КРАТКИЙ ОЧЕРК ЭВОЛЮЦИИ РАННИХ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Андрианов Александр Львович
Соискатель, Московский финансово-промышленный университет
andrianovdance@gmail.com

Аннотация. статья изучает эволюцию алгоритмов решения задач линейного программирования (ЗЛП), и их влияния на развития математики. Центральная проблема, связующая исследования,— поиск полиномиального и эффективного метода решения ЗЛП. Анализируется вклад Левина А. Ю. (метод центрированных сечений Левина-Ньюмана), Немировского А. С. (метод описанных эллипсоидов), Хачияна Л. Г. (доказательство полиномиальной разрешимости ЗЛП на основании нового подхода). Показано значение работы Кармаркара Н., автора алгоритма, сходящегося к решению не по границе допустимого множества, а сквозь многогранник. Проанализирован вклад Левина Л. А., изучавшего универсальные задачи, сложность и сводимость комбинаторных проблем.

Ключевые слова: Линейное программирование, оптимизация, метод центрированных сечений Левина-Ньюмана, метод эллипсоидов, полиномиальная разрешимость, Левин, Немировский, Хачиян, Кармаркар.

A BRIEF SKETCH OF THE EVOLUTION OF THE EARLY METHODS OF LINEAR PROGRAMMING

A. Andrianov

Summary. It this paper the evolution of methods for the linear programming problem (LPP) and their influence on mathematics development is studied. The core problem, connecting many researches, was the polynomial and effective LPP solving method search. We analyze the contributions of Levin A. Y. (Levin-Newman method of central sections), Nemirovskii A. S. (ellipsoid method), L. G. Khachiyan (LPP polynomial-time solvability proof by introducing the innovational approach). The paper also considers the influence of N. Karmarkar's — the author of algorithm, converging to the solution by cutting through the feasible polyhedron instead of going along its boundary, as well as the contributions of Levin L. A., who investigated the universal problems, complexity and reducibility.

Keywords: Linear programming, optimization, Levin-Newman method of central sections, ellipsoid method, polynomial-time solvability, Levin, Nemirovskii, Khachiyan, Karmarkar.

Развитие линейного программирования (ЛП) началось и проходило параллельными курсами в СССР (в работах Л. В. Канторовича) и на Западе (в трудах Дж. Б. Данцига) и имело множество сходных моментов. Оба автора имели близкие взгляды на математику. Одна из известных фраз Данцига, написанная им в предисловии к его знаменитой книге 1963 года — «*Линейное программирование, его применение и обобщения*» звучит так: «*Решающая проверка для теории — её способность решать те задачи, которые породили её*». Точно также один из творческих принципов Петербургской–Ленинградской школы можно выразить фразой «*…нет ничего практичнее хорошей теории*». Леонид Витальевич, будучи её ярким представителем, подчёркивал: «*…для моей деятельности характерным является постоянное взаимопроникновение теории и практики*». В соответствии с этим, в обоих случаях толчком к развитию ЛП стали конкретные задачи, продиктованных практикой. При исследованиях внимание уделялось именно практической направленности результатов, их внедрению в приложения и развитию реально применимых алгоритмов, что прекрасно иллюстрирует цитата из той же книги Данцига: «Точка зрения этой работы конструктивна. Она отражает начало теории достаточно мощной для того, чтобы справиться с некоторыми из сложных задач по принятию решений, для которых она была создана» [1–4].

Само рассмотрение задачи с ограничениями типа неравенств уже стало новаторским (Лагранж, разработав правило множителей Лагранжа, изучал исключительно задачи с равенствами, причём только гладкие). Для общего случая выпуклой экстремальной задачи с неравенствами необходимое условие получил В. Каруш (*William Karush),* 1939 год, защитивший диссертацию в Чикаго. Однако, диссертация не была опубликована и осталась неизвестной. Позже необходимые условия получили Х. У. Кун (*H. W. Kuhn*) и А. У. Таккер (*A. W. Tucker*).

Помимо создания метода разрешающих множителей и симплекс метода (СМ), одним из важнейших достижений Канторовича и Данцига стало открытие ими огромного количества экономических задач, которые описываются ЛП, и осознание экономической интерпретации двойственной задачи (множители Лагранжа прямой задачи являются оптимальным решением для двойственной и наоборот). Также выяснилось: эта же математическая модель, кроме экономической, описывает также задачу управления. Большое практическое значение данных задач способствовало тому, что центральной проблемой стало изучение не только теоретического, но и практического решения данных вопросов и, в первую очередь, — развитие и исследование соответствующих алгоритмов. Данная статья касается преимущественно именно алгоритмов, разработанных для решения задач ЛП (ЗЛП), а также их влияния на развития математики в целом.

1. Левин Анатолий Юрьевич (1936–2007)

Один из замечательных результатов был получен А. Ю. Левиным, придумавшим в 1965 году метод центрированных сечений [5], который применим для поиска минимума не только линейной, но и произвольной выпуклой функции. Основной механизм работы его алгоритма таков ([6, с. 78–79]). Пусть нам необходимо решить общую проблему выпуклой конечномерной оптимизации: найти минимум выпуклой дифференцируемой функции f на выпуклом конечномерном компактном теле $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{d}}$: $\boldsymbol{f(x)} \to \mathbf{min}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$.

А. Ю. Левин и Д. Ньюман независимо придумали алгоритм на основе теоремы Грюнбаума-Хаммера. В соответствии с ней: если через центр тяжести выпуклого тела B в k-мерном пространстве провести гиперплоскость, она разделит его на множества, объём любого из которых будет не более $\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ объема B.

Алгоритм, известный как *метод центрированных сечений*, заключается в следующем. Обозначим B как B_0 и найдем его центр тяжести: $x_1 = gr\ B_0$. Далее найдём $f'(x_1)$. В случае, когда это — нулевой вектор, мы нашли решение. В противном случае отбросим ту часть B_n, которая попа-ла в полупространство $\Pi_0' = \{x: \langle f'(x_1), x - x_1 \rangle > 0\}$, поскольку в силу того, что f — гладкая и выпуклая, $f(x) - f(\xi) \geq \langle x - \xi, f'(\xi) \rangle$, откуда для $x \in B_0 \cap \Pi_0'$ очевидно, что $f(x) > f(x_1) \geq \min f$. После того, как мы отбросим $B \cap \Pi_0'$, назовём оставшееся множество B_1 и произведём с ним те же действия. Продолжив действовать таким методом, построим последовательность множеств $B_0, B_1, B_2\dots$ и их центров тяжести $x_1, x_2, x_3\dots$ На каждой итерации будем выбирать y_i из $\{x_1, \dots, x_i\}$, где значение f не больше каждого из $\{f(x_j), 1 \leq j \leq i\}$. Можно показать сходимость $f(y_i)$ к значению задачи со скоростью геометрической прогрессии.

Основная проблема данного алгоритма заключается в том, что поиск центра тяжести — сам по себе является трудной задачей. Именно это препятствовало его применению на практике. Тем не менее, основная концепция алгоритма нашла дальнейшее применение и привела к созданию методов, получивших широкое промышленное применение, о чём речь пойдет далее (кроме того, 17-ю годами позже была показана полиномиальная скорость данного алгоритма в ЗЛП [7].

2. Немировский Аркадий Семенович.

Следующий краеугольный камень был заложен Немировским, который после защиты кандидатской диссертации попал в теоретический отдел одного московского института. Начальником отдела был профессор Д. Б. Юдин, который предложил ему исследовать «сложность задач математического программирования». Дмитрий Юдин обладал светлой интуицией, и именно он ставил эти задачи: в частности, задачу Левину, через Красносельского, поставил именно Юдин, а потом он предложил решать ту же самую задачу Немировскому. Однако, Немировский вёл свои исследования совершенно независимого от Левина и, более того, даже не знал о существовании работ последнего в этой области. В результате он пришёл к до некоторой степени близкому методу (в определённом смысле — некоторому варианту метода отсечения), получившему название «метод описанных эллипсоидов» [8–10]. В основе этого метода лежат две идеи. Первая из них — уже описанная идея отсечения. Вторая базируется на интересном наблюдении: существует *Löwner ellipsoid E*(*K*) — единственный эллипсоид наименьшего объёма, содержащим данное выпуклое тело K в своей внутренности. В частности, имеет место замечательный факт: *половину эллипсоида можно поместить в эллипсоид объёма меньшего, чем изначальный эллипсоид, причем* центр нового эллипсоида ищется по полуэллипсоиду за порядка d^2операций. Так, если K — поло-вина эллипсоида $K = E \cap H$, где $E = \{x \mid (x - z)^T Q^{-1} (x - z) \leq 1\}$, $H = \{x \mid a^T(x - z) \leq 0\}$ и z обозначает центр E, тогда $E(K) = \{x \mid (x - z)^T \bar{Q}^{-1} (x - \bar{z}) \leq 1\}$ может быть описан простой формулой:

$$\bar{z} = z - \frac{1}{n+1} Q\bar{a} \quad \text{и} \quad \bar{Q} = \frac{n^2}{n^2 - 1}\left(Q - \frac{2}{n+1} Q\bar{a}\bar{a}^T Q\right), \quad \text{где}$$

$\bar{a} = a / \sqrt{a^T Q a}$, n — размерность. И, кроме того, можно показать, что $vol\ (E\ (K)) / vol\ (E) \leq e^{-1/2n.}$ Таким образом, объём убывает в геометрической прогрессии с коэффициентом строго меньше единицы и зависит исключительно от размерности, а не каких-либо других параметров решаемой задачи.

Метод действует так [6, с. 79–80]: если перед нами опять стоит та же, что и в предыдущем пункте задача, то опишем вокруг B эллипсоид E_0. В случае, когда его центр x_0 лежит вне B, проведём через него гиперплоскость, не пересекающуюся с B, и отбросим полуэллипсоид, не пересекающийся с B. В случае же, когда $x_0 \in B$, найдём $f'(x_0)$ и сделаем отсечение согласно методу Левина-Ньюмана. В результате, у нас будет полу-эллипсоид, который назовем E_0'. И здесь мы, воспользовавшись вышеупомянутым фактом, опишем вокруг E_0' эллипсоид меньшего объёма, чем был у E_0, и назовём его E_1. Повторяя данную последовательность операций, получим сходящуюся со скоростью геометрической прогрессии последовательность. На каждом шаге объём эллипсоидов в последовательности $\{E_0, E_1, E_2, \ldots\}$ будет уменьшаться в зависимости от размерно-сти пространства в

$$\frac{k^k}{(k-1)^{\frac{k-1}{2}}(k+1)^{\frac{k+1}{2}}} < 1$$

раз для любого натурального $k \geq 2$.

3. Хачиян Леонид Генрихович (1952–2005)

После того как эти результаты Немировского были опубликованы, Л. Г. Хачиян, работавший в Вычислительном центре АН СССР, показал, что на основании метода эллипсоидов можно доказать полиномиальную разрешимость ЗЛП. Этот результат впервые появился в Докладах АН СССР в феврале 1979 [10]. Более подробное описание деталей данного открытия, несомненно, заслуживает внимания.

Чтобы прочувствовать значение сделанного Хачияном открытия и понять, почему к этому событию было приковано такое внимание, опишем кратко положение, сложившееся к тому моменту в этой области. ЛП стало широко применяться после того, как был заложен его алгоритмический и теоретический фундамент: некоторые экономические приложения существовали ещё со времени первой работы Канторовича (1939) на эту тему, в 1947 году Данциг создал СМ, а Фон Нейман (*von Neumann*) теорему двойственности. В 50-е годы альтернативные алгоритмы, преимущественно итеративные методы на базе фиктивной игры двух лиц, бросили вызов СМ, но метод отстоял своё доминирующее положение и оставался основным методом решения в 50-е и 60-е годы. Несмотря на ошеломительный триумф СМ в приложениях, его эффективность вскоре была поставлена учёными-теоретиками под сомнение. В фокус внимания математиков попал вопрос о полиномиальности алгоритма. В результате были найдены примеры (например, в статьях В. Кли (*Victor Klee*) и Г. Минти (*George Minty*)), которые продемонстрировали, что в самом плохом варианте входных условий, СМ может демонстрировать экспоненциальную зависимость количества шагов своего исполнения от длины закодированных исходных данных. Данное обстоятельство инициировало работу теоретиков: Д. Р. Эдмондс (*Jack R. Edmonds*) в 1965 году, С. Кук (*Stephen Cook*) в 1971 году и Р. М. Карп (*Richard Manning Karp*) в 1972 году получили ряд результатов в теории сложности, которые лишь усугубили ситуацию, показав, что, несмотря на свою принадлежность к пересечению классов *NP и co-NP*, задача разрешимости ЛП всё ещё не имела никакого алгоритма с доказанной полиномиальностью времени исполнения. Задача разрешимости ставится следующим образом: даны *m* линейных неравенств с *n* неизвестными, все с рациональными коэффициентами, надо узнать имеет ли эта система допустимое решение или она несовместна. Многие исследователи пытались найти полиномиальную версию СМ. И хотя обновлённые версии остаются высоко конкурентоспособными по сравнению с более поздними методами, базирующимися на внутренней точке, и являются неотъемлемой частью арсенала любого оптимизатора, они по-прежнему имеют экспоненциальное поведение в определённых случаях. В какой-то мере их хорошее поведение при решении реальных практических задач было объяснено разными авторами с помощью анализа ожидаемого поведения. Вопрос о полиномиальности или неполиномиальности был, в определённом смысле, центральной проблемой.

Естественно, в таком историческом контексте результат Хачияна, получившего решение применением модификации метода отсечений, и доказавшего тем самым (1979), что ЗЛП может быть решена за полиномиальное время, стал прорывом, сделав автора знаменитым почти мгновенно. Столь бурная реакция на его открытие объясняется не только самим заявленным и доказанным результатом (полиномиальность ЛП), но и тем способом, каким она была доказана. Хачиян прибёг к использованию метода эллипсоидов и аппроксимированию многогранного допустимого множества при помощи эллипсоидов. В то время было абсолютно новой идеей, которая представила совершенно необычный и, можно даже сказать, противоположный ставшему уже традиционному подходу — решение проблемы в терминах вершин, рёбер, фазы и конечной сходимости к точному решению в точной арифметике. Всем этим моментам новый подход противопоставил парадигму, в которой предлагалось в качестве отправного пункта взять гигантские сферы, а затем строить последовательно уменьшающиеся эллипсоиды до тех пор, пока один из них не станет достаточно мал для того, чтобы, округлив координаты его центра, можно было получить решение.

Как уже было сказано, для решения проблемы сложности ЗЛП Хачиян применил метод эллипсоида Немировского. По ходу дела ему пришлось преодолеть ряд сложностей: алгоритм изначально создавался для модели с действительными числами, а ему нужна была оценка расстояния до оптимального решения. Хачияну необходимо было установить некоторое количество ограничений на величины решений, объёмы многогранников, и точность, необходимую для проведения расчётов. Использование такого метода для ЛП было совершенно неочевидным. Кроме того, данная процедура решения включает вычисление квадратного корня из рационального числа, который может быть иррациональным, что приводит к сложным проблемам при вычислениях и численном решении. Однако, Хачиян заметил: достаточно использовать вышеприведённые формулы приближенно, проводя вычисления только с точностью до $O(nL)$ бит, где L — длина бинарного кода (подаваемого на входе вычислительного алгоритма) системы рациональных неравенств, чью согласованность мы хотим проверить. Он также показал, что если система разрешима, то она имеет решение внутри шара радиуса 2^{L} и что в случае её несовместимости минимальное отклонение в каждой точке составляет по меньшей мере 2^{-L}. Исходя из этих наблюдений и геометрического уменьшения объёма, он смог показать, что центр последовательности эллипсоидов, получаемой в результате применения этого подхода, станет допустимым максимум за $16n2^{L}$ итераций, если система совместимая. Поскольку ранее ничего подобного в ЛП не применялось, подход мог показаться даже «диким» в условиях существования известного конечного решения через применение преобразований к матрице.

Всё это вызвало бурную реакцию в средствах массовой информации. ЛП уже имело огромное значение для промышленности, армии и бизнеса, поэтому ведущие мировые газеты стремились донести до читателей важность полученного результата. Иногда это даже приводило к курьёзным ситуациям. Так New York Times опубликовала статью о результатах Хачияна, в которой были так сильно преувеличены вытекающие из них последствия, что это вызвало подозрения даже у советских властей, особенно из-за сравнения результата Хачияна с «русским спутником». Хачияна даже вызвали для дачи показаний в Государственный комитет по науке и технике, где он решительно отрицал какую-либо связь своего «спутника» с космическим. О резонансе в академических кругах и говорить не стоит. Появилось множество попыток построить на новой основе метод для практического решения крупномасштабных ЗЛП. К сожалению, в целом их можно охарактеризовать как не очень успешные. Отчасти это можно объяснить тем, что алгоритм, по-видимому, требует количества итераций, близкого к худшей границе. Тем не менее, несколько исследователей (например, Мартин Грётшель (*Martin Grötschel*), Ласло Ловас (*László Lovász*) и Александр Схрейвер (*Alexander Schrijver*)) осознали потенциал метод эллипсоида для прогресса в области комбинаторной оптимизации.

Интересно, что сам Хачиян был удивлен ошеломительным эффектом своего результата и тем, что одного анонса в Докладах АН СССР о полиномиальности ЗЛП оказалось достаточно, чтобы принести ему всемирную славу. В 1982 году Международное общество математического программирования (*Mathematical Optimization Society*) и Американское математическое общество (*American Mathematical Society*) наградили А. Немировского, Л. Хачияна и Д. Юдина Фалкерсоновской премией (*Fulkerson Prize*) за статьи, в которых содержались результаты, позволившие получить полиномиальный алгоритм для ЗЛП) [11].

4. Кармаркар Нарендра

После защиты в 1983 году диссертации на степень доктора философии (*Ph.D.*) по компьютерным наукам (*Computer Science*) под руководством Р. М. Карп в университете Беркли в Калифорнии, Кармаркар начал работать в лаборатории Белла, где в 1984 году [12] создал алгоритм, решающий ЗЛП за полиномиальное время. Предыдущие методы заключались в представлении задачи многогранником и последующем приближении к решению путём путешествия по вершинам. Алгоритма же Кармаркара идёт к решению не по границе допустимого множества, а сквозь многогранник, что значительно ускоряет решение трудоёмких задач оптимизации. Данный подход стимулировал разработку класса методов внутренней точки (целого семейства алгоритмов для решения задач линейной и нелинейной выпуклой оптимизации).

Первым такой метод для ЛП выдвинул Фон Нейман, но его алгоритм не дал ни полиномиальной теоретической границы, ни эффективности на практике, где уступал (тоже неполиномиальному) СМ. С другой стороны, как уже сказано, метод эллипсоида Хачияна был полиномиален, но оказался не эффективен практически. Если n — число неизвестных, L — число бит для кодирования входных данных, алгоритм Кармаркара [13, 14] требует $O(n3^{.5L})$ операций, а метод эллипсоида — $O(n6^{L})$. Алгоритм Кармаркара стал первым, продемонстрировавшим существование метода с теоретической полиномиальностью и реальной эффективностью, способной превзойти СМ. Кроме того, он может быть распространён также и на выпуклое программирование.

Дополнительным вкладом стало возрождение интереса к изучению методов внутренней точки и барьеров (Ю. Нестеров и А. Немировский предложили специальный класс барьеров, применимых к любому выпуклому множеству и гарантирующих, что число итераций алгоритма ограничено полиномом от размерности и точности решения).

5. Левин Леонид Анатольевич

В 1970 году Левин написал трехстраничную заметку [15], которая была опубликована лишь тремя годами позже. Чуть ранее (1971) в США вышла статья С. Кука «*The complexity of theorem proving procedures*» [15]. За ней последовала работа другого американца Р.М. Карпа «Сводимость комбинаторных проблем» [16] со списком из 21-й *NP*-полной (*NPC*) задачи, обратившая опять интерес к статье Кука. В СССР об этом тогда никто не подозревал, а Левин несколько по-другому смотрел на те же вопросы: изучая задачи поиска, где надо не только установить существование решения, но и найти его, он описал 6 подобных *NPC* задач поиска (на них ещё ссылаются как на универсальные задачи). Вместе с этим для каждой из них был найден метод решения с оптимальным временем (в частности, эти алгоритмы осуществимы за полиномиальное время тогда и только тогда, когда справедлива гипотеза о равенстве *P* и *NP*).

Теорема Кука–Левина утверждает, что задача выполнимости булевых формул относится к классу *NPC*, то есть любая задача из *NP* может быть сведена за полиномиальное время с помощью детерминированной машины Тьюринга к задаче определения выполнимости булевой формулы. Пример такой задачи — булево высказывание, комбинирующее булевы переменные с использованием булевых операторов. Высказывание выполнимо, если существует некоторый набор значений истинности для переменных, который делает всё выражение истинным. За эти работы Кук и Карп получили премию Тьюринга. Важное следствие — если существует детерминированный полиномиальный алгоритм решения задачи выполнимости булевых формул, то существует аналогичный алгоритм решения всех *NP* задач, а значит, тоже самое следует для любой *NPC* задачи.

Данные работы стали новаторскими и определили вектор исследований, продемонстрировав универсальные задачи, из полиномиальной разрешимости которых следует полиномиальная разрешимость любой переборной задачи. К данному моменту нашли свыше 2000 подобных задач, а также технику сводимости для проверки «универсальности» любой новой задачи, которая позволяет не изучать её отдельно, а просто проверить сводится ли она к одной из уже известных задач. Фокус исследований переместился к поиску полиномиального метода решения любой универсальной задачи (в случае чего *NP* совпадет с *P*) или доказательства её полиномиальной неразрешимости (в следствие чего универсальные задачи окажутся в классе, принадлежащем *NP*, но за пределами *P*). Это один из главных открытых вопросов, расцениваемый ныне как важнейшая нерешенная проблема теории вычислительной сложности (за него даже назначена Премия Тысячелетия в $1млн).

Несмотря на то, что теория линейных неравенств могла возникнуть на заре математики (так как изучение неравенств — абсолютно естественное развитие теории СЛУ, изучение которых исчисляется тысячелетиями), произошло это сравнительно недавно. Компенсируя эту задержку, развитие теории в XX веке приняло чрезвычайно бурный характер: вслед за единичными работами XIX и первой четверти XX века, последовал огромный поток работ. В СССР долгое время в этой области работали лишь её первооткрыватель Канторович и маленькая группа его учеников. На Западе же вовлечение в новую отрасль имело неслыханный масштаб. Однако, со временем учёные СССР подхватили эстафету и внесли поистине огромный вклад в развитие направления. И, что замечательно, все они (Хачиян, Юдин, Немировский, Нестеров) получили мировое признание, что ещё раз свидетельствует о значимости их вклада.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андрианов А. Л. Развитие линейного программирования в ранних работах Л. В. Канторовича // Историко-математические исследования. Вторая серия. Выпуск 13 (48). — М.: «Янус-К», 2009. — С. 323–339.
2. Андрианов А.Л. Л. В. Канторович как создатель линейного программирования // Вопросы истории естествознания и техники. — 2009. — № 4. — С. 77–89.
3. Andrianov A. (2011) The full Monge problem solution based on the linear programming (LP). Proceedings of the 8th Congress of the International Society for Analysis, its Applications, and Computation, pp.94–101
4. Андрианов А. Л. Дж.Б. Данциг и линейное программирование // Казанская наука. № 8. 2014. — Казань: Изд-во Казанский Издательский Дом, 2014. С. 19–23.
5. Левин А. Ю. Об одном алгоритме минимизации выпуклой функции // ДАН СССР, 160. № 6, 1965. С. 1241–1243.
6. Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения. Издание второе. УРСС, Москва, 2003.
7. Yamnitsky B., Levin L. (1982) An old linear programming problem runs in polynomial time. 23rd Annual Symposium of Foundations of Computer Science.pp.327–328.
8. Юдин Д. Б., Немировский А. С. Оценка информационной сложности задач математического программирования/Экономика и математические методы, т. XII, вып.. 1, стр. 118–142, 1976.
9. Немировский А. С., Юдин Д. Б. Методы оптимизации, адаптивные к «существенной» размерности задачи, Автомат. и телемех., 1977, выпуск 4, 75–87.
10. Khachiyan L. (1979) [A polynomial algorithm in linear programming]. Soviet Mathematics Doklady, 224 (5) pp. 1093–1096.
11. Todd M. (2005) Leonid Khachiyan, 1952–2005: An Appreciation. In «Tributes to George Dantzig and Leonid Khachiyan» // SIAG/OPT Views-and-News, vol.16, nn 1–2, October 2005, pp. 4–6.
12. Karmarkar N. (1984) A new polynomial-time algorithm for linear programming, Combinatorica 4, pp. 373–395.

13. https://en.wikipedia.org/wiki/Interior_point_method
14. https://en.wikipedia.org/wiki/Karmarkar%27s_algorithm
15. Левин Л. А. Универсальные задачи перебора // Проблемы передачи информации. — 1973. — Т. 9, № 3. — С. 115–116. Levin L. Universal search problems // Problems of Information Transmission, 1973, 9(3), 115–116.
16. Cook S. (1971) The Complexity of Theorem Proving Procedures. Proceedings Third Annual ACM Symposium on Thoery of Computing, May 1971, pp 151–158.
17. Karp R. (1972) Reducibility among Combinatorial Problems. In Raymond E. Miller and James W. Thatcher (editors). Complexity of Computer Computations, pp. 85–103.