

УЛУЧШЕННЫЙ КВАНТОВЫЙ ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ С КУТРИТНЫМ ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ В ЗАДАЧАХ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

IMPROVED QUANTUM GENETIC ALGORITHM WITH QUTRITE REPRESENTATION IN FUNCTIONAL OPTIMIZATION PROBLEMS

S. Tyryshkin

Summary. Quantum optimization algorithms have the potential to revolutionize the application of brute-force methods in decision making. It is widely believed that for certain classes of optimization problems, quantum algorithms can achieve significant performance gains over current state-of-the-art solutions. Taking into account the fact that the latest achievements in the field of quantum computers are reaching the stage of industrialization, optimization algorithms based on quantum technologies become more and more relevant. Taking into account the noted, the paper considers the possibilities of the improved quantum genetic algorithm with qutrit representation in functional optimization problems. The developed scheme of the algorithm is based on decomposition of the generalized Hadamard gate without the use of ancilla. The considered solution of the MaxCut problem shows that the algorithm has a higher probability of sampling the correct solution, and can do so with fewer layers.

Keywords: quantum algorithm, qutrit, optimization, transition, gate.

Тырышкин Сергей Юрьевич

к.т.н., доцент, Алтайский государственный
технический университет им. И.И. Ползунова, г. Барнаул
service.vip-spe@yandex.ru

Аннотация. Квантовые алгоритмы оптимизации способны кардинально изменить применение методов перебора при принятии решений. Широко распространено мнение, что для определенных классов оптимизационных задач квантовые алгоритмы позволяют добиться значительного выигрыша в производительности по сравнению с текущими современными решениями. С учетом того, что последние достижения в области создания квантовых компьютеров выходят на стадию индустриализации, алгоритмы оптимизации на основе квантовых технологий становятся все более актуальными. С учетом отмеченного, в статье рассмотрены возможности улучшенного квантового генетического алгоритма с кутритным представлением в задачах функциональной оптимизации. Разработанная схема алгоритма базируется на декомпозиции обобщенного затвора Хадамарда без использования анкилла. Представленное решение задачи MaxCut показывает, что квантовый генетический алгоритм на основе кутритов имеет более высокую вероятность выборки правильного решения, и может делать это с меньшим количеством слоев.

Ключевые слова: квантовый алгоритм, кутрит, оптимизация, переход, ворота.

Проблема оптимизации — одна из важнейших задач в современной науке и технике. Она охватывает широкий спектр задач, начиная от машинного обучения, квантово-механических расчетов, молекулярного моделирования и заканчивая комбинаторной оптимизацией. Эти задачи можно разделить на различные категории, например, детерминированная или стохастическая оптимизация, оптимизация с ограничениями или без ограничений, непрерывная или дискретная оптимизация, дифференцируемая или недифференцируемая оптимизация, выпуклая или невыпуклая оптимизация и т.д. [1, 2]. В тоже время, следует отметить, что универсального подхода к оптимизации не существует. Большинство классических эволюционных алгоритмов оптимизации берут свое начало с пробного вектора, который варьируется с помощью различных техник для поиска оптимума объективной функции. В тоже время, главным недостатком традиционных алгоритмов является то, что их стоимость может стать очень высокой из-за увеличения

размерности пространства состояний задачи, что известно как «проклятие размерности». Другая проблема, которая часто возникает при использовании алгоритмов оптимизации, заключается в том, что пробный вектор застревает в глубоком локальном минимуме, а глобальный минимум объективной функции отсутствует [3].

В данном контексте особого внимания заслуживают квантовые вычисления, которые основаны на принципах квантово-механических явлений. За последние несколько лет данные алгоритмы достигли значительного прогресса. Неснижающая тема эволюция аппаратных средств квантовых вычислений в настоящее время уже продемонстрировала для конкретных задач существенное квантовое ускорение по сравнению с классическими вычислениями. Внутренний параллелизм, основанный на принципах суперпозиции квантовых состояний, в сочетании с эффектами интерференции приводит к экспоненциальным вычислительным возможностям,

которые открывают интересные перспективы в исследовании операций [4].

С точки зрения оптимизации, суперпозиция квантовых кутритов, которые существуют в нескольких состояниях одновременно, по своей сути, хорошо подходит для решения оптимизационных задач. Однако вероятностная природа кутритов требует «умных» квантовых алгоритмов для повышения достижения некоторого желаемого состояния, соответствующего решению задачи. Поэтому одной суперпозиции недостаточно, чтобы достигнуть квантового преимущества. В связи с отмеченным, особое значение приобретают квантовые генетические алгоритмы.

Однако, несмотря на имеющиеся исследования, вопросы типичного кодирования в кутриты и определения величины доступного квантового ускорения для оптимизационных задач, трудно оценить, что предопределяет необходимость проведения дальнейших, более углубленных исследований.

Экспериментальные демонстрации использования кутритов для выполнения реальных квантовых алгоритмов описывают в своих трудах Кадченко С.И., Ставцева А.В., Abdulbasit M. A. Sabaawi, Mohammed R. Almasaoodi, Sara El Gaily, Sándor Imre, Fan Yang, Jiawen Chen, Jinyang Li.

Методы и способы уменьшения ошибок в квантовом приборе, которые возникают во время измерения, а также разработка простых моделей постобработки входят в круг научных интересов Бочарова Н.А., Кириллюка М.А., Yuanyuan Li, Qichun Sun, Hua Xu, Xiaogang Li, Zhijun Fang, Wei Yao.

Возможности управления кутритом с использованием когерентного подхода, а также метода, как правило, зависящего от времени скорости декогеренции, которая регулируется так называемым некогерентным управлением, изучают Терновая А.К., Уваров Н.К., Хомоненко А.Д., Jinlei Zhang, Xue Qiu, Xiang Li, Zhijie Huang, Mingqiu Wu, Yumin Dong.

Высоко оценивая имеющиеся на сегодняшний день исследования и наработки, следует отметить, что ряд проблемных аспектов заслуживают отдельного внимания. Так, открытым остается вопрос способен ли квантовый отжиг обеспечить квантовое ускорение по сравнению с классическими эвристическими алгоритмами. Кроме того, в дальнейшем обосновании нуждается многозначная квантовая логика, которая более перспективна с точки зрения вычислительной мощности.

Таким образом, цель статьи заключается в рассмотрении возможностей использования улучшенного кванто-

вого генетического алгоритма с кутритным представлением для решения задач функциональной оптимизации.

Кутрит — это фундаментальная единица квантовых вычислений. По сравнению со своими классическими аналогами, которые принимают значения 0 и 1, кутриты могут существовать в суперпозиции двух состояний. Обозначим эти два базисных состояния как $|0\rangle$ и $|1\rangle$, в результате можно представить любой кутрит как $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ с $\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 = 1$. $\|\alpha\|^2$ и $\|\beta\|^2$ соответствующие вероятностям измерения $|0\rangle$ и $|1\rangle$ [5].

На квантовые состояния можно воздействовать с помощью квантовых ворот, которые (а) сохраняют действительные распределения вероятностей, обеспечивающих в сумме 1, и (б) гарантируют обратимость. Например, X-ворота преобразуют состояние $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ в $X|\psi\rangle = \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$. Ворота X также являются примером классической обратимой операции, эквивалентной операции NOT. В квантовых вычислениях есть единственная необратимая операция, называемая измерением, которая преобразует квантовое состояние в одно из двух базисных состояний с заданной вероятностью, основанной на α и β .

Итак, для решения задачи функциональной оптимизации будем считать, что квантовая система d -уровня может быть выражена как линейная комбинация d базисных состояний, $|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k |k\rangle$. Состояние кутрита описывается следующим образом [6]:

$$|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle + \alpha_2|2\rangle \quad (1)$$

Чтобы выполнить квантовое вычисление с помощью кутритов, необходим универсальный набор унитарных операций и средства для проведения измерений. В литературе существует множество описаний операций над кутритами. В рамках проводимого исследования будем использовать естественное представление, основанное на вращениях с применением двумерных подпространств, и наблюдаемые Гелл-Манна, которые естественным образом обобщают операции Паули на кубитах и описывают измерение в вычислительном базисе кутритов [7].

В частности, мы используем формализм, который определяет три матрицы вращения, аналогичные вращениям кутритов $RX(\theta)$, $RY(\theta)$ и $RZ(\theta)$. Обозначим их как $TRX^{(ij)}(\theta)$, $TRY^{(ij)}(\theta)$ и $TRZ^{(ij)}(\theta)$. Эти операции действуют как поворот кутрита на θ в подпространстве $\{|i\rangle, |j\rangle\}$, оставляя третье состояние нетронутым. В качестве явного примера, для случая $(ij) = (01)$, можно определить:

$$TRX^{(01)}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -isin\left(\frac{\theta}{2}\right) & 0 \\ -isin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$TRX^{(01)}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & 0 \\ sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$TRX^{(01)}(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Произвольная однокватритная операция может быть реализована с помощью последовательности из восьми таких вращательных ворот, включающих четыре различных вращения, работающих в двух разных подпространствах. Выбор подпространств приводит к обобщениям непараметризованных ворот, таким как аналоги Паули X , которые выполняют сложение по модулю 3 на базисных состояниях [8]. Ворота Хадамарда, которые необходимы для построения генетического квантового алгоритма функциональной оптимизации, можно определить несколькими способами. Один из вариантов — это эквивалент однокубитного Хадамарда, действующего в двухсостоятельном подпространстве. Другой вариант, который будем использовать в данном исследовании — это вентиль Клиффорда кутрита (ТН):

$$TH = \frac{-i}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}, \omega = e^{2\pi i/3} \quad (5)$$

Чтобы развить интуицию в отношении предлагаемой техники, сначала представим декомпозицию ворот Хадамарда, которая закладывает основу для обобщения на множественное управление. В каждой из следующих конструкций все входы и выходы являются кубитами, но мы можем временно занимать состояние $|2\rangle$ во время вычислений. Сохранение двоичного входа и выхода позволяет вставлять эти конструкции в любые ранее существовавшие схемы, состоящие только из кутритов. На рисунке 1 приведено разложение Хадамарда с использованием кутритов.

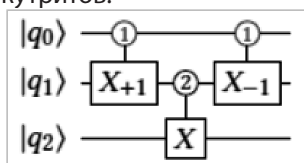


Рис. 1. Декомпозиция Хадамарда через кутриты

На рис. 1 каждый вход и выход — это кутриты. Красные ворота активируются на $|1\rangle$, а синие — на $|2\rangle$. Первые ворота временно поднимают q_1 до уровня $|2\rangle$, если q_0 и q_1 были $|1\rangle$. Затем выполняется операция X , только если q_1 — $|2\rangle$. Последние ворота возвращают q_0 и q_1 в исходное состояние.

Аналогичная конструкция для ворот Хадамарда известна из предыдущих работ. Задача состоит в том, чтобы выполнить операцию X на последнем (целевом) входном кутрите q_2 тогда и только тогда, когда два управляющих кутрита, q_0 и q_1 , оба $|1\rangle$. Сначала над q_0 и q_1 выполняется операция $X+1$ с контролем $|1\rangle$. Это поднимает q_1 до уровня $|2\rangle$, если q_0 и q_1 оба были $|1\rangle$. Затем к q_2 применяются ворота X с управлением $|2\rangle$. Таким образом, X выполняется только тогда, когда и q_0 , и q_1 были $|1\rangle$, как и требуется. Элементы управления возвращаются в исходное состояние с помощью $|1\rangle$ -управляемых ворот $X-1$, которые отменяют действие первых ворот. Ключевая интуиция в этой декомпозиции заключается в том, что состояние кутрита $|2\rangle$ можно использовать для хранения временной информации.

Набор наблюдаемых параметров, которые измеряются, — это наблюдаемые Гелл-Манна. Это набор из 8 эрмитовских наблюдаемых, которые обобщают группу Паули кутрита [9]. Кроме того, они представляют собой эрмитовы генераторы унитарных операций TRX , TRY и TRZ . Наблюдаемые Гелл-Манна перечислены в таблице 1.

Для двухкватритной операции был выбран тернарный оператор сложения $TAdd$, который выполняет управляемое сложение по модулю 3. Действие $TAdd$ и его адьюнкта (который обозначен $TSub$) на состояния кутритного базиса записывается следующим образом:

$$TAdd|j\rangle|k\rangle = |j\rangle|k + j \bmod 3\rangle \quad (6)$$

$$TAdd|j\rangle|k\rangle = |j\rangle|k - j \bmod 3\rangle = TSub|j\rangle|k\rangle \quad (7)$$

Таким образом, обобщая вышеизложенное, работу предлагаемого алгоритма можно представить в виде следующих шагов (см. рис. 2).

На рисунке $Q(t)$ — квантовая популяция решений на момент времени t ; $P(t)$ — классическое представление особой популяции в системе исчисления с основанием $n=3$, полученное в результате квантового измерения.

Для простоты и без потери общности, чтобы показать как работает предложенный алгоритм сосредоточимся на задаче $MaxCut$. $MaxCut$ — это задача разбиения вершин графа на два непересекающихся подмножества таким образом, чтобы сумма весов ребер между этими двумя подмножествами была максимальной [10]. Такое разбиение называется разрезом. Как показано на рис. 3,

Таблица 1.

Кутритные наблюдаемые Гелл-Манна, сгруппированные по аналогичным кутритным операторам Паули

Паули	Наблюдаемая Гелл-Манна		
X	$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
Y	$\lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
Z	$\lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	

1 $t=0$ 2 инициализация $Q(t)$ 3 измерение $Q(t)$ и переход к $P(t)$ 4 оценка приспособленности $P(t)$ 5 нахождение B - наилучшего решения в $P(t)$

6 while (условие завершения эволюции)

7 $t = t + 1$ 8 обновление $Q(t)$ с помощью оператора квантовых ворот9 измерение $Q(t)$ и переход к $P(t)$ 10 оценка приспособленности $P(t)$ 11 нахождение B - наилучшего решения в $P(t)$

12 оператор квантовой катастрофы

13 конец while тут: Q

Рис. 2. Квантовый генетический алгоритм на основе кутритов

когда все вершины взвешенного неориентированного графа разделены на две группы S_1 и S_2 , сумма весов ребер, подлежащих разрезанию, обозначается как значение разрезания [11]:

$$C(\sigma) = \sum_{i \in S_1, j \in S_2} \omega_{ij} = \sum_{i > j} \omega_{ij} \left(\frac{1 - \sigma_i \sigma_j}{2} \right) \quad (8)$$

где ω_{ij} обозначает веса ребер с вершинами i и j , а $\sigma_i \in \{-1, +1\}$ означает, что вершина i делится на S_1 или S_2 , соответственно.

На рис. 3 серым пунктиром обозначена схема разрезания, серой сплошной линией — разрезаемые ребра, W_{ij} — веса, соответствующие ребрам, а темно-серыми слева и темно-серыми справа кружками — узлы, разделяемые на S_1 и S_2 .

Путем простого преобразования значение разреза изменяется на:

$$C(\sigma) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i < j} \omega_{ij} - \sum_{i < j} \omega_{ij} \sigma_i \sigma_j \right) \quad (9)$$

где $\sum_{i < j} \omega_{ij} \sigma_i \sigma_j$ формально похож на гамильтониан модели

Изинга. В этой точке «узлы» в графе соответствуют спинам в модели Изинга, а «ребра» в графе соответствуют взаимодействиям между спинами. Квантовая версия этого гамильтониана имеет вид [11]:

$$H_{MaxCut} = \sum_{i < j} \omega_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z \quad (10)$$

где σ_i^z это матрица Паули-Z, действующая на i -й кутрит. Тогда максимизация значения разреза в уравнении (8) эквивалентна нахождению основного состояния гамильтониана модели Изинга в уравнении (9), поэтому квантовый генетический алгоритм можно использовать для решения задачи MaxCut.

Подводя итоги проведенному исследованию, можно сделать такие выводы.

Недавние аппаратные демонстрации и прогресс в составлении схем сделали квантовые вычисления с системами более высокой размерности (кутритами) на устройствах ближайшего будущего привлекательной возможностью. Некоторые проблемы имеют более естественное или оптимальное кодирование с помощью кутритов, чем с помощью кубитов. В связи с этим в статье рассмотрены возможности использования улучшенного квантового генетического алгоритма с кутритами для решения задач функциональной оптимизации.

В статье представлен авторский подход к генетическому квантовому алгоритму на основе кутритов, кото-

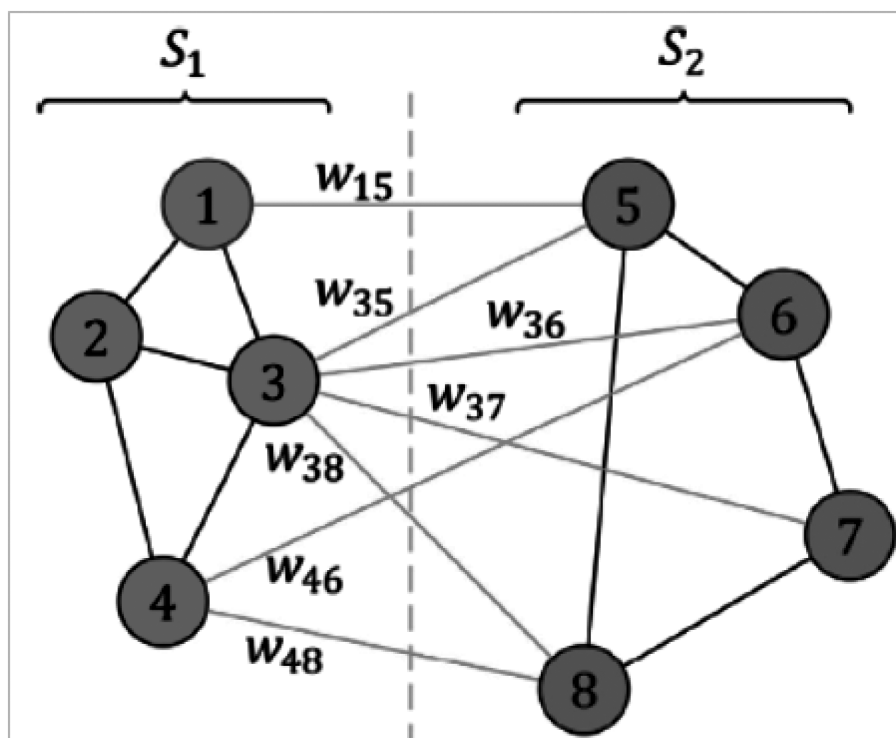


Рис. 3. Схематическое изображение задачи MaxCut

рый опирается на новую технику использования кутритов для достижения логарифмической глубины (времени выполнения) декомпозиции обобщенного затвора Хадмарда без использования анксилла. Предполагается, что предложенный алгоритм позволит получить значительное снижение стоимостных показателей, включая

запутывающие ворота на слой и глубину схемы. Решение задачи MaxCut показывает, что алгоритм имеет более высокую вероятность выборки правильного решения, и может делать это с меньшим количеством слоев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тырышкин, С.Ю. Эффективные квантовые алгоритмы для квантового оптимального управления / С.Ю. Тырышкин // Современные наукоемкие технологии. — 2025. — № 3. — С. 66–72. — DOI 10.17513/snt.40325. — EDN TJKOE.
2. Xiaoming Yang Fuzzy Control Path Planning of Soccer Robot Relying on Quantum Genetic Algorithm // Mobile Information Systems. 2022. Volume 2022, Issue 1. P. 56–62.
3. Скобцов Ю.А. Сравнение традиционных квантовых генетических алгоритмов // Математические методы в технологиях и технике. 2023. № 4. С. 91–95.
4. Abdulbasit M.A. Sabaawi, Mohammed R. Almasaoodi Energy efficiency optimisation in massive multiple-input, multiple-output network for 5G applications using new quantum genetic algorithm // IET Networks. 2023. Volume 13, Issue 2. P. 113–119.
5. Fan Yang, Jiawen Chen Application of QGA algorithm improved by gradient descent in fault diagnosis and location of distributed distribution network // Advanced Control for Applications: Engineering and Industrial Systems. 2023. № 45. P. 11–19.
6. Антонов И.В. Синтез структуры организованных систем как центральная проблема эволюционной кибернетики // Компьютерные исследования и моделирование. 2023. Т 15. №5. С. 1103–1124.
7. Yuanyuan Li, Qichun Sun Rolling Bearing Fault Diagnosis Based on SVM Optimized with Adaptive Quantum DE Algorithm // Shock and Vibration. 2022. Volume 2022, Issue 1. P. 87–92.
8. Xiao Wang, Yan Li Facial Recognition System Based on Genetic Algorithm Improved ROI-KNN Convolutional Neural Network // Applied Bionics and Biomechanics. 2022. Volume 2022, Issue 1. P. 76–82.
9. Jinlei Zhang, Xue Qiu Corrigendum to "Support Vector Machine Weather Prediction Technology Based on the Improved Quantum Optimization Algorithm // Computational Intelligence and Neuroscience. 2022. Volume 2022, Issue 1. P. 34–39.
10. Umar Lucio Rezende An approach based on genetic algorithms and machine learning coupled for studying alloy and molecular clusters by optimizing quantum energy surfaces // Journal of Computational Chemistry. 2023. Volume 44, Issue 24. P. 44–51.
11. Уваров Н.К. Модификации квантового алгоритма Гровера и подходы к их реализации // Информатизация и связь. 2022. №4. С. 42–50.

© Тырышкин Сергей Юрьевич (service.vip-spe@yandex.ru)

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»