

ВЛИЯНИЕ ВИДА ИСПОЛЬЗУЕМОЙ МАТРИЦЫ НА РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

EFFECT OF USED MATRIX TYPE ON TRANSFORM RESULTS

**A. Shoberg
S. Chepurko**

Summary. The article discusses a formation of matrix for performing discrete transforms. The issues of block matrices forming when performing calculations are considered. Advantages of using formed matrices with central symmetry are shown. Discrete transformations are considered depending on a blocks number and processing direction. A simulation results are presented in graphical form. Despite the fact that presented expressions are used to process a one-dimensional signal, the proposed approach can be extended to two-dimensional data with appropriate changes.

Keywords: discrete transform, blocks, decomposition, invariance, central symmetry, correlation.

Шоберг Анатолий Германович

К.т.н, доцент, Тихоокеанский государственный университет (Хабаровск)
shoberg@rambler.ru

Чепурко Сергей Александрович

Аспирант, Тихоокеанский государственный университет (Хабаровск)
chepurkojm@gmail.com

Аннотация. В статье рассматривается формирование матрицы преобразования для выполнения дискретных преобразований. Рассмотрены вопросы формирования блочных матриц при выполнении расчетов. Показаны преимущества применения сформированных матриц с центральной симметрией. Рассматриваются дискретные преобразования в зависимости от количества блоков и направления обработки. Представлены результаты моделирования в графической форме. Несмотря на то что представленные выражения используются для обработки одномерного сигнала, предлагаемый подход может быть распространен на двумерные данные с соответствующими изменениями.

Ключевые слова: дискретное преобразование, блоки, декомпозиция, инвариантность, центральная симметрия, корреляция.

Введение

Существует достаточно большое количество тонкостей при получении и исследовании частотных характеристик [1]. Среди них вопросы, связанные с симметрией [2, 3], четностью/нечетностью функций [4], инвариантностью получаемых результатов [5, 6]. При выполнении обычных дискретных преобразований можно получить одну или нескольких составляющих отдельно. Математическая запись таких преобразований может быть представлена в виде матричного произведения. Для одномерного случая это будет произведение матрицы на вектор. При этом формирование матрицы преобразования является основой для выбора вида преобразования, порядка вычисления отдельных составляющих и др. Применение ряда свойств матриц, среди которых выполнение операций, деление на блоки, симметричность и др. могут привести дополнительные преимущества в области обработки данных [7], так как ряд важных операций может быть выполнен в частотном домене [8].

Реализация дискретных преобразований на сегодняшний день в большинстве случаев осуществляется на основе эффективных вычислительных методов. При этом для ряда преобразований существуют быстрые ал-

горитмы. Кроме того, в ряде случаев возможно последовательное применение по строкам и столбцам исходных двумерных данных (свойство делимости), что позволяет сократить количество вычислительных операций. Быстрые преобразования являются алгоритмами для ускоренного вычисления путем сокращения требуемого числа операций сложения и умножения [1]. Основываются они на использовании свойств симметрии и периодичности, что позволяет снизить количество вычислений с максимального N^2 до $N \log(N)$.

Рассмотрение вопросов формирования матрицы преобразования требуется для выполнения дискретных преобразований с наличием дополнительных свойств сокращающих время цифровой обработки данных при прежней вычислительной сложности.

Формирование матрицы преобразования с наличием центральной симметрии

Анализ и представление преобразований сигналов могут быть представлены в достаточно простом виде за счет использования матрично-векторного описания, где вектор-столбец (x) и матрица (W), соответственно,

представляют соответствующий сигнал и преобразование. Традиционный вид преобразования (X_{trad}) будет записан следующим образом

$$X_{trad} = W \times x. \quad (1)$$

В случае обработки одномерных данных, хранимых на устройствах памяти, возможны вычисления в прямом и обратном направлениях, но в общем случае результаты расчетов будут отличаться, хотя вектор отсчетов остается неизменным x . Это связано с тем, что в общем случае матрица и вектор не имеют симметрии относительно середины (половины) общего количества отсчетов [9]. При этом изменение направления выборки отсчетов входного сигнала эквивалентно зеркальному отражению матрицы преобразования в горизонтальной плоскости, что следует свойств матричного умножения. Такое зеркальное отражение может быть получено выборкой элементов матрицы преобразования от последнего индекса к первому. Подобная замена позволяет производить вычисления в обратном направлении при получении отсчетов сигнала без предварительного накопления.

Подобная ситуация наблюдается и при выполнении блочного ($X_{trad_bl_r}$) преобразования в традиционной форме в прямом направлении

$$X_{trad_bl_r} = (W_r \oplus W_r \oplus \dots \oplus W_r) \times x, \quad (2)$$

где W_r — матрица преобразования при выборке элементов от первого к последнему по строкам и столбцам;

\oplus — прямая сумма матриц.

Прямая сумма предполагает получение новой матрицы, состоящей из 4 блоков, где два блока с ненулевыми матрицами размещены на главной диагонали, два блока содержащие, только нули размещены на побочной диагонали [7].

Смена направления выполнения блочного преобразования может быть записана

$$X_{trad_bl_l} = (W_l \oplus W_l \oplus \dots \oplus W_l) \times x, \quad (3)$$

где $X_{trad_bl_l}$ — результат блочного преобразования в традиционной форме для обратной выборки отсчетов;

W_l — матрица блочного преобразования с обращенным размещением элементов.

В матрице W_l обращение столбцов отвечает за изменение результатов преобразования (изменение амплитуд) в общем случае, а обращение строк влияет только за порядок размещения составляющих вектора результата.

В общем случае векторы $X_{trad_bl_r}$ и $X_{trad_bl_l}$ не равны с учетом одинаковых размещений составляющих.

Такое отличие может быть устранено на основе использования блочной матрицы с центральной симметрией.

Центрально симметричная матрица (ЦСМ) — это квадратная матрица, элементы которой симметричны относительно геометрического центра матрицы [10, 11]. К основным свойствам ЦСМ относятся следующие [12, 13]:

- ◆ ЦСМ образуют подмножество, замкнутое относительно операций сложения, умножения и транспонирования
- ◆ Обратная ЦСМ также является ЦСМ;
- ◆ Множество ЦСМ с определителем, не равным нулю, образует группу по отношению к операции умножения.

В рассматриваемой области формирование такой матрицы может рассматриваться, как использование блочной матрицы на основе операции прямого суммирования. Преобразование такой матрицы в ЦСМ может быть выполнено за счет изменения прямого порядка размещения элементов (строк и столбцов) в одном из блоков, находящихся на главной диагонали на обратный. Смена порядка размещения элементов по-прежнему предполагает выборку от максимального индекса к минимальному.

Результат преобразования с использованием ЦСМ (X_{S1}) может быть записан следующим образом

$$X_{S1} = (W_l \oplus W_r \oplus W_l \oplus W_r \oplus \dots \oplus W_l \oplus W_r) \times x. \quad (4)$$

Также возможен дополнительный вариант выполнения преобразования (X_{S2}) на основе другой ЦСМ

$$X_{S2} = (W_r \oplus W_l \oplus W_r \oplus W_l \oplus \dots \oplus W_r \oplus W_l) \times x. \quad (5)$$

Здесь заменен порядок формирования ЦСМ из блоков в выражениях (2) и (3). Выражения (4) и (5) устраняют неравенство составляющих при выполнении преобразований в прямом и обратном направлении.

Результаты моделирования

Для подтверждения полученных теоретических результатов было разработано программное обеспечение с использованием языка системы математического моделирования Octave. В качестве обрабатываемых использовались стандартные тестовые сигналы, предлагаемые данной системой. На рис. 1 представлен один из используемых сигналов под названием CHIRP. По оси абсцисс отложены отсчеты n , а на оси ординат представлены амплитуды (Amp).

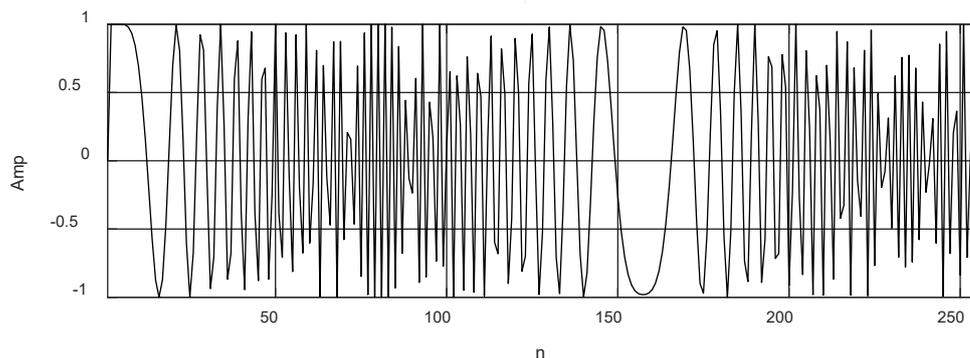


Рис. 1. Пример тестового сигнала

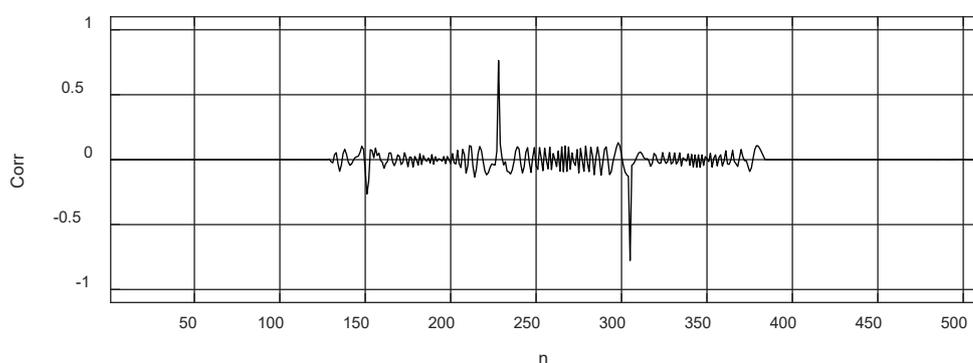


Рис. 2. Коэффициент взаимной корреляции при выполнении ДКП без деления интервала расчетов на блоки

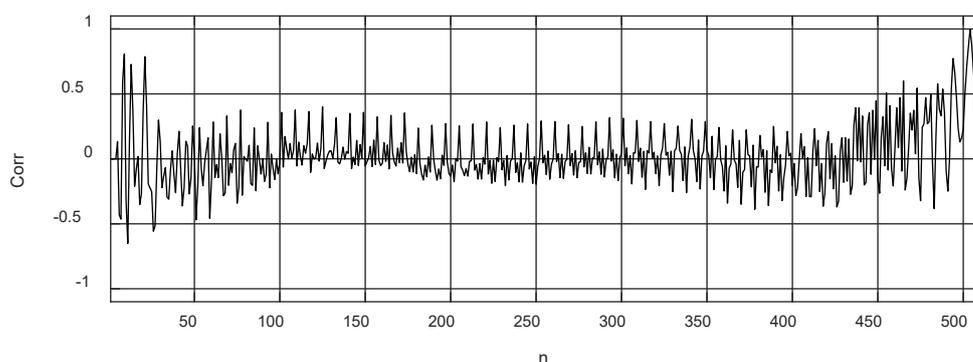


Рис. 3. Коэффициент взаимной корреляции при выполнении блочного ДКП при наличии 16 блоков

Для тестовых сигналов рассчитывалось дискретное косинусное преобразование (ДКП) для прямого и измененного порядка выборки отсчетов сигналов на основе выражения (1). Расчеты производились динамически, т.е. рассчитывались преобразования на всем интервале при поступлении на вход каждого нового отсчета, также производились вычисления при выходе каждого отсчета за правый край интервала исследования. Далее про-

изводились вычисления коэффициентов взаимной корреляции полученных результатов.

На рис. 2 представлены результаты вычисления коэффициента взаимной корреляции (Corr) по описанному выше алгоритму с использованием выражения (1). Использовалась матрица преобразования ДКП.

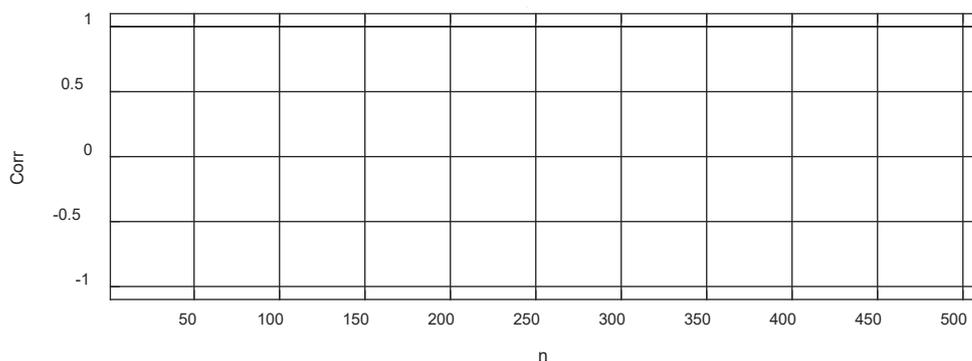


Рис. 4. Коэффициент взаимной корреляции при выполнении блочного ДКП с использованием ЦСМ при наличии 16 блоков

Количество вычислений в 2 раза больше в связи с динамическим появлением сигнала в интервале исследований и выходом из него. Рассчитываемый коэффициент близок нулю кроме двух значений.

На рис. 3 представлены результаты вычисления коэффициента взаимной корреляции с использованием выражений (2) и (3) при делении сигнала на 16 блоков.

Вычисления на основе выражений (2) и (3) при различном количестве блоков подтверждает тезис о неравенстве результатов при расчетах преобразований в прямом и обратном направлениях.

На рис. 4 представлены результаты вычисления коэффициента взаимной корреляции с использованием выражений (4) и при делении сигнала на 16 блоков.

На всем интервале исследований при динамическом изменении сигнала наблюдается коэффициент взаимной корреляции равный 1. Что подтверждает перспективность использования ЦСМ при выполнении дискретных преобразований. Такая же зависимость наблюдается при использовании выражения (5).

ВЫВОДЫ

Описаны различные результаты при выполнении дискретных преобразований при различных выборках отсчетов входных данных и изменениях в матрицах преобразования. Деление сигнала на блоки приводит к значительным изменениям в получаемых результатах. Предложено использование ЦСМ при выполнении дискретных преобразований. Применение ЦСМ позволяет внести качественные изменения в получаемые результаты, связанные с получением высокого значения коэффициента взаимной корреляции (практически равного 1) для прямой и обратной обработки на всем интервале выполнения преобразования при динамическом появлении сигнала в интервале исследований и выходом из него. Вычислительная сложность при этом останется прежней.

Выборка данных из блоков со сменой направления эквивалентна использованию ЦВМ, что позволяет разрабатывать электронные устройства для аппаратного выполнения дискретных преобразований с различными структурами, основанными как на выражениях (1) — (5), так и их модификациях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов: практический подход. Пер. с англ. — М.: Вильямс, 2017 г. — 992 с.
2. Gnutti A., Guerrini F., Leonardi R. Representation of signals by local symmetry decomposition // Proceedings of Signal Processing Conference (EUSIPCO). — 2015. — P. 983–987.
3. Солонина А.И. Описание связей между последовательностями дельта-импульсов и числовыми последовательностями на основе симметричных рядов Фурье // Цифровая обработка сигналов. — 2010. — № 2. — С. 2–6.
4. Lao Y., Parh K.K. Canonic FFT flow graphs for real-valued even/odd symmetric inputs // EURASIP Journal on Advances in Signal Processing. — 2017. — No. 45. — P. 1–23.
5. Пономарева О.В. Неинвариантность скользящего энергетического параметрического Фурье-спектра действительных тональных сигналов // Цифровая обработка сигналов. — 2014. — № 2. — С. 7–14.
6. Derrode S., Ghorbel F. Robust and efficient Fourier-Mellin transform approximations for invariant grey-level image description and reconstruction // Computer Vision and Image Understanding. — 2001. — No. 83(1). — P. 57–78.

7. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Линейная алгебра. — М.: Физматлит, 2004. — 278 с.
8. Mukhopadhyay J. Image and video processing in the compressed domain. — New York: Taylor and Francis Group, 2011. — P. 263.
9. Shoberg A.G., Shoberg K.A. Influence of execution of orthogonal block transform types and results of comparison // Journal of Physics: Conference Series. — 2018. — Vol. 1015. — P. 1–5.
10. Bhatt V., Petwaland K.C., Kumar S. A note on factorization for centro-symmetrical matrices that preserves centro-symmetry // Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2020. — Vol. 8(2). — P. 272–290.
11. Weaver J.R. Centrosymmetric (cross-symmetric) matrices, their basic properties, eigen-values, and eigenvectors // The American Mathematical Monthly. — 1985. — Vol. 92. — No. 10. — P. 711–717.
12. Elumalai N., Arthi B. Properties of k — centrosymmetric and k — skew centrosymmetric matrices // International Journal of Pure and Applied Mathematical Sciences. — 2017. — Vol. 10. — No. 1. — P. 99–106.
13. Tao D., Yasuda M. A spectral characterization of generalized real symmetric centrosymmetric and generalized real symmetric skew-centrosymmetric matrices // Matrix Analysis and Applications. — 2002. Vol. 23. — No. 3. — P. 885–895.

© Шоберг Анатолий Германович (shoberg@rambler.ru), Чепурко Сергей Александрович (shepurkoj@gmail.com).

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»



Тихоокеанский государственный университет