$$

(19), (20), (24) представляет собой записанную в не-явной форме систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Приведение её к нормальной форме Коши

$$Y' = F(t, Y), \quad Y = (V_0, V_1, \dots, V_N, h)^T \quad (25)$$

и нахождение величины Y' по известным в текущий момент времени t величинам Y выполняется в следующей последовательности.

Из (19) и (20) находим V_{N+1} и V_{N+2} по V_0, V_1, \dots, V_N и h , из (21) находим $h'(t)$. Далее продифференцируем (19) и (20) по t .

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V_n'(t) = 0, \quad 0 < t \leq T^* \quad (26)$$

$$\sum_{n=0}^{N+2} n^2 V_n'(t) = \frac{h'(t)}{2} \frac{\tau_s - \tau_d}{\eta} \quad (27)$$

Уравнения (24), (26) и (27) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно $V_1, \dots, V_N, V_{N+1}, V_{N+2}$. Начальные условия для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (19), (20), (24) следуют из асимптотического представления (16) при $t=t_0, 0 < t_0 < < 1$.

2. Этап разрушения структуры с «проскальзыванием»

На этом этапе при достижении касательным напряжением критического значения τ^* в момент времени T^* меняется условие на твердой стенке $z=0$. Из (12) и рео-

логического уравнения (14) уравнение (19) заменяется на

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V_n(t) \left(1 + \frac{2\eta}{\lambda h(t)} n^2\right) = \frac{\tau_d - \tau^*}{\lambda} \quad (28)$$

Уравнение (26) заменяется на

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V_n'(t) \left(1 + \frac{2\eta}{\lambda h(t)} n^2\right) =$$

$$= \frac{2\eta h'(t)}{h^2(t) \lambda} \sum_{n=1}^{N+2} (-1)^n n^2 V_n(t) \quad (29)$$

Со временем процесс стабилизируется и течение асимптотически приближается к установившемуся. Граница зоны течения находится из соотношения

$$h_0 = H - \frac{\tau_s}{g \rho \sin \alpha} \quad (30)$$

Распределение скоростей для стационарного режима легко находится и имеет вид

$$V(z) = \frac{(2H^2 - h_0 z) h_0 g \rho z \sin \alpha}{2H^2 \eta} - \frac{\tau_d h_0 z}{H \eta} + \frac{\tau(0) - \tau^*}{\lambda} \quad (31)$$

3. Переходный этап с «проскальзыванием»

Пусть теперь в момент времени T_1 угол наклона плоскости уменьшается $\beta < \alpha$. Для того чтобы течение материала со временем прекратилось соотношение между параметрами выбирается следующим: $H g \rho \sin \beta \leq \tau_d$. С этого момента начнется нестационарный переходный процесс, при котором напряжение на границе раздела фаз h_0 будет уменьшаться с τ_s до τ_d , граница зоны течения на этом этапе постоянна. Если напряжение на твердой стенке $z=0$ к моменту времени T_1 превышает критическое напряжение τ^* , то либо весь переходный этап проходит с «проскальзыванием», либо в момент $\tau(0, T_2) = \tau^*$ начнется переходный этап без проскальзывания.

Для построения единого решения на всех этапах, снова необходимо сделать замену переменных

$$z = \frac{Hy}{h_0}$$

Получим краевую задачу в области $0 < z < H, T_1 < t < T_2$. С начальными условиями (30), (31).

$$\frac{\partial V_x(z,t)}{\partial t} = \frac{\nu H^2}{h_0^2} \frac{\partial^2 V_x(z,t)}{\partial z^2} + g \sin \beta \quad (32)$$

$$V_x(0,t) = (\tau(0,t) - \tau^*) / \lambda, \quad T_1 < t \leq T_2 \quad (33)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=H} = \frac{h_0}{H} \frac{\tau(H,t) - \tau_d}{\eta} \quad (34)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{h_0}{H} \frac{\tau(0,t) - \tau_d}{\eta} \quad (35)$$

Из (33) и (35)

$$\lambda V_x(0,t) = \frac{\eta H}{h_0} \frac{\partial V_x(0,t)}{\partial z} + \tau_d - \tau^* \quad (36)$$

По теореме импульсов

$$V_x(H,t) = V_x(H,T_1) + g(t - T_1) \sin \beta - \frac{1}{\rho(H - h_0)} \int_{T_1}^t \tau(H, \xi) d\xi \quad (37)$$

Обозначим:

$$\Phi(t) = \int_{T_1}^t \tau(H, \xi) d\xi, \quad \Phi(T_1) = 0 \quad (38)$$

Представим (32) в виде:

$$\mathbb{F}[V] = -\frac{\partial V_x(z,t)}{\partial t} + \frac{\nu H^2}{h_0^2} \frac{\partial^2 V_x(z,t)}{\partial z^2} + g \sin \beta \quad (39)$$

Из (17) и (36)

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V_n(t) \left(\lambda + \frac{2\eta}{h_0} n^2\right) = \tau_d - \tau^* \quad (40)$$

Из (17) и (37)

$$\sum_{n=0}^{N+2} V_n(t) = V_n(H, T_1) + g(t - T_1) \sin \beta - \frac{\Phi(t)}{\rho(H - h_0)} \quad (41)$$

$$\Phi'(t) = \tau(H, t) = \tau_d + \frac{\eta H}{h_0} \frac{\partial V_x(H, t)}{\partial z} \quad (42)$$

Из (17) и (42)

$$\Phi'(t) = \frac{2\eta}{h_0} \sum_{n=0}^{N+2} n^2 V_n(t) + \tau_d \quad (43)$$

Из (22), (23) и (39)

$$\sum_{m=0}^{N+2} A_{n,m}^{(0)} V_m'(t) - \frac{4\nu}{h_0^2} \sum_{m=0}^{N+2} A_{n,m}^{(2)} V_m(t) + g \sin \beta = 0 \quad (44)$$

(40), (41), (44) система ОДУ в неявной форме первого порядка. Из (40) и (41) находим V_{N+1} и V_{N+2} по V_0, V_1, \dots, V_N и Φ , из (43) находим $\Phi'(t)$. Далее продифференцируем (40) и (41) по t .

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V_n'(t) \left(\lambda + \frac{2\eta}{h_0} n^2\right) = 0 \quad (45)$$

$$\sum_{n=0}^{N+2} V_n'(t) = g \sin \beta - \frac{\Phi'(t)}{\rho(H - h_0)} \quad (46)$$

Уравнения (44)–(46) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно $V_1, \dots, V_N, V_{N+1}, V_{N+2}$ начальными условиями для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (40), (41), (44) являются условия (31), (38).

4. Переходный этап без «проскальзывания»

Если в момент T_2 касательное напряжение на твердой стенке $z=0$ уменьшается до значения τ^* , то условие «проскальзывания» заменяется условием прилипания.

Тогда условия (33) и (37) заменяются на

$$V_x(0,t) = 0, \quad T_2 < t \leq T_3 \quad (47)$$

$$V_x(H,t) = V_x(H, T_2) + g(t - T_2) \sin \beta - \frac{1}{\rho(H - h_0)} \int_{T_2}^t \tau(H, \xi) d\xi \quad (48)$$

$$\Phi(t) = \int_{T_2}^t \tau(H, \xi) d\xi, \quad \Phi(T_2) = 0 \quad (49)$$

(40), (41) заменяются на

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V_n(t) = 0 \quad (50)$$

$$\sum_{n=0}^{N+2} V_n(t) = V_n(H, T_2) + g(t - T_2) \sin \beta - \frac{\Phi(t)}{\rho(H - h_0)} \quad (51)$$

(45) меняется на

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V_n'(t) = 0 \quad (52)$$

Изменение границы при развитии и затухании течения

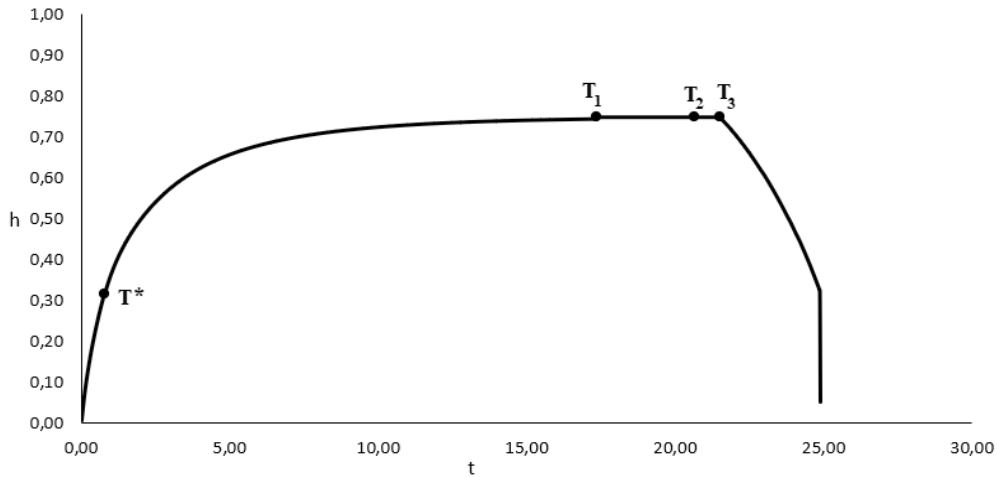


Рис. 2. Изменение границы зоны течения

Как только напряжение на границе раздела фаз h_0 уменьшится до τ_d начнется этап восстановления структуры материала, и граница зоны течения снова станет подвижной.

5. Этап восстановления структуры без «проскальзывания»

На этом этапе получаем краевую задачу в области $0 < z < H, t > T_3$. С начальным условием (30) для подвижной границы раздела фаз, и распределением скоростей, сложившимся к началу данного этапа.

$$\frac{\partial V_x(z,t)}{\partial t} = \frac{vH^2}{h^2(t)} \frac{\partial^2 V_x(z,t)}{\partial z^2} + z \frac{h'(t)}{h(t)} \frac{\partial V_x(z,t)}{\partial z} + g \sin \beta \quad (53)$$

$$V_x(z, T_3) = V^{T_3}(z, T_3), \quad h(T_3) = h_0 \quad (54)$$

$$V_x(0, t) = 0, \quad t \geq T_3 \quad (55)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_{z=H} = 0 \quad (56)$$

$$V_x(H, t) = U(t), \quad \text{где} \quad \frac{dU}{dt} = g \sin \beta - \frac{\tau_d}{(H - h(t))\rho} \quad (57)$$

Для нахождения $h'(t)$ выполняются следующие шаги.

Из (53) при $z = H$ и (57) следует:

$$\frac{\partial^2 V_x(H, t)}{\partial z^2} = - \left(\frac{h(t)}{H} \right)^2 \frac{\tau_d}{\eta(H - h(t))} \quad (56)$$

Продифференцировав (56) по времени, получим:

$$\frac{\partial^3 V_x(z, t)}{\partial z^2 \partial t} = - \frac{\tau_d}{\eta H^2} \frac{h(t)h'(2H - h(t))}{(H - h(t))^2} \quad (57)$$

Продифференцировав (53) дважды по z , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 V_x(z, t)}{\partial z^2 \partial t} &= v \left(\frac{H}{h(t)} \right)^2 \frac{\partial^4 V_x(z, t)}{\partial z^4} + \\ &+ \frac{h'(t)}{h(t)} \left(\frac{\partial^3 V_x(z, t)}{\partial z^3} - \left(\frac{h(t)}{H} \right) \frac{\partial^3 V_x(z, t)}{\partial z^3} \right) \quad (58) \end{aligned}$$

Приравняв (57) и (58) получим выражение для $h'(t)$.

$$\begin{aligned} h'(t) &= -v \left(\frac{H}{h(t)} \right)^4 \frac{\partial^4 V_x(z, t)}{\partial z^4} \left(\frac{\tau_d}{\eta(H - h(t))^2} + \right. \\ &\left. + \left(\frac{H}{h} \right)^3 \frac{\partial^3 V_x(z, t)}{\partial z^3} \right)^{-1} \quad (59) \end{aligned}$$

Из (17) и (55)

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V_n(t) = 0 \quad (60)$$

Из (17) и (56)

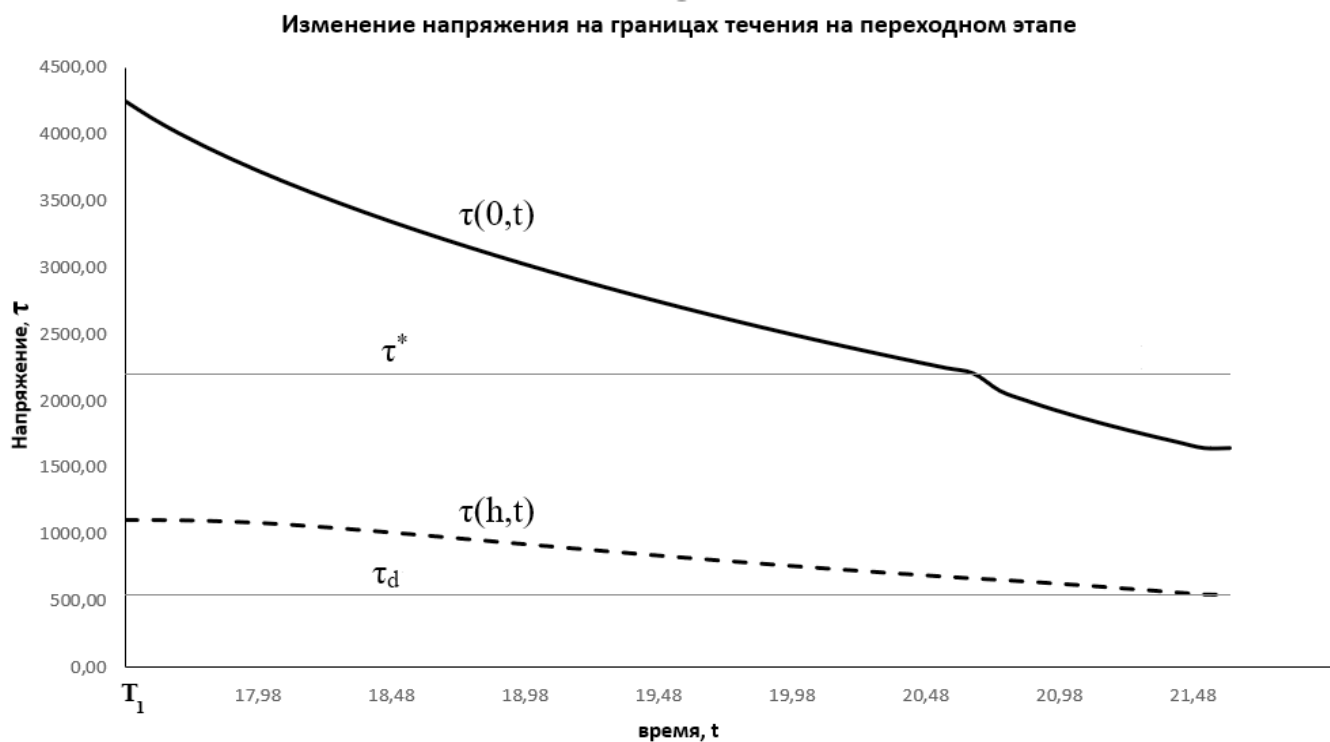


Рис. 3. Изменение границы зоны течения



Рис. 4. Профиль скорости

$$\sum_{n=0}^{N+2} n^2 V_n(t) = 0 \tag{61}$$

Представим (53) в виде:

$$\mathbb{F}[V] = -\frac{\partial V_x(z,t)}{\partial t} + \frac{\nu H^2}{h^2(t)} \frac{\partial^2 V_x(z,t)}{\partial z^2} + z \frac{h'(t)}{h(t)} \frac{\partial V_x(z,t)}{\partial z} + g \sin \beta = 0 \tag{62}$$

Из (22), (23) и (62)

$$\sum_{m=0}^{N+2} A_{n,m}^{(0)} V_m'(t) - \frac{4\nu}{h^2(t)} \sum_{m=0}^{N+2} A_{n,m}^{(2)} V_m(t) - \frac{h'(t)}{h(t)} \sum \left(A_{n,m}^{(1)} + \frac{1}{2} (A_{n+1,m}^{(1)} - A_{n-1,m}^{(1)}) \right) V_m(t) - g \sin \beta = 0 \tag{63}$$

(60), (61), (63) система ОДУ в неявной форме первого порядка. Из (60) и (61) находим V_{N+1} и V_{N+2} по V_0, V_1, \dots, V_N и h , из (59) находим $h'(t)$. Далее продифференцируем (60) и (61) по t .

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V_n'(t) = 0 \tag{64}$$

$$\sum_{n=1}^{N+2} n^2 V_n'(t) = 0 \tag{65}$$

Уравнения (63)–(65) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно $V_1, \dots, V_N, V_{N+1}, V_{N+2}$.

**Результаты
численного
моделирования**

Моделирование течения вязкопластичной среды по наклонной плоскости проводится со следующими параметрами $\tau_d = 0.5\tau_s, \tau_s = 0.5\tau^*, \rho = 900, \eta = 128, H = 1, \lambda = 500, \sin \alpha = 0.5, \sin \beta = 0.05$.

На рисунке 2 показано изменение границы зоны течения на всех этапах течения. В момент T^* начинается проскальзывание вдоль твердой стенки и скорость роста зоны течения замедляется, в момент T_1 процесс стабилизируется, угол наклона уменьшается и начинается переходный процесс, сначала с «проскальзыванием» до момента T_2 , а затем без «проскальзывания». В момент T_3 начинается восстановления материала.

На рисунке 3 показано изменение напряжения на границах области течения на переходном этапе начинающимся с момента T_1 . Сначала прекращается «проскальзывание» вдоль твердой стенки, а затем, когда напряжение на границе раздела фаз достигает значения τ_d начинается этап восстановления структуры.

На рисунке 4 показан профиль скорости. В момент $T^* = 0,77$ происходит отрыв от твердой стенки, скорость в точке $z=0$ начинает расти, в момент $T_1 = 17,37$ угол наклона уменьшается и скорость начинает падать, в момент $T_2 = 20,67$ происходит прилипание к твердой стенке, скорость в точке $z = 0$ равна нулю.

Заключение

Компьютерное моделирование в задачах с подвижной границей раздела фаз течения вязкопластических сред, можно эффективно реализовывать, предварительно отобразив область с подвижной границей на область с неподвижной границей и дискретизировав преобразованную начально-краевую задачу по независимой пространственной переменной на основе проекционного метода Бубнова-Галеркина с использованием в качестве базисных функций смещенных ортогональных полиномов Чебышева 1-го рода. Затем выполняя численное интегрирование полученной задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом в математических моделях развития течений корректная постановка начальных условий для соответствующих начально-краевых задач обеспечивается предварительным применением методов асимптотического интегрирования. Данный метод позволяет моделировать динамику поля скоростей среды и движение границы раздела, а также находить моменты времени, соответствующие началу и окончанию проскальзывания среды вдоль твердой стенки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сафрончик А.И. Неуставившиеся течения вязкопластичной среды с учетом пристенного скольжения и «запаздывания» восстановления структуры // Математика. Механика: сб. научных трудов. — Вып. 2. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. — С. 174–177.
2. Slibar A., Paslay P.R. Retarded Flow of Bingham Materials // J. of Appl.Mech. — 1959 March. — P. 107–112.

3. Петров Н.П. Гидродинамическая теория смазки // Сб. под редакцией проф. Лейбензона Л.С. ГТТИЗ — М., 1934. — С. 245.
4. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина/ К. Флетчер. М.: Мир, 1988. 352 с.
5. Сафрончик М.И. Развитие течения вязкопластичной среды по наклонной плоскости // Математика. Механика: сб. научных трудов. — Вып. 11. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. — С. 136–140.

© Сафрончик Мария Ильинична (safronchikmi@yandex.ru), Андрейченко Дмитрий Константинович (kp_andreichenko@renet.ru).

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»



г. Саратов