DOI 10.37882/2223-2966.2025.07.30

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ ЛОКАЛЬНЫХ КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЕЙ

A STUDY OF RELIABILITY INDICATORS OF LOCAL COMPUTER NETWORKS BY MEANS OF A MATHEMATICAL MODEL

I. Sakash

Summary. The need for high -quality work of information transmission networks requires the creation of mathematical models for calculating the reliability parameters of their functioning. The operation of mass service using the Markov process, which has an integer number of states, is implemented for this. The work of a local computer network, which includes various switches, is presented as a closed mass service system with waiting. The mathematical model for the analysis of the reliability of technical equipment, which contains formulas that evaluate the integrated indicators of the stable operation of the observed device, was formed. An example of a three -level network, which has two nucleus switches, two distribution switches and three access switches, is demonstrated. Modification of the components of a local computer network, which have the opportunity to appear hardware failures, is used. [4, 10] The reduction in the calculation time in the model occurs due to calculations on simpler analytical expressions and due to the lack of the need to calculate the probability of finding a mass service system in all possible conditions. The results obtained with this model are presented. They help improve the reliability of the hardware structure of local computer networks during their design, as well as when improving existing technical systems.

Keywords: local network reliability, probability, reliability model, Markov model, Kolmogorov-Chapman equation system.

Сакаш Ирина Юрьевна
кандидат технических наук, Красноярский государственный аграрный университет
stella93@yandex.ru

Аннотация. Необходимость в высококачественной работе сетей передачи информации требует создания математических моделей вычисления параметров надежности их функционирования. Для чего реализована операция массового обслуживания при содействии Марковского алгоритма, который располагает дискретной последовательностью состояний. Деятельность локальной компьютерной сети, которая включает различные коммутаторы, продемонстрирована как замкнутая система массового обслуживания с ожиданием. Была сформирована математическая модель анализа надежности технического оборудования, которая содержит формулы, оценивающие комплексные показатели устойчивой работы наблюдаемого устройства. Продемонстрирован пример трехуровневой сети, которая обладает двумя коммутаторами ядра, двумя коммутаторами распределения и тремя коммутаторами доступа. Использована модификация составляющих локальную компьютерную сеть, у которых есть возможность появиться аппаратным сбоям. [4, 10] Сокращение времени на вычисления в модели происходит за счет проведения расчетов по более простым аналитическим выражениям и за счет отсутствия необходимости вычислять вероятности нахождения системы массового обслуживания во всех возможных состояниях. Деятельность локальной компьютерной сети, которая включает различные коммутаторы, продемонстрирована как замкнутая система массового обслуживания с ожиданием.

Ключевые слова: надежность локальных сетей, вероятность, модель надежности, Марковская модель, система уравнений Колмогорова-Чепмена.

Введение

Сети передачи данных используются практически во всех отраслях человеческой деятельности. Многие организации имеют собственные локальные сети для пересылки и хранения своих данных. Неполадки в работе сети могут привести к различным негативным последствиям. Следовательно, точный анализ характеристик надежности новых сетей необходим для создания инструментов их проектирования и поэтому это относится к важным проблемам в сфере деятельности информационных технологий. В статье разбирается расчетная математическая модель нахождения параметров надежности функционирования локальных компьютерных сетей, чтобы найти вероятность их качественной работы и интервал времени, когда сеть неисправна в течение года, в зависимости от архитектуры аппаратной части [1–4]. Модель способна рассчитывать показатели надежности сетей передачи данных с всевозможным количеством различных уровней коммутаторов [2–5]. Вычисления вероятности функционирования каждого уровня архитектуры аппаратной части в отдельности для оценки показателей надежности сети в целом осуществляются на первом шаге алгоритма. Очевидно, что математическая модель может быть использована для проведения исследований в целях оптимизации архитектуры локальных компьютерных сетей как на этапе их проектирования, так и для уже функционирующих сетей.

Цель и задачи исследования

Исполнить процедуру массового обслуживания посредством Марковского процесса с целочисленным рядом состояний для определения значений надежности работы. Предложить к использованию работу локальной сети, содержащей различные коммутаторы, как замкнутую систему массового обслуживания с ожиданием. Для чего задать математическую модель диагностики надежности технического оборудования. Показать формулы для мониторинга комплексных показателей надежности работы наблюдаемого устройства. Продемонстрировать аналогичный пример. Воспользоваться теми модификациями, составляющих локальной сети, в которых есть возможность появиться аппаратным сбоям [4, 10].

Методология

1. *Модель Маркова восстанавливаемого объекта*

Возьмем восстанавливаемый объект, у которого есть активности отказов ν и восстановления μ.

Модель Маркова надежности объекта изображена на рис. 1.

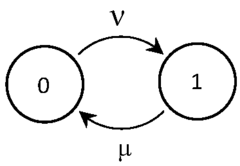

Рис. 1. Модель Маркова восстанавливаемого объекта

Математическая модель (равенства Колмогорова–Чепмена):

$$P_0(0) = 1;\ P_1(0) = 0;\ P_0(t) + P_1(t) = 1;$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\nu \cdot P_0(t) + \mu \cdot P_1(t);$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \nu \cdot P_0(t) + \mu \cdot P_1(t);\ \rho = \frac{\nu}{\mu}.$$

Модели массового обслуживания зависят от класса случайных процессов, очерчивающих процесс обслуживания.

Модель Маркова предоставления услуг — это изложение операции массового обслуживания методом Марковской процедуры с дробным числом состояний.

Если $\rho = \frac{\nu}{\mu} \le 1$, то имеем стационарный режим, а работа системы массового обслуживания изображается набором линейных равенств.

Равенства для стационарного режима:

$$P_0 \cdot \nu = P_1 \cdot \mu;$$

$$P_1 = \frac{\nu}{\mu} \cdot P_0 = \rho \cdot P_0;$$

$$P_0 + P_1 = 1;\ \rho = \frac{\nu}{\mu}.$$

Результат решения системы линейных уравнений для предложенного режима:

$$P_0 + P_1 = 1;$$

$$P_0 + \rho \cdot P_0 = 1;\ P_0 \cdot (1 + \rho) = 1;$$

$$P_0 = \frac{1}{1+\rho};\ P_1 = \rho \cdot P_0 = \frac{\rho}{1+\rho}.$$

2. *Модель Маркова для двух самостоятельных настраиваемых компонентов*

Пусть два регулируемых компонента располагают равнозначными активностями сбоев и восстановлений.

Формулой распределения Пуассона можно записать время между двумя ближайшими повреждениями с параметром ν, а экспоненциальным правилом распределения с параметром μ запишем время между двумя соседними исправлениями.

Указанные объекты могут приходить в неисправное состояние и возобновлять работу без всяких условий независимо друг от друга.

На рисунке 2 изображена модель надежности Маркова.

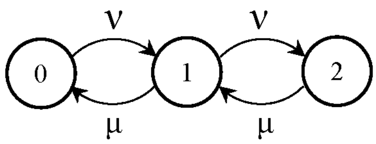

Рис. 2. Модель Маркова для двух независимых восстанавливаемых объектов

Набор равенств Колмогорова-Чепмена):

$$P_0(0) = 1;\ P_1(0) = 0;\ P_2(0) = 0;$$

$$P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1;$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\nu \cdot P_0(t) + \mu \cdot P_1(t);$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \nu \cdot P_0(t) - (\nu + \mu) \cdot P_1(t) + \mu \cdot P_2(t);$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -\nu \cdot P_1(t) - \mu \cdot P_2(t);\ \rho = \frac{\nu}{\mu}.$$

Математическая расчетная модель для постоянного режима:

$$P_0 \cdot \nu = P_1 \cdot \mu;$$

$$P_1 \cdot \left(\nu + \mu\right) = \nu \cdot P_0 + \cdot\mu \cdot P_2;$$

$$P_1 \cdot \nu = P_2 \cdot \mu;$$

$$P_0\left(t\right) + P_1\left(t\right) + P_2\left(t\right) = 1; \rho = \frac{\nu}{\mu}.$$

Решение системы равенств для постоянного режима:

$$P_0 \cdot \nu = P_1 \cdot \mu;$$

$$P_1 = \frac{\nu}{\mu} \cdot P_0 = \rho \cdot P_0;$$

$$P_1 \cdot \left(\nu + \mu\right) = \nu \cdot P_0 + \cdot\mu \cdot P_2;$$

$$P_1 \cdot \nu + P_1 \cdot \mu = \nu \cdot P_0 + \cdot\mu \cdot P_2;$$

$$\rho \cdot P_0 \cdot \nu + \rho \cdot P_0 \cdot \mu = \nu \cdot P_0 + \cdot\mu \cdot P_2;$$

$$\mu \cdot P_2 = -\nu \cdot P_0 + \rho \cdot P_0 \cdot \nu + \mu \cdot \rho \cdot P_0;$$

$$P_2 = -\frac{\nu}{\mu} \cdot P_0 + \rho^2 \cdot P_0 + \rho \cdot P_0; \; P_2 = \rho^2 \cdot P_0;$$

$$P_0 + \rho \cdot P_0 + \rho^2 \cdot P_0 = 1;$$

$$P_0 \cdot \left(1 + \rho + \rho^2\right) = 1; \; P_0 = \frac{1}{1 + \rho + \rho^2};$$

$$P_1 = \rho \cdot P_0 = \frac{\rho}{1 + \rho + \rho^2}; \; P_1 = \rho^2 \cdot P_0 = \frac{\rho^2}{1 + \rho + \rho^2}.$$

3. *Описание модели Маркова для некоторого числа свободных настраиваемых объектов*

Алгоритм работы набора свободных налаживаемых объектов, то есть коммутаторов сети, — это поочередное изменение состояний в указанный период времени Δt.

Математические методы концепции массового обслуживания можно применить для представления этого процесса.

Например, возьмем m настраиваемых объектов с одинаковыми активностями сбоёв ν и налаживания μ.

Формулой распределения Пуассона с параметром ν можно записать время между двумя ближайшими повреждениями, а экспоненциальным правилом распределения с параметром μ запишем время между двумя соседними налаживаниями.

Перечисленные объекты могут стать нерабочими и возобновлять работу без всяких условий независимо друг от друга.

Модель надежности Маркова изображена на рисунке 3.

Система равенств Колмогорова-Чепмена:

$$P_0\left(0\right) = 1;$$

$$P_1\left(0\right) = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$P_m\left(0\right) = 0;$$

$$\sum_{i=0}^{n} P_i\left(0\right) = 1; \qquad (1)$$

$$\frac{dP_0\left(t\right)}{dt} = -\nu \cdot P_0\left(t\right) + \mu \cdot P_1\left(t\right);$$

$$\frac{dP_1\left(t\right)}{dt} = \nu \cdot P_1\left(t\right) - \left(\nu + \mu\right) \cdot P_1\left(t\right) + \mu \cdot P_2\left(t\right); \; \rho = \frac{\nu}{\mu}.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$\frac{dP_m\left(t\right)}{dt} = \nu \cdot P_{m-1}\left(t\right) - \mu \cdot P_m\left(t\right).$$

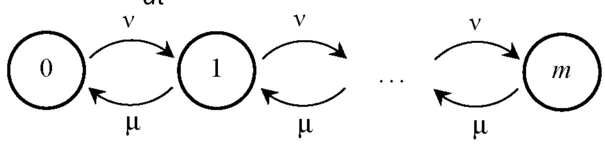

Рис. 3. Марковская модель набора свободных настраиваемых объектов

Фиксированный режим есть при $\rho = \frac{\nu}{\mu} \le 1$, а система линейных равенств показывает функционирование структуры массового обслуживания.

Итог подсчитывания переменных системы линейных равенств для i-го типа объектов получим, если записать ее в формате:

$$\begin{cases} -\nu_i \cdot P_0^i = \mu_i \cdot P_1^i \\ \left(\nu_i + \mu_i\right) \cdot P_k^i = \nu_i \cdot P_{k-1}^i + \mu_i \cdot P_{k+1}^i, \\ \nu_i \cdot P_{m_i-1}^i = \mu_i \cdot P_{m_i-1}^i \end{cases} \qquad (2)$$

где P_k^i вероятность того, что структура находится в a_k^i-ом состоянии.

Определяем новые обозначения:

$$z_k = \nu_i \cdot P_k^i - \mu_i \cdot P_{k+1}^i. \qquad (3)$$

В новых обозначениях система (2) выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{k-1} - z_k = 0; 0 < k < m_i \\ z_{m_i-1} = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Оценка удовлетворения системы уравнений (2) виду (4):

$$z_0 = \nu_i \cdot P_0^i - \mu_i \cdot P_1^i = 0;$$

$$\begin{aligned} z_{k-1} - z_k &= \nu_i \cdot P_{k-1}^i - \mu_i \cdot P_k^i - \nu_i \cdot P_k^i + \mu_i \cdot P_{k+1}^i = \\ &= \nu_i \cdot P_{k-1}^i + \mu_i \cdot P_{k+2}^i - \left(\nu_i + \mu_i\right) \cdot P_k^i = 0 \end{aligned};$$

$$z_{m_i-1} = \nu_i \cdot P_{m_i-1}^i - \mu_i \cdot P_{m_i}^i = 0.$$

Следовательно:

$$\nu_i \cdot P_k^i = \mu_i \cdot P_{k+1}^i.$$

Откуда:

$$P_{k+1}^i = \frac{\nu_i}{\mu_i} \cdot P_k^i.$$

Так как:

$$P_1^i = \frac{\nu_i}{\mu_i} \cdot P_0^i;$$

$$P_k = \rho_i^k \cdot P_0,$$

где $\rho = \frac{\nu}{\mu}, \rho_i = \frac{\nu_i}{\mu_i}.$

Если вычислить P_0^i из условия нормировки, то приобретем решение системы равенств (2) в окончательном случае:

$$P_k^i = \frac{\rho_i^k}{\sum_{k=0}^{m_i} \rho_i^k}. \qquad (5)$$

4. *Оценка критериев надежности локальных компьютерных сетей*

m_1 коммутаторов ядра, m_2 коммутаторов распределения и m_3 коммутаторов уровня доступа включены в сеть.

Соединение с сетью Интернет и локальной сетью реализовывается посредством коммутаторов ядра, которые соединены с коммутаторами распределения.

Все коммутаторы доступа соединены со всеми коммутаторами распределения, но не объединены друг с другом.

Если любой коммутатор доступа поврежден, или прерван контакт с одним из коммутаторов доступа с серверами или сетью Интернет, вся сеть целиком считается недействующей.

Активность появления неисправностей ν_1 и активностью налаживания μ_1.принадлежит коммутаторам ядра.

Активность отказов ν_2 и ν_3 и активность восстановления μ_2 и μ_3 относятся к коммутаторам распределения и коммутаторам доступа.

Три самостоятельных набора объектов имеет в своем составе трехступенчатая сеть: набор коммутаторов ядра, набор коммутаторов распределения и набор коммутаторов уровня доступа.

Локальная сеть будет результативной при ограничении один, что хотя бы один коммутатор ядра исправен.

Сложение вероятностей от нулевой позиции до предпоследней в Марковской модели надежности набора из m_1 объектов найдем это.

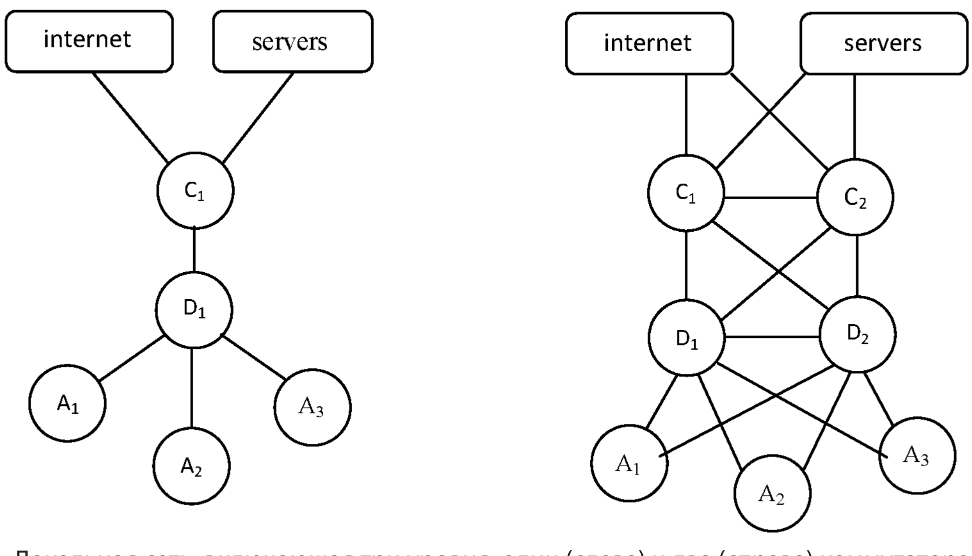

Рис. 4. Локальная сеть, включающая три уровня, один (слева) и два (справа) коммутатора ядра, один (слева) и два (справа) коммутатора распределения и по три коммутатора уровня доступа

$$P^1 = 1 - \frac{\rho_1^{m_1}}{\sum_{k=0}^{m_1} \rho_1^k},$$

где P^1 — вероятность того, что первое ограничение выполнено для трёхступенчатой локальной сети с одним ядром и одной подгруппой распределения;

m_1 — число коммутаторов ядра;

$$\rho_1 = \frac{\nu_1}{\mu_1};$$

$\frac{\rho_1^{m_1}}{\sum_{k=0}^{m_i} \rho_1^k}$ — вероятность конечного состояния в модели надежности Маркова представленной группы объектов.

Если ограничение два, что, хотя бы один коммутатор распределения исправен, выполнено, то локальная сеть будет работоспособной.

Сумма вероятностей от нулевого положения до предпоследнего положения в Марковской модели надежности набора из m_2 объектов позволит найти приемлемость этой работоспособности.

$$P^2 = 1 - \frac{\rho_2^{m_2}}{\sum_{k=0}^{m_2} \rho_2^k},$$

где P^2 — вероятность осуществления второго ограничения работоспособности трёхступенчатой локальной сети с ядром и одной подгруппой распределения;

m_2 — количество коммутаторов распределения;

$$\rho_2 = \frac{\nu_2}{\mu_2};$$

$\frac{\rho_2^{m_2}}{\sum_{k=0}^{m_2} \rho_2^k}$ — вероятность последнего состояния в модели надежности Маркова описанной группы объектов.

Вероятность нулевого положения в Марковской модели надежности набора из m_3 объектов покажет допустимость этой работоспособности.

$$P^3 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{m_3} \rho_3^k},$$

где P^3 — вероятность реализации ограничения три работоспособности трёхступенчатой локальной сети с одним ядром и одной подгруппой распределения;

m_3 — число коммутаторов доступа;

$$\rho_3 = \frac{\nu_3}{\mu_3}.$$

Формула в окончательном виде для нахождения вероятности функционирования трёхступенчатой сети.

$$P_{\text{net}} = P^1 \cdot P^2 \cdot P^3 = \left(1 - \frac{\rho_1^{m_1}}{\sum_{k=0}^{m_1} \rho_1^k}\right) \cdot \left(1 - \frac{\rho_2^{m_2}}{\sum_{k=0}^{m_2} \rho_2^k}\right) \cdot \frac{1}{\sum_{k=0}^{m_3} \rho_3^k}\ .$$

(6)

Пример. Представим трёхступенчатую сеть, которая обладает одним коммутатором ядра, одним коммутатором распределения и тремя коммутаторами доступа (рис. 4 слева) ($m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 3$).

Дополним данную сеть вторым коммутатором ядра и вторым коммутатором распределения, так как наша цель усовершенствовать выносливость сети (рис. 4 справа) ($m_1 = 2, m_2 = 2, m_3 = 3$).

Активность сбоев коммутатора ядра — $\nu_1 = \frac{1}{8760}$ ч$^{-1}$ (в среднем коммутатор ядра бывает неисправным один раз в год), а активность отладок — $\mu_1 = \frac{1}{24}$ ч$^{-1}$ (отладка коммутатора ядра происходит в течение одних суток в среднем).

Активность сбоев коммутатора распределения — $\nu_2 = \frac{1}{8760}$ ч$^{-1}$, а активность работоспособности — $\nu_2 = \frac{1}{8760}$ ч$^{-1}$.

Активность выходов из строя коммутатора доступа — $\nu_3 = \frac{1}{8760}$ ч$^{-1}$, а активность его ремонта — $\mu_3 = 1$ ч$^{-1}$ (коррекция коммутатора занимает в среднем один час).

Уместно проанализировать показатели надежности сети до и после ее обновления (коэффициент исправности сети равен вероятности безотказной работы).

При заданных активностях выходов из строя и восстановлений:

$$\rho_1 = \frac{\nu_1}{\mu_1} = \frac{1}{365};\ \rho_2 = \frac{\nu_2}{\mu_2} = \frac{1}{1460};\ \rho_3 = \frac{\nu_3}{\mu_3} = \frac{1}{8760}.$$

Вероятность высокоустойчивой работы сети до модернизации определяется по выражению (6) при $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 3$.

$$P_{\text{net}} = P^1 \cdot P^2 \cdot P^3 = \\ = \left(1 - \frac{\rho_1^2}{1 + \rho_1 + \rho_1^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\rho_2^2}{1 + \rho_2 + \rho_2^2}\right) \cdot \frac{1}{1 + \rho_3} = \\ = 0,996471.$$

После усовершенствования (при $m_1 = 2, m_2 = 2, m_3 = 3$):

$$P_{\text{net}} = P^1 \cdot P^2 \cdot P^3 = \\ = \left(1 - \frac{\rho_1^2}{1 + \rho_1 + \rho_1^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\rho_2^2}{1 + \rho_2 + \rho_2^2}\right) \cdot \frac{1}{1 + \rho_3} = \\ = 0,999878.$$

Повышение усредненного числа часов неисправности сети в год найдем по формуле:

$$8760 \cdot \left(1 - k_{ntt}\right).$$

Менее 31 часа неработоспособности сети в год получаем до усовершенствования, а после — около 1 часа в год.

Заключение

Вероятность работоспособности локальных компьютерных сетей не для всей системы в целом, а сначала для отдельных уровней архитектуры аппаратной части можно оценить с помощью представленной в статье математической модели.

Это обстоятельство дает ряд преимуществ при дальнейшем использовании математической модели в алгоритмах оптимизации в качестве либо целевой функции, либо ограничения.

Сокращение времени на вычисления происходит за счет, во-первых, проведения расчетов по более простым аналитическим выражениям, а во-вторых, за счет отсутствия необходимости вычислять вероятности нахождения системы массового обслуживания во всех возможных состояниях.

Результаты, полученные с помощью представленной модели, способствуют в большей степени воздействовать на надежность структуры аппаратной части локальных сетей во время их проектирования и при усовершенствовании уже имеющихся технических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Доброхвалов М. О. и др. Анализ подходов к моделированию систем массового обслуживания // Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2021. № 5. С. 56–64.
2. Вадейко, В.С. Манько А.В. Марковская модель надежности // Белорусский национальный технический университет, Факультет информационных технологий и робототехники. Минск: БНТУ. 2022. С. 222–225.
3. Оразов М.Ш., Аннамурадов М.Т., Вепаев Ш.В. Исследование Марковских моделей обслуживания // Молодой ученый. 2022. № 49 (444). С. 26–28.
4. Копейка Е.А., Вербин А.В. Методический подход оценивания вероятности безотказной работы сложных технических систем с учетом характеристик системы контроля на основе байесовской сети доверия // Труды МАИ. 2023. № 128. DOI: 10.34759/trd-2023-128-22.
5. Сивопляс М.А. Марковская модель безопасности технического обслуживания сложной техники // Надежность и качество сложных систем. 2022. № 3. С. 49–53.
6. Бобков С.П., Астраханцева И.А., Волков В.С. Имитационное моделирование системы массового обслуживания с целью анализа ее работы // Современные наукоёмкие технологии. Региональное приложение. 2021. №3 (67). С. 58–62.
7. Ретюнских С.Н. Способ оценки структурной надёжности вычислительных компьютерных сетей. // Современные наукоёмкие технологии. Региональное приложение. 2022. №2. С. 86–91.
8. Беккалиева К.С. Исследование проблем надежности в сетях // Молодой ученый. 2023. № 49 (496). С. 22–24.
9. Кремер, Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика / Н.Ш. Кремер, Москва: Издательство Юрайт, 2023. 538 с.
10. Расулов М.М. Оценка надежности программного обеспечения // Актуальные научные исследования в современном мире. 2020. N 6 (62). С. 112–116.
11. А.В., Хизриев У.И. Исследование программного продукта по критериям надёжности // Современные научные исследования и инновации. 2022. № 11 [Электронный ресурс]. URL: https://web.snauka.ru/issues/2022/11/98945 (дата обращения: 10.04.2024).
12. Qiu N. et al. Infinite-failure Software Reliability Models Based on Non-homogeneous Markov Processes // Research Square. November 2023. Pp. 1–32. DOI:10.21203/rs.3.rs-3507541/v1
13. Sama U., Kumar A. A software reliability model incorporating fault removal efficiency and it's release policy // Computational Statistics. November 2023. DOI:10.1007/s00180-023-01430-9
14. Eze N., Ejikeme A., Guha K. RFID library management software dependability through reliable fault-detection and fault correction procedures // Microsystem Technologies. February 2024. DOI:10.1007/s00542-023-05607-6
15. Wang J., Zhang C. An Open-Source Software Reliability Model Considering Learning Factors and Stochastically Introduced Faults // Applied Sciences. January 2024. DOI:10.3390/app14020708