DOI 10.37882/2223–2966.2023.04–2.32

О НАХОЖДЕНИИ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ДИСКРЕТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

ON FINDING CLASSES OF DIFFERENTIAL EQUATIONS INVARIANT WITH RESPECT TO DISCRETE TRANSFORMATIONS

Z. Khakimova

Summary. Classes of multiplicative ordinary differential and integro-differential equations containing arbitrary functions are considered.

For the classes of equations under consideration, a discrete group (of the 12th order) of transformations is found that preserves the form of the equations. The possibility of extending this group of transformations with the help of the discrete dihedral group of the 6th order is indicated.

The method of "replenishment" ("extension") of differential equation classes is applied in the work, with the help of which it is possible to find classes of equations that are invariant with respect to a given discrete transformation.

A method is indicated for obtaining new discrete transformations from those found earlier (by means of lowering and raising the order of differential equations) closed in "extended" classes of equations.

Keywords: ordinary differential equation (ODE), integro-differential equation, discrete transformation, discrete transformation group, discrete transformation pseudogroup, dihedral group, exact solution of ODE.

Хакимова Зиля Наильевна
Кандидат физ. — мат. наук, доцент, Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского
vka@mil.ru

Аннотация. Рассматриваются классы мультипликативных обыкновенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, содержащих произвольные функции.

Для рассматриваемых классов уравнений найдена дискретная группа (12-го порядка) преобразований, сохраняющих вид уравнений. Указана возможность расширения этой группы преобразований с помощью дискретной группы диэдра 6-го порядка.

В работе применён метод «пополнения» («расширения») классов дифференциальных уравнений, с помощью которого можно находить классы уравнений, инвариантные относительно данного дискретного преобразования.

Указан метод получения новых дискретных преобразований из найденных ранее (с помощью преобразований понижения и повышения порядка дифференциальных уравнений), замкнутых в «расширенных» классах уравнений.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ), интегро-дифференциальное уравнение, дискретное преобразование, дискретная группа преобразований, дискретная псевдогруппа преобразований, группа диэдра, точное решение ОДУ.

Введение

Дискретно-групповой анализ (ДГА) обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) был разработан в конце 20-го столетия российским математиком В.Ф. Зайцевым [1] .

Основу ДГА составляет поиск дискретных преобразований, замкнутых в рассматриваемых классах уравнений. Далее конструируются дискретные группы и псевдогруппы преобразований, их графы. С помощью метода «размножения» разрешимых случаев в исследуемых классах уравнений по построенным дискретным группам и псевдогруппам преобразований к настоящему времени получены точные решения тысяч новых уравнений [2] .

В.Ф. Зайцев и его научная школа широко использовали идею повышения и понижения порядка дифференциальных уравнений. Был введён термин «RF-пара» («R» = «rise», «F» = «fall») — композиция преобразований последовательного повышения и понижения порядка уравнений.

В представленной статье рассматриваются, во-первых, не только «RF-пары», но и «FR-пары».

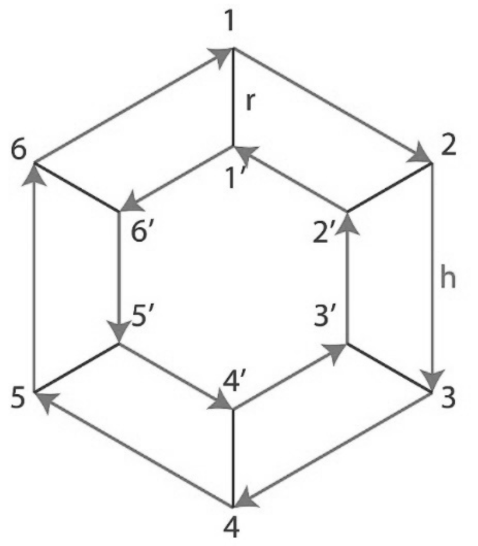

Рис. 1. Граф группы диэдра D_6.

Во-вторых, преобразования повышения и понижения порядка уравнений применяются не последовательно: между ними применяется ещё одно из известных преобразований, замкнутых в данном классе ОДУ.

В-третьих, ранее преобразование «понижения» (например, в [1]) не являлось обратным к преобразованию «повышения», так как их композиция являлась бы тождественным преобразованием. В данной работе это стало возможным в силу сказанного в предыдущем абзаце.

Далее, насчёт метода «пополнения» (или «расширения») исходного класса уравнений.

Этот метод впервые был введён и применён автором в работах [3–5] для достижения замкнутости некоторого дискретного преобразования в новом, расширенном, классе уравнений. В данной статье вновь приведены примеры применения указанного метода.

Группа преобразований диэдра 12-го порядка

Рассмотрим мультипликативный класс ОДУ 2-го порядка

$$AK(\alpha)L(\beta)M(\gamma)N(\delta)P(\varepsilon)=1,$$

$$\alpha=x,\ \beta=y,\ \gamma=y'_x,\ \delta=xy'_x-y,\ \varepsilon=y''_{xx}. \qquad (1)$$

В работах [3,4,6] был рассмотрен его подкласс, когда все функции имели степенной вид, а

$$P(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}.$$

Для этого «степенного» подкласса

$$\varepsilon=A\alpha^k\beta^l\gamma^m\delta^n \qquad (2)$$

(обозначим его с помощью вектора параметров: $(k,l,m,n\,|\,A)$) в указанных выше работах были найдены точечное $\mathbf{r}$ и касательное $\mathbf{h}$ преобразования, замкнутые в (2):

$$\mathbf{r}:\quad \alpha\leftrightarrow\beta,\ \gamma\to\frac{1}{\gamma},\ \delta\to-\frac{\delta}{\gamma},\ \varepsilon\to-\frac{\varepsilon}{\gamma^3},$$

$$(k,l,m,n\,|\,A)\xrightarrow{\mathbf{r}}\left(l,k,-m-n+3,n\,|\,(-1)^{n-1}A\right),\ \mathbf{r}^2=\mathbf{E}; \qquad (3)$$

$$\mathbf{h}:\alpha\to\frac{1}{\gamma},\ \beta\to-\frac{\delta}{\gamma},\ \gamma\to\beta,\ \delta\to\alpha,\ \varepsilon\to-\frac{\gamma^3}{\varepsilon},$$

$$(k,l,m,n\,|\,A)\xrightarrow{\mathbf{h}}\left(n,m,-k-l-3,l\,|\,(-1)^{l-1}A\right),\ \mathbf{h}^6=\mathbf{E}. \qquad (4)$$

Применим преобразования (3) и (4) к (1):

$$AK(\alpha)L(\beta)M(\gamma)N(\delta)P(\varepsilon)=1\xrightarrow{\mathbf{r}}$$

$$\xrightarrow{\mathbf{r}}AL(\alpha)K(\beta)M\left(\frac{1}{\gamma}\right)N\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)P\left(-\frac{\varepsilon}{\gamma^3}\right)=1, \qquad (5)$$

$$AK(\alpha)L(\beta)M(\gamma)N(\delta)P(\varepsilon)=1\xrightarrow{\mathbf{h}}$$

$$\xrightarrow{\mathbf{h}}AN(\alpha)M(\beta)K\left(\frac{1}{\gamma}\right)L\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)P\left(-\frac{\gamma^3}{\varepsilon}\right)=1. \qquad (6)$$

В 4-м и 5-м сомножителях в (5) и (6) функции N и P зависят не от δ и ε, а от

$-\dfrac{\delta}{\gamma}$ и $-\dfrac{\varepsilon}{\gamma^3}$, соответственно, в отличие от (1).

Расширим класс уравнений (1): будем рассматривать мультипликативный класс уравнений вида (1), где

Таблица 1. Уравнения, соответствующие вершинам графа группы D_6

1	$AK(\alpha)L(\beta)M(\gamma)N(\delta)P(\varepsilon)=1$	1'	$AK(\beta)L(\alpha)M\left(\frac{1}{\gamma}\right)N\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)P\left(-\frac{\varepsilon}{\gamma^3}\right)=1$
2	$AK\left(\frac{1}{\gamma}\right)L\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)M(\beta)N(\alpha)P\left(-\frac{\gamma^3}{\varepsilon}\right)=1$	2'	$AK\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)L\left(\frac{1}{\gamma}\right)M\left(\frac{1}{\beta}\right)N\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)P\left(-\frac{\gamma^3}{\beta^3\varepsilon}\right)=1$
3	$AK\left(\frac{1}{\beta}\right)L\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)M\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)N\left(\frac{1}{\gamma}\right)P\left(\frac{\beta^3\varepsilon}{\gamma^3}\right)=1$	3'	$AK\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)L\left(\frac{1}{\beta}\right)M\left(-\frac{\gamma}{\delta}\right)N\left(\frac{1}{\delta}\right)P\left(\frac{\beta^3\varepsilon}{\delta^3}\right)=1$
4	$AK\left(-\frac{\gamma}{\delta}\right)L\left(\frac{1}{\delta}\right)M\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)N\left(\frac{1}{\beta}\right)P\left(\frac{\delta^3}{\beta^3\varepsilon}\right)=1$	4'	$AK\left(\frac{1}{\delta}\right)L\left(-\frac{\gamma}{\delta}\right)M\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)N\left(\frac{1}{\alpha}\right)P\left(\frac{\delta^3}{\alpha^3\varepsilon}\right)=1$
5	$AK\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)L\left(\frac{1}{\alpha}\right)M\left(\frac{1}{\delta}\right)N\left(-\frac{\gamma}{\delta}\right)P\left(\frac{\alpha^3\varepsilon}{\delta^3}\right)=1$	5'	$AK\left(\frac{1}{\alpha}\right)L\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)M(\delta)N(\gamma)P(-\alpha^3\varepsilon)=1$
6	$AK(\delta)L(\gamma)M\left(\frac{1}{\alpha}\right)N\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)P\left(-\frac{1}{\alpha^3\varepsilon}\right)=1$	6'	$AK(\gamma)L(\delta)M(\alpha)N(\beta)P\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)=1$

функции K, L, M, N, P могут зависеть от произведений некоторых целых степеней переменных $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ (взятых со знаком «+» либо «-»). В новом расширенном классе уравнений преобразования $\mathbf{r}$ и $\mathbf{h}$ становятся замкнутыми.

Преобразования $\mathbf{r}$ и $\mathbf{h}$ являются образующими группы преобразований диэдра 12-го порядка

$$D_6 = \left\{\mathbf{E}, \mathbf{h}, \mathbf{h}^2, \mathbf{h}^3, \mathbf{h}^4, \mathbf{h}^5, \mathbf{r}, \mathbf{hr}, \mathbf{h}^2\mathbf{r}, \mathbf{h}^3\mathbf{r}, \mathbf{h}^4\mathbf{r}, \mathbf{h}^5\mathbf{r}\right\}, \tag{7}$$

имеющей код [7]: $\mathbf{r}^2 = \mathbf{h}^6 = (\mathbf{hr})^2 = \mathbf{E}$ ($\mathbf{E}$ — тождественное преобразование) .

Граф группы D_6 изображён на рис. 1.

Дуги графа обозначают преобразования группы D_6 (7), а вершины $1, \ldots, 6$, $1', \ldots, 6'$ — соответствующие уравнения, помещённые в таблицу 1.

Преобразования понижения и повышения порядка. Инвариантные классы уравнений

Общеизвестными являются случаи понижения порядка ОДУ, когда уравнения не содержат переменную y или x.

В 1-м случае делается подстановка

$$y'(x) = u(x), \tag{8}$$

во 2-м —

$$y'(x) = u(y). \tag{9}$$

1. «Понижающее» преобразование (8) можно записать следующим образом:

$$\mathbf{p}_1: \quad x \to x,\ y \to \int y dx,\ y'_x \to y,\ xy'_x - y \to xy - \int y dx,$$

$$y''_{xx} \to y'_x,\ xy''_{xx} - y'_x \to xy'_x - y,\ y'''_{xxx} \to y''_{xx}. \tag{10}$$

Обратное к нему преобразование повышения порядка имеет вид:

$$\mathbf{p}_1^{-1}: \quad x \to x,\ \int y dx \to y,\ y \to y'_x,\ y'_x \to y''_{xx},$$

$$xy'_x - y \to xy''_x - y'_x,\ y''_{xx} \to y'''_{xxx},$$

$$xy''_{xx} - y'_x \to xy'''_{xxx} - y''_{xx}. \tag{11}$$

Композиция (10), преобразования $\mathbf{r}$ и (11), как оказалось, является известным преобразованием Лежандра (заметим, что $\mathbf{l} = \mathbf{hr}$):

$$\mathbf{l} = \mathbf{p}_1\mathbf{r}\mathbf{p}_1^{-1}: \quad x \to y'_x,\ y \to xy'_x - y,$$

$$y''_{xx} \to \frac{1}{y''_{xx}},\ xy''_{xx} - y'_x \to -\frac{xy''_{xx} - y'_x}{y'_x},\ \mathbf{l}^2 = \mathbf{E}.$$

Преобразование Лежандра $\mathbf{l}$ оказалось замкнутым в классе уравнений (1), см. формулу (12).

$$AK(\alpha)L(\beta)M(\gamma)N(\delta)P(\varepsilon)=1\xrightarrow{\mathbf{l}}$$
$$\xrightarrow{\mathbf{l}} AM(\alpha)N(\beta)K(\gamma)L(\delta)P\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)=1 \tag{12}$$

$$AK(\alpha)L(\beta)M(\gamma)N(\delta)P(\varepsilon)=1\xrightarrow{\mathbf{l}^*}$$
$$\xrightarrow{\mathbf{l}} AK\left(\int ydx\right)L\left(\frac{1}{y}\right)M\left(-\frac{y'_x}{y^3}\right)N\left(-\frac{\int ydx\cdot y'_x+y^2}{y^3}\right)P\left(-\frac{yy''_{xx}-3(y')^2}{y^5}\right)=1 \tag{12.1}$$

$$AK(\alpha)R(\theta)L(\beta)M(\gamma)S(\zeta)N(\delta)P(\varepsilon)Q(\eta)=1\xrightarrow{\mathbf{l}^*}$$
$$\xrightarrow{\mathbf{l}^*} AK(\theta)R(\alpha)L\left(\frac{1}{\beta}\right)M\left(-\frac{\gamma}{\beta^3}\right)S\left(-\frac{\delta}{\beta^3}\right)N\left(-\frac{\zeta}{\beta^3}\right)P\left(-\frac{\eta}{\beta^5}\right)Q\left(-\frac{\varepsilon}{\beta^5}\right)=1,$$
$$\mathbf{l}^*:\quad \alpha \leftrightarrow \theta, \beta\to\frac{1}{\beta}, \gamma\to-\frac{\gamma}{\beta^3}, \zeta\to-\frac{\delta}{\beta^3},$$
$$\delta\to-\frac{\zeta}{\beta^3}, \varepsilon\to-\frac{\eta}{\beta^5}, \eta\to-\frac{\varepsilon}{\beta^5}, (\mathbf{l}^*)^2=\mathbf{E}, \tag{13}$$

где $\alpha=x$, $\theta=\int ydx$, $\beta=y$, $\gamma=y'_x$, $\zeta=\int ydx\cdot y'_x+y^2$, $\delta=xy'_x-y$, $\varepsilon=y''_{xx}$, $\eta=yy''_{xx}-3(y'_x)^2$.

Если же записать преобразования в обратном порядке, то их композиция $\mathbf{l}^*=\mathbf{p}_1^{-1}\mathbf{r}\mathbf{p}_1$ не будет замкнутой в классе уравнений (1), см. формулу (12.1).

Для достижения замкнутости преобразования $\mathbf{l}^*$ в исходном классе уравнений необходимо в (1) добавить три сомножителя — функции $R(\theta)$, $S(\zeta)$, $Q(\eta)$ от следующих переменных:

$$\theta=\int ydx, \zeta=\int ydx\cdot y'_x+y^2, \eta=yy''_{xx}-3(y'_x)^2.$$

В результате получаем расширенный класс уравнений, инвариантный относительно преобразования $\mathbf{l}^*$, см. формулу (13).

Заметим, что при $R,S\neq1$ исходное уравнение в (13) является интегро-дифференциальным, а при $K,N\neq1$ — соответственно преобразованное уравнение.

2. «Понижающее» преобразование (9) можно записать таким образом:

$$\mathbf{p}_2:\quad x\to\int\frac{dx}{y}, y\to x, y'_x\to y, xy'_x-y\to\int\frac{dx}{y}y-x, y''_{xx}\to yy'_x.$$

Обратное к нему, «повышающее», преобразование выглядит следующим образом:

$$\mathbf{p}_2^{-1}:\quad x\to y, y\to y'_x, y'_x\to\frac{y''_{xx}}{y'_x},$$
$$xy'_x-y\to\frac{yy''_{xx}-(y'_x)^2}{(y'_x)^2}, y''_{xx}\to\frac{y'_xy'''_{xxx}-(y''_{xx})^2}{(y'_x)^3}.$$

3. Аналогично предыдущему, можно рассмотреть композиции преобразований $\mathbf{p}_2\mathbf{r}\mathbf{p}_2^{-1}$ и $\mathbf{p}_2^{-1}\mathbf{r}\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_1\mathbf{r}\mathbf{p}_2^{-1}$ и $\mathbf{p}_2\mathbf{r}\mathbf{p}_1^{-1}$, $\mathbf{p}_1^{-1}\mathbf{r}\mathbf{p}_2$ и $\mathbf{p}_2^{-1}\mathbf{r}\mathbf{p}_1$.

Кроме того, можно рассмотреть аналогичные композиции преобразований, где вместо $\mathbf{r}$ записано преобразование $\mathbf{h}$. Таким образом, можно рассмотреть 16 композиций. Не все их них допустимы, так как не всегда выполняются условия «стыковки» трёх преобразований, входящих в эти композиции.

Если предположить, что все композиции существуют, то

$$\left(\mathbf{p}_i\mathbf{r}\mathbf{p}_i^{-1}\right)^2=\left(\mathbf{p}_i^{-1}\mathbf{r}\mathbf{p}_i\right)^2=\mathbf{E}, \left(\mathbf{p}_i\mathbf{h}\mathbf{p}_i^{-1}\right)^2=\left(\mathbf{p}_i^{-1}\mathbf{h}\mathbf{p}_i\right)^2=\mathbf{E},$$

$i = 1, 2$, т.е. эти 8 преобразований, так же как $\mathbf{r}$ и $\mathbf{h}$, являются образующими циклических групп 2-го и 6-го порядков соответственно.

Далее, $\mathbf{p}_1\mathbf{r}\mathbf{p}_2^{-1}$ и $\mathbf{p}_2\mathbf{r}\mathbf{p}_1^{-1}$, а также $\mathbf{p}_1^{-1}\mathbf{r}\mathbf{p}_2$ и $\mathbf{p}_2^{-1}\mathbf{r}\mathbf{p}_1$ являются взаимно обратными.

4. Аналогично п.1 и п.2, для всех приведённых выше композиций преобразований, имеющих смысл, можно найти классы уравнений, в которых эти композиции преобразований действуют. Затем можно построить расширенные классы уравнений, инвариантные относительно данных композиций. Этого можно достигнуть, пополнив исходные классы уравнений недостающими сомножителями так, чтобы данные композиции преобразований оказались замкнутыми в новых расширенных классах уравнений.

Разрешимые подклассы уравнений. Упрощение классов уравнений

1. Если в классе уравнений (1) принять $K = L = P \equiv 1$, то получится уравнение Клеро.

Причём, преобразование $\mathbf{l}$ для него является интегрирующим:

$$AM(\gamma)N(\delta) = 1 \xrightarrow{\mathbf{l}} AM(\alpha)N(\beta) = 1$$

$$(\alpha = x, \beta = y, \gamma = y'_x, \delta = xy'_x - y), \tag{14}$$

так как преобразованное уравнение в (14) не содержит производных.

2. Пусть в (13) $K = N \equiv 1$, тогда в результате преобразования $\mathbf{l^*}$ исходный класс интегро-дифференциальных уравнений переходит в класс просто дифференциальных уравнений. Если при этом ещё $P \equiv 1$, то преобразованный класс уравнений упростится — будет зависеть не от $y''_{xx} - 3(y'_x)^2$, а просто от y''_{xx}.

3. Разрешимые подклассы уравнений можно «размножить» с помощью преобразований группы диэдра D_6. Так что, кроме исходного разрешимого подкласса уравнений, получаются ещё 11 разрешимых подклассов.

4. Разрешимыми подклассами класса уравнений (1) являются, в частности, подклассы уравнений:

1) при $L = N \equiv 1$: в уравнения не входит y;

2) при $K = N \equiv 1$: уравнения не содержат x.

Эти разрешимые случаи «размножаются» по группе 12-го порядка D_6 (7) .

Расширение группы преобразований D_6 с помощью D_3

Для подкласса уравнений при $N \equiv 1$ класса уравнений (1) была найдена дискретная группа диэдра D_3 (6-го порядка) преобразований, замкнутых в этом подклассе уравнений [8] .

Поэтому группа преобразований D_6 допускает расширение с помощью D_3 при $L = N \equiv 1$ либо $K = N \equiv 1$. Таким образом, разрешимые случаи при $K = N \equiv 1$ и $K = N \equiv 1$ «размножаются» не только по группе D_6, но и по группе D_3.

В работе [9] рассмотрен частный случай при $L = N \equiv 1$ либо $K = N \equiv 1$, когда остальные функции в (1) являются степенными. В этом случае получился разрешимый граф ∞-го порядка, состоящий из графов групп D_6 и D_3. Причём, чем дальше будем двигаться по графу от вершины, соответствующей исходному уравнению, тем более нетривиальные уравнения будем получать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин — М.: Наука, 1993. — 464 с.
2. Polyanin A.D. Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems / A.D. Polyanin, V.F. Zaitsev. — CRC Press. Boca Raton — London, 2018. — 1496 p. DOI: 10.1201/9781315117638
3. Хакимова З.Н. Классификация новых разрешимых случаев в классе полиномиальных дифференциальных уравнений / З.Н. Хакимова, О.В. Зайцев // Актуальные вопросы современной науки, № 3. — СПб., 2014. — С. 3–11.
4. Хакимова З.Н. Выбор класса дифференциальных уравнений для нахождения новых разрешимых случаев / З.Н. Хакимова // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения — 2017». — СПб.: РГПУ, 2017. — С. 112–117.
5. Khakimova Z.N. The replenishment method and new solvable cases of third-order nonlinear differential equations of Emden-Fowler type // 7th International conference «Problems of Mathematical Physics and Mathematical Modeling»: Book of Abstract». — Moscow: NRNU MEPhI, 2019. — pp. 49–51.

6. Зайцев О.В. О дискретных симметриях и новых разрешимых случаях в классе полиномиальных дифференциальных уравнений / О.В. Зайцев // Наука XXI века: новый подход. Материалы IX молодежной международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых.— СПб.: Научно-издательский центр "Открытие", 2014.— С. 8–16.
7. Coxeter H.S.M. Generators and Relations for Discrete Groups / H.S.M. Coxeter, W.O.J. Moser.— New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1972.— 164 p. DOI: 10.1007/978–3–662–21946–1
8. Зайцев В.Ф. Дискретно-групповой метод интегрирования уравнений нелинейной механики / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин.— М.: Препринт ИЛМ АН СССР, 1988.— № 339.— 44с.
9. Хакимова З.Н. Дифференциальные уравнения степенного вида, интегрируемые в полиномах / З.Н. Хакимова // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения — 2019».— СПб.: РГПУ, 2019.— С. 97–101.

Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского