

## СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ КАК МОДЕЛИ ТРАФИКА И ПРИЛОЖЕНИЯ К ЭКОЛОГИЧЕСКИМ ПРОБЛЕМАМ

### SERVICE SYSTEMS AS TRAFFIC MODELS AND APPLICATIONS TO ENVIRONMENTAL PROBLEMS

**P. Pospelov  
A. Tatashev  
A. Terentyev  
Yu. Trofimenko  
M. Yashina**

*Summary.* This paper examines the application of the theory of queuing in the modeling of traffic flows. When modeling traffic flow using a service system, it is usually assumed that the application corresponds to a vehicle. Such queuing models are most often used when analyzing traffic at the intersection of roads. In addition to models of this type, this paper considers service models that have a different interpretation. For example, when representing a traffic flow in the form of particles moving along a discrete grid, the flow characteristics are studied using a queuing network in which the particles correspond to the serviced nodes, and the free grid cells located in front of the particle represent applications that are in the queue of this node and waiting for service.

*Keywords:* mathematical traffic models, traffic flows, queuing systems and networks, transport ecology, road safety, traffic organization at intersections, random processes with prohibitions.

**Поспелов Павел Иванович**

*Д.т.н., профессор, Московский автомобильно-  
дорожный государственный технический  
университет (МАДИ)  
pospelov@madi.ru*

**Таташев Александр Геннадьевич**

*Д.ф.-м.н., профессор, Московский автомобильно-  
дорожный государственный технический  
университет (МАДИ)  
a-tatashev@yandex.ru*

**Терентьев Алексей Вячеславович**

*Д.т.н., профессор, Московский автомобильно-  
дорожный государственный технический  
университет (МАДИ)  
aleksej.terentev.67@bk.ru*

**Трофименко Юрий Васильевич**

*Д.т.н., профессор, Московский автомобильно-  
дорожный государственный технический  
университет (МАДИ)  
ecology@madi.ru*

**Яшина Марина Викторовна**

*Д.т.н., профессор, Московский автомобильно-  
дорожный государственный технический  
университет (МАДИ)  
yash-marina@yandex.ru*

*Аннотация.* В настоящей работе исследуются вопросы применения теории массового обслуживания при моделировании автотранспортных потоков. При моделировании транспортного потока с помощью системы обслуживания обычно полагают, что заявка соответствует автотранспортному средству. Такие модели массового обслуживания чаще всего используют при анализе движения на пересечении дорог. Кроме моделей такого типа, в настоящей работе рассматриваются модели обслуживания, имеющие другую интерпретацию. Например, при представлении транспортного потока в виде частиц, перемещающихся по дискретной решетке, исследование характеристик потока осуществляется с помощью сети массового обслуживания, в которой частицы соответствуют обслуживаемым узлам, а располагающиеся перед частицей свободные ячейки решетки представляют собой заявки, находящиеся в очереди этого узла и ожидающие обслуживания.

*Ключевые слова:* математические модели трафика, автотранспортные потоки, системы и сети массового обслуживания, экология транспорта, безопасность дорожного движения, организация движения на перекрестках, случайные процессы с запретами.

## Введение

**В** данной работе исследованы концептуальные подходы и особенности формализации систем обслуживания с конфликтами, которые в настоящее время являются базовым теоретическим инструментарием при математическом моделировании автотранспортного движения на участках вблизи пересечений магистралей. Изложены также подходы, позволяющие использовать понятия и факты теории сетей массового обслуживания с дискретным и непрерывным временем при анализе вероятностных моделей автотранспортного потока на участке магистрали, которые задаются в терминах случайных процессов с запретами или вероятностных клеточных автоматов.

Для экологических прогнозов и оценок выбросов автотранспортными потоками загрязняющих веществ недостаточно учитывать только усредненные характеристики. Нужно принимать во внимание внутренние конфликты. В конфликтных ситуациях автотранспортные средства часто ускоряют и замедляют движение, совершают многочисленные перестроения. Это приводит к значительному росту потребления автотранспортными средствами энергии и соответственно увеличению расхода топлива и выбросов загрязняющих веществ. Конфликтные ситуации в транспортных потоках возникают прежде всего на участках перед пересечениями дорог. Моделирование автотранспортного движения на регулируемых и нерегулируемых перекрестках используется не только для оценок задержек автотранспортных средств и при решении вопросов оптимизации движения, но может использоваться и для оценок количества выбросов загрязняющих веществ. Участки магистралей при пересечениях являются фрагментами дорожной сети, при моделировании которых теория массового обслуживания применяется чаще всего. Системами массового обслуживания могут моделироваться транспортные потоки на участках перед перекрестками и переездами [1]-[4]. Одноканальной системой массового обслуживания может представляться кластер, состоящий из медленного транспортного средства и группы быстрых транспортных средств в условиях, при которых обгон затруднен [2], [5]. Теория массового обслуживания используется также при анализе характеристик автотранспортных потоков в некоторых случаях, когда модель трафика изначально не формулируется в терминах системы массового обслуживания. Так в [6]-[10] модели трафика, интерпретируемой как случайный процесс с запретами [11], ставится в соответствие сеть массового обслуживания с непрерывной [12] или дискретной [13] шкалой времени. Модели, разработанные в [9], [10], основаны на детерминированно-стохастическом подходе к моделированию автотранспортных потоков [14]-[16].

Вопросы анализа характеристик автотранспортных потоков связаны с задачами организации дорожного движения [17]-[22], разработкой методов оценки качества автотранспортных средств по ряду показателей [23], [24].

Вопросы экологии и обеспечения безопасности дорожного движения рассматриваются в [25]-[27]. В [27] дается прогноз по выбросам удельного парникового газа на единицу перевозки груза ( $\text{г CO}_2$  — эквивалент/груз-км) (а) и перевозки пассажира ( $\text{г CO}_2$  — эквивалент/груз-км) (б) на период до 2050 года.

В разделе 2 исследуются подходы к моделированию трафика непосредственно с помощью систем массового обслуживания. Излагаются особенности рассматриваемых подходов при их применении к анализу и оптимизации автотранспортного движения на перекрестках, переездах, а также на участках магистрали без пересечений.

В разделе 3 рассматривается подход, в соответствии с которым отыскание значений характеристик случайного процесса с запретами, с помощью которого моделируется трафик, осуществляется путем сравнения рассматриваемого процесса с сетью массового обслуживания, для которой значения соответствующих характеристик известны. Эта сеть имеет непрерывную или дискретную шкалу времени в зависимости от того, является ли исходный случайный процесс с запретами процессом с непрерывным или дискретным временем.

## Системы массового обслуживания как модели трафика

1. Применение методологии систем массового обслуживания для управления транспортными потоками на сложных сетях интенсивно развивалось в последние десятилетия прошлого века. В частности, М.А. Федоткиным и его коллективом, [1]-[3], разработан подход в математическом моделировании, в соответствии с которым поведение моделируемых объектов представляется системой массового обслуживания специально введенного класса, названного классом управляющих систем обслуживания. Как отмечается в [2], реальными объектами, при моделировании поведения которых можно использовать управляющие системы обслуживания, могут быть системы диспетчерского контроля за последовательностью взлетов и посадок самолетов, светофоры адаптивного регулирования транспортными потоками на перекрестках со сложной геометрией, системы обработки информационных потоков, системы управления конфликтными потоками самолетов при прохождении пересекающихся воздушных коридоров.

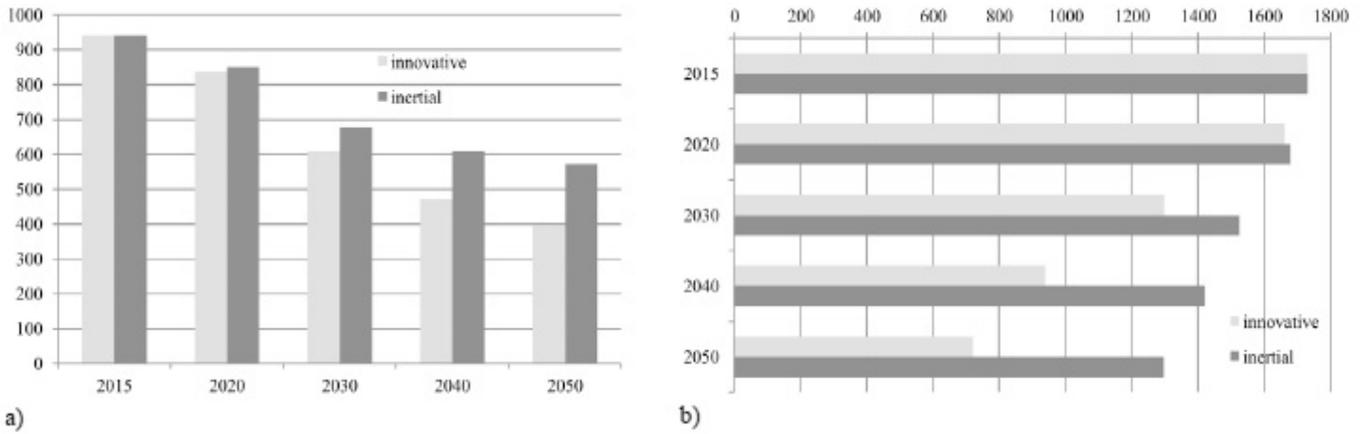


Рис. 1. [27]. Прогноз по выбросам удельного парникового газа на единицу перевозки груза (г CO<sub>2</sub> — эквивалент/груз-км) (а) и перевозки пассажира (г CO<sub>2</sub> — эквивалент/груз-км) (б).

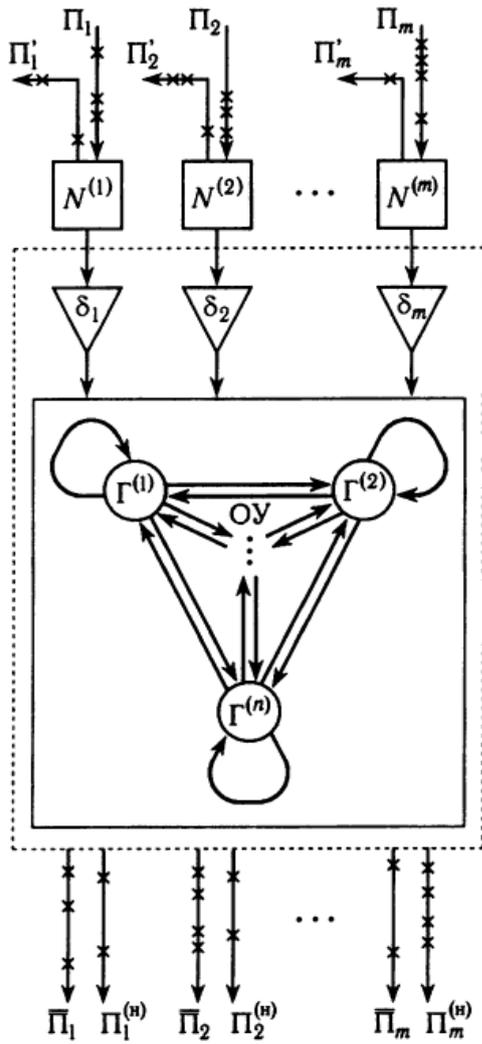


Рис. 2. Схема управляющей системы обслуживания [2].

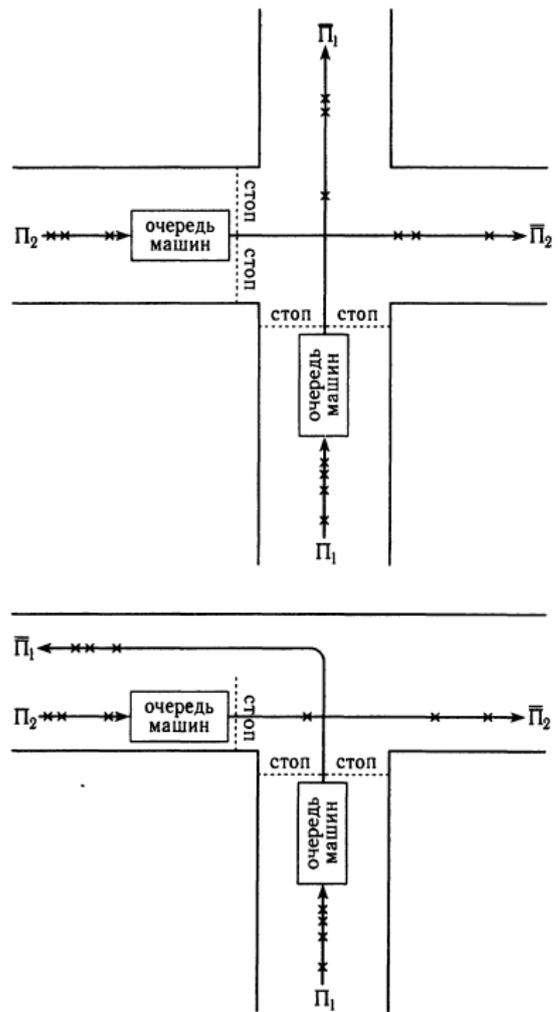


Рис. 3. Схема организации движения транспорта на крестообразном (вверху) и Т-образном перекрестках [2].

Схема управляющей системы приведена на рис. 2.

Управляющая система состоит из следующих элементов:  $\Pi_1, \dots, \Pi_m$  — входящие потоки заявок;  $N^{(1)}, \dots, N^{(m)}$ ;  $\delta_1, \dots, \delta_n$  — устройства по организации дисциплины очереди;  $\Pi'_1, \dots, \Pi'_m$  — потоки потерянных заявок;  $\bar{\Pi}_1, \dots, \bar{\Pi}_m$  — потоки обслуженных заявок;  $\Pi_1^{(n)}, \dots, \Pi_m^{(n)}$  — потоки насыщения; ОУ — обслуживающее устройство;  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  — состояния управляющей системы.

На рисунке 3 показано представление схемы организации дорожного движения на перекрестках с помощью управляющей системы.

Смысл перечисленных элементов управляющей системы обслуживания будет пояснен на приводимых ниже примерах.

В [1] рассматривается система массового обслуживания, которая в каждый момент времени находится

в одном из  $2m$  состояний  $\Gamma^{(r)}$ ,  $r = 1, \dots, 2m$ . В систему поступают  $m$  потоков  $\Pi_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , которые интерпретируются как конфликтные. Заявки конфликтных потоков обслуживаются в непересекающиеся интервалы времени, разделенными интервалами, когда обслуживание заявок не происходит. Состояния обслуживающего устройства изменяются в моменты времени  $\theta_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Пусть  $\Gamma_i$  — состояние устройства в промежутке времени  $[\theta_i, \theta_{i+1}]$  и  $v(\Gamma_i)$  — длительность интервала пребывания устройства в этом состоянии. Принимается, что  $\theta_0 = 0, \Gamma_0 = \Gamma^{(1)}$ . Если  $\Gamma_i = \Gamma^{(r-1)}$ ,  $r = 1, \dots, 2m$ , то  $\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}$ . Если  $\Gamma_i = \Gamma^{(2m)}$ , то  $\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(1)}$ . Эти условия задают циклический алгоритм изменений состояний обслуживающего устройства. В состоянии  $\Gamma^{(2j-1)}$  обслуживаются заявки потока  $\Pi_j$ , причем за один интервал времени пребывания системы в этом состоянии может быть обслужено не более  $l_j = \mu_j v(\Gamma^{(2j-1)})$  заявок, где  $\mu_j$  — константа, называемая интенсивностью  $j$ -го потока насыщения. В состояниях  $\Gamma^{(2j)}$  потоки не обслуживаются.

В приводимых ниже примерах из [1] транспортный поток задается пуассоновским потоком или его обобщением — потоком Бартлетта, задаваемый последовательностью  $(\tau_i, \eta_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\tau_i$  — момент прибытия  $i$ -го медленного автомобиля к стоп-линии перекрестка, а  $\eta_i$  — число автомобилей в группе, содержащей этот медленный автомобиль и следующие за ним быстрые автомобили, ожидающие возможность совершить обгон  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Суммарное число автомобилей в такой группе с вероятностью 1 равно 1 и с вероятностью  $d(1-q)q^{n-2}$  равно  $n$  при  $n \geq 2, 0 < d < 1, 0 < q < 1$ .

**Пример 1** [1]. К перекрестку прибывают пуассоновские потоки  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  автомобилей, причем интенсивности этих потоков равны соответственно  $\lambda_1 = 0.1$  1/сек и  $\lambda_2 = 0.2$  1/сек. При оптимальных значениях  $v(\Gamma^{(1)}) = 7$  сек,  $v(\Gamma^{(2)}) = v(\Gamma^{(4)}) = 3$  сек,  $v(\Gamma^{(3)}) = 9$  сек длительностей фаз светофора (состояний обслуживающего устройства) стационарное среднее значение времени пребывания заявки в системе равно 6.1 сек. Если входящие потоки  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  являются потоками Бартлетта с той же интенсивностью, то оптимальные значения параметров длительностей  $v(\Gamma^{(r)})$ ,  $r = 1, 2, 3, 4$ , дают среднее время пребывания заявки в системе, равное 124.4 сек. Таким образом, имеет место резкое увеличение при изменении структуры потока.

**Пример 2** [2]. Предполагается, что входящий поток является пуассоновским с параметром  $\lambda_1 = 0.08$  1/сек,  $\mu_1 = 0.5$  сек. Для циклического алгоритма обслуживания заданы следующие значения параметров:  $v(\Gamma^{(1)}) = 62$  сек,  $v(\Gamma^{(2)}) = v(\Gamma^{(4)}) = 4$  сек,  $v(\Gamma^{(3)}) = 140$  сек. Нагрузка  $\rho_1$  по потоку  $\Gamma^{(1)}$  равна 0.542. С помощью математического моделирования транспортного потока через перекресток по десяти независимым реализациям вычислялись максимальная  $\gamma_{max}$  и минимальная  $\gamma_{min}$  оценки для среднего значения  $\gamma_1$  времени пребывания заявки потока  $\Pi^{(1)}$ . Время переходного процесса при имитационном моделировании определяется из условия, при котором впервые после начала имитации выполнялось равенство

$$(\gamma_{max} - \gamma_{min})(\gamma_{min})^{(-1)} \cdot 100\% < 15\%.$$

Как отмечается в [1], это неравенство используется инженерами-транспортниками при получении оценки для  $\gamma$  по реальным наблюдениям. Для транспортного потока с приведенными параметрами время переходного процесса не превышает 48 мин. При рассмотрении транспортного потока с большой нагрузкой, например, с параметрами  $\lambda_j = 0.6$  1/сек,  $\mu = 2$  сек,  $v(\Gamma^{(1)}) = 14$  сек,  $v(\Gamma^{(2)}) = v(\Gamma^{(4)}) = 4$  сек,  $v(\Gamma^{(3)}) = 23$  сек,  $\rho = 0.96$  время переходного периода 12 часов.

Исследование управляющей системы обслуживания и решение задачи оптимизации параметров управляющей системы осуществляется с помощью имитационного моделирования или с помощью численных подходов. В [1] изложен подход к решению задачи оптимизации и приведены примеры приложений подхода к задаче организации движения на перекрестке.

В [2] рассмотрены примеры алгоритмов регулирования потоками.

При циклическом алгоритме число состояний обслуживающего устройства равно  $2m$ , где  $m$  — число по-

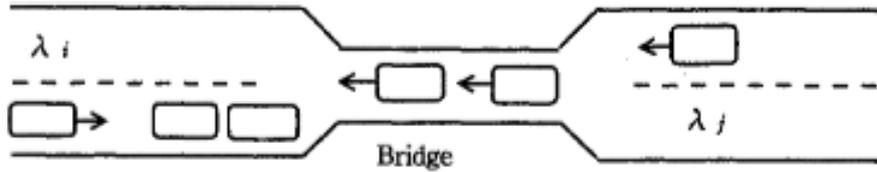


Рис. 4. Модель движения по мосту с однополосным движением с переходом на двухполосное движение [4].

токов. При пребывании устройства в  $(2j-1)$ -м состоянии обслуживаются заявки  $j$ -го потока, а в  $(2j)$ -м состоянии заявки не обслуживаются,  $j = 1, \dots, m$ .

При алгоритме с упреждением, представляющем собой модификацию циклического алгоритма, потоки разбиваются на группы: приоритетный малоинтенсивный поток; группа из  $2m$  малоинтенсивных потоков; интенсивный поток. В задаче управления транспортом первую группу образует поток автомобилей, в котором нежелательно скопление большой очереди в связи с незначительным расстоянием до соседнего перекрестка. Вторую группу составляют потоки въезда и выезда из города. Третью группу составляют средства общественного транспорта. Алгоритм с упреждением управляет потоками лишь по информации о наличии очереди в приоритетном потоке и поэтому применим при регулировании на реальных перекрестках.

Алгоритм с ориентацией и переналадками реализует циклический алгоритм так, что длительности обслуживания зависят от очередей по потокам.

**Пример 3 [2].** На пересечении улиц Ульянова и Пискунова в Нижнем Новгороде до 1970 года осуществлялось регулирование по циклическому алгоритму с параметрами, подобранными эмпирическим путем, при этом обеспечивалось среднее время пересечения автомобиля перекрестка, равное 10.5 сек. Применение алгоритма с упреждением при соответствующем выборе значений параметров позволило уменьшить это время до 5.1 сек и устранить транспортные сбои на участках на перекрестках.

В [3] рассматривается управляющая система массового обслуживания, в которой входящий поток является потоком Гнеденко–Коваленко. Пусть  $\eta$  — случайная величина, представляющая собой число всех типов автомобилей, пересекающих некоторую виртуальную линию магистрали за промежутков  $[0, t)$ . Тогда вероятность того, что  $\eta(t)$  примет значение  $k$  равна

$$P(\eta = k) = e^{(-\lambda t)} = e^{-\lambda t \sum_{i=0}^{[k/2]} c_{k-i}^i p^{k-2i} q^i} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-i)!},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

(в общепринятых обозначениях),  $[k/2]$  — целая часть  $k/2$ . В [3] приводятся результаты аналитических исследований. Предложена имитационная модель, которая вычисляет характеристики выходящего потока и решает задачу оптимизации по минимуму стационарного среднего взвешенного времени ожидания начала переезда автомобиля.

2. В [4] рассматривалась математическая модель движения автомобилей, которые пересекают однополосный мост на дороге с двухсторонним движением, Рис.4. Как только автомобиль начинает двигаться по мосту, движущиеся в противоположном направлении автомобили должны ожидать. Очереди, находящиеся на двух сторонах моста, называются очередями  $Q_1$  и  $Q_2$ . Автомобили, поступающие в очередь  $Q_i$ , (автомобили типа  $i$ ) образуют пуассоновский поток с интенсивностью  $\lambda_i$  и промежутки времени, в которые эти автомобили движутся по мосту, называются периодами типа  $i$ ,  $i = 1, 2$ . Если в момент времени, в который заканчивается период типа  $j$  и начинается период типа  $i \neq j$ , число ожидающих автомобилей равно  $k$ , то нужно  $kt$  секунд, чтобы  $k$ -й автомобиль начал пересекать мост. В [4] получена формула для средней длительности интервала времени от момента прибытия автомобиля  $i$ -го типа до момента начала его движения по мосту при выполнении условия стационарности  $\lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2 < 1$

В [5] рассматривается модель, заимствованная из [28]. Имеется два типа автомобилей, движущихся в одном направлении. Автомобиль типа  $i$  движется со скоростью  $v_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $v_1 > v_2$  (автомобили первого типа — быстрые, автомобили второго типа — медленные). В начальный момент времени быстрые автомобили образуют пуассоновский точечный поток на всей прямой с параметром  $\lambda_i$ , а медленные автомобили находятся в точках  $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n$ , причем разности  $x_k - x_{k-1}$  имеют одинаковое распределение (не обязательно экспоненциальное) со средним значением  $1/\lambda$ . Если быстрый автомобиль догоняет медленный, то он движется вместе с медленным с экспоненциально распределенным временем со средним значением  $1/\mu$ , а затем обгоняет медленный и движется со средней скоростью  $v_j$ . Если за медленным автомобилем следует группа быстрых, то обгон осуществляется в порядке

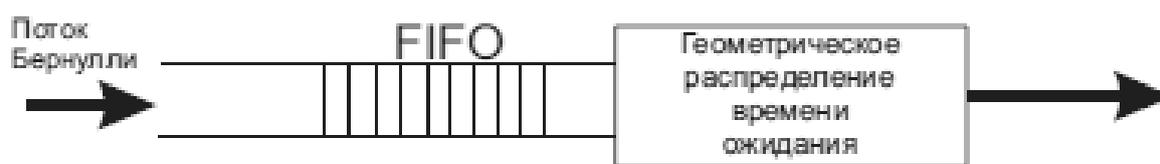


Рис. 5. Замкнутая цепочка СМО Бернулли

очереди. Без ограничения общности можно полагать, что  $v_2 = 0$ ,  $v = v_1 - v_2$ . Медленный автомобиль можно рассматривать как узел обслуживания заявок (быстрых автомобилей). Такой узел представляет собой одноканальную систему массового обслуживания с ожиданием, в котором время обслуживания заявки распределено по экспоненциальному закону с параметром  $\mu$ . Можно считать, что быстрые автомобили, обгоняя медленные автомобили проходят последовательно обслуживание в узлах линейной сети массового обслуживания и использовать известные результаты для таких сетей.

В [5] рассматриваются также более сложные модели трафика, основанные на открытых или замкнутых сетях массового обслуживания.

### Случайные процессы с запретами и сети массового обслуживания

1. Процесс с нулевым диапазоном представляет собой вероятностную модель, в которой неразличимые частицы находятся в ячейках на решетке [8]. Каждая ячейка решетки может содержать целое число частиц. Частицы перескакивают в следующую ячейку с вероятностью, зависящей от числа частиц в покидаемой ячейке. Таким образом, каждая частица взаимодействует только с частицами, находящимися в той же ячейке, т.е. имеется взаимодействие частиц с нулевым диапазоном. Процесс полностью асимметричен, так как частицы могут двигаться только в заданном направлении.

В [7], [8] рассматривается следующая версия случайного процесса с нулевым диапазоном. Частицы располагаются в ячейках замкнутой одномерной решетки. Обновление конфигурации частиц происходит в дискретные моменты времени. На каждом шаге одновременно в каждой ячейке одна частица с заданной вероятностью пытается переместиться в следующую ячейку.

Одномерный случайный процесс с нулевым диапазоном может быть отображен на случайный процесс с запретами, т.е. на многочастичную систему на замкнутой решетке, в каждой ячейке которой находится не более одной частицы. Частицы процесса с запретами могут называться транспортными средствами [8].

В соответствии с рассматриваемым отображением частицы процесса с нулевым диапазоном, находящиеся в ячейке  $i$  соответствуют числу свободных ячеек перед транспортным средством  $i$ , следующим за транспортным средством в процессе с запретами. Перемещение частицы в процессе с нулевым диапазоном соответствует перемещению транспортного средства в процессе с запретами. Число ячеек в процессе с запретами и, следовательно, число транспортных средств равно числу ячеек в процессе с нулевым диапазоном.

В [8] найден алгоритм вычисления значения стационарной вероятности перемещения транспортного средства в рассматриваемой случайном процессе с запретами. Это значение понимается как средняя скорость транспортного средства и дает оценку скорости моделируемого автотранспортного потока.

Такой же случайный процесс с запретами рассматривался в [31], где была получена явная формула для средней скорости частицы (транспортного средства).

В [8] доказано, что если в случайном процессе с запретами рассматриваемого вида число частиц и число ячеек стремятся к бесконечности, а отношение числа частиц к числу ячеек стремится к заданному значению, то средняя скорость частицы стремится к значению средней скорости частицы на прямой. Формула для этого значения была ранее получена в [29].

2. В [8] найдена формула для средней скорости частицы в случайном процессе с запретами на прямой, в котором частицы (транспортные средства) различаются по типам. При выводе формулы использовались факты теории сетей массового обслуживания с дискретным временем [13]. Аналогично, используя факты этой теории, можно найти среднюю скорость частицы на соответствующей замкнутой решетке.

3. Рассмотрим сеть массового обслуживания (СМО), т.е. замкнутую цепочку узлов, каждый из которых является одноканальной СМО Бернулли [13] с бесконечным числом мест ожидания, рис. 5. В цепочке имеется  $I$  узлов. Заявка, покинувшая узел  $i$ , немедленно поступает в узел  $i + 1$  (при нумерации узлов формально полагаем  $I + 1 := 1$  и  $1 - 1 := I$ ).

Если в момент времени  $t$  в узле  $i$  заявка находится на обслуживании, то в конце промежутка времени  $[t, t+1)$  с вероятностью  $p_i$  ( $0 < p_i < 1$ ) это обслуживание заканчивается в момент времени  $t+1$  эта заявка будет находиться в узле  $i+1$ ; с вероятностью  $q_i = 1 - p_i$  эта заявка остается в узле  $i$  по крайней мере еще на один квант времени,  $i = 1, \dots, I$ . Заявка, поступившая в момент времени  $t+1$  в узел  $i+1$ , либо становится там в конец очереди (если имеются другие заявки), либо немедленно занимает прибор (если в момент времени  $t$  в этом узле находилась ровно одна заявка, достигшая последнего кванта обслуживания). Поступлений заявок извне и уходов заявок из сети не происходит и, таким образом, число заявок в системе постоянно. Пусть это число равно  $L$ .

Обозначим через  $(k_1, \dots, k_I)$  состояние системы, когда число заявок в узле  $i$  равно  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, I$ . Функционирование системы описывается случайным процессом  $X = X(t) = (X_1(t), \dots, X_I(t))$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$  с пространством состояний  $X_1 + \dots + X_I = L$ .

Предположим, что имеется кольцевая последовательность ячеек. Число ячеек равно  $N$ . Имеются  $M$  частиц, каждая из которых в текущий дискретный момент времени находится в одной из ячеек, причем ни в одной из ячеек не может одновременно находиться более одной частицы. Частицы могут перемещаться в моменты времени  $0, 1, 2, \dots$ . Перемещение частиц происходит в одном и том же направлении. За  $i$ -й ячейкой в направлении движения следует  $(i+1)$ -я ячейка,  $i = 1, \dots, N$ . За  $N$ -й ячейкой следует ячейка 1. За  $i$ -й частицей в направлении движения следует  $(i+1)$ -я частица,  $i = 1, \dots, M-1$ . За  $M$ -й частицей следует частица 1. Если в момент времени  $t$  ячейка впереди  $i$ -й частицы свободна, то в момент времени  $t+1$  эта частица с вероятностью  $p_i$  будет находиться в следующей по направлению движения ячейке и с вероятностью  $1 - p_i$  будет оставаться на месте,  $0 < p_i < 1$ ,  $i = 1, \dots, M$ .

Поведение модели случайного блуждания описанного вида и соответствующей СеМО представляется одной и той же цепью Маркова  $X(t) = (X_1(t), \dots, X_I(t))$  (считаем, что  $I = M$ , т.е. число узлов СеМО равно числу частиц в модели), если для модели под  $X_i(t)$  понимается число свободных позиций между частицами  $i$  и  $i+1$  в момент времени  $t$ , а для сети обслуживания — число заявок

Под средней скоростью частицы по-прежнему понимаем стационарную вероятность перемещения частицы в текущий момент времени. Из того, что частицы не могут обгонять друг друга, следует, что все частицы имеют одну и ту же скорость. Обозначим скорость частиц через  $v$ .

Поставим в соответствие целочисленный вектор  $(k_1, \dots, k_M)$ ,  $k_i \geq 0$ , состоянию модели, для которого число свободных ячеек в направлении движения между частицами  $i$  и  $i+1$  равно  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, M$ . Поведение модели описывается цепью Маркова  $X = X(t) = (X_1(t), \dots, X_M(t))$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$ , с пространством состояний

$$\tilde{S} := \tilde{S}(N, M) := \{(k_1, \dots, k_M), \\ i = 1, \dots, M; k_1 + \dots + k_M = N - M\}.$$

Одна и та же цепь Маркова  $X(t) = (X_1(t), \dots, X_M(t))$  описывает как поведение модели случайного блуждания описанного вида и соответствующей СеМО, если положить  $I = M$ ,  $L = N - M$  (т.е. число узлов СеМО равно числу частиц в модели, а число заявок в сети равно числу свободных позиций в модели), тогда под  $X_i(t)$  следует понимать число свободных ячеек между частицами  $i$  и  $i+1$  в момент времени  $t$ , а для СеМО — число заявок в узле. Сравнивая поведение рассматриваемого случайного процесса с запретами и соответствующей СеМО и используя известные факты теории сетей массового обслуживания с дискретным временем [13], получаем следующие утверждения:

1) Существуют стационарные вероятности состояния рассматриваемой цепи Маркова, которые вычисляются по формуле

$$P(k_1, \dots, k_M) = \\ = \left( \prod_{i=1}^M \left( \frac{q_i}{p_i} \right)^{k_i} \left( \frac{1}{q_i} \right)^{\eta(0, k_i)} \right) \cdot G(N, M)^{-1}, \\ (k_1, \dots, k_M) \in \tilde{S}(N, M),$$

где  $G(N-M, M)^{-1}$  — константа нормировки, для вычисления которой можно использовать следующий рекурсивный алгоритм:

$$G(1, M) = \sum_{d_i}^M \frac{1}{d_i}, \quad M \geq 1; \quad G(N-M, 1) = \\ = \left( \frac{q_1}{p_1} \right)^{N-M} \frac{1}{q_1}, \quad n - M \geq 1, \\ G(N-M, M) = G(N-M, M-1) + \\ + \frac{q_M}{p_M} G(N-M-1, M) + \\ + G(N-M-1, M-1), \quad N-M \geq 2, \quad M \geq 2.$$

2) Стационарная вероятность  $P(X_i \geq k)$  того, что между частицей  $i$ ,  $i = 1, \dots, I$ , и частицей впереди нее

имеется не менее  $k$  свободных позиций, вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}
 P(X_i \geq k) &= \\
 &= \left(\frac{q_i}{p_i}\right)^k \frac{1}{q_i} G_1(N - M - k + 1, M) G(N - M, M)^{-1}, \\
 \forall k &= 1, \dots, N - M - 1; \\
 G_1(N - M, M) &= \\
 &= \sum \left(\frac{q_1}{p_1}\right)^{k_1} \prod_{i=2}^M \left(\frac{q_i}{p_i}\right)^{k_i} \left(\frac{1}{q_i}\right)^{\eta(o, k_i)} \quad (66)
 \end{aligned}$$

где суммирование осуществляется по всем наборам целых неотрицательных чисел  $k_1, \dots, k_M$ , таких, что  $k_1 + \dots + k_M = N - M - 1$ .

Константа  $G_1(N - M, M)$  может быть вычислена по рекурсивной формуле

$$\begin{aligned}
 G_1(2, M) &= \frac{q_1}{p_1} + \sum_{i=2}^m \frac{1}{p_i}, \quad M \geq 1, \quad (67) \\
 G_1(N - M, M) &= \\
 &= G(N - M - 1, M - 1) + \frac{q_M}{p_M} G_1(N - M - 1, M), \\
 N - M &\geq 3, \quad M \geq 1. \quad (1)
 \end{aligned}$$

3) Средняя скорость частицы  $v$  вычисляется по формуле

$$v = p_1 P(X_1 \geq 1); \quad P(X_1 \geq 1) =$$

$$= \frac{1}{p_1} G_1(N - M + 1, M) G(N - M, M)^{-1}. \quad (2)$$

$G_1(N - M, M)$  вычисляется по формулам (1), (2).

3. В [9], [10] предложены модели трафика, основанные на случайных процессах с запретами с дискретным и непрерывным временем (соответственно синхронные и асинхронные случайные процессы с запретами в терминологии [32]). При выводе формул средней скорости частицы используются соответственно факты теории сетей массового обслуживания соответственно с дискретным [13] и непрерывным временем [12].

### Заключение

Изложены подходы, использующие теорию массового обслуживания в математическом моделировании трафика. Приведены примеры применения этих подходов. При моделировании трафика на участках возле пересечений магистралей используется системы массового обслуживания, характеристики которых исследуются в основном имитационным моделированием. Изложен также подход, который позволяет переформулировать математическое описание модели трафика таким образом, что становится очевидной возможности применения известных результатов теории сетей массового обслуживания с непрерывным или дискретным временем. Обновление конфигурации частиц происходит в дискретные моменты времени. На каждом шаге одновременно в каждой ячейке одна частица с заданной вероятностью пытается переместиться в заданную ячейку.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Голышева Н.М., Федоткин М.А. Циклическое управление конфликтными потоками в условиях гибели и рождения очередей критических размеров // Автоматика и телемеханика, 1990, № 4, с. 68–75.
2. Федоткин М.А. Процессы обслуживания и управляющие системы // Мат. вопросы кибернетики, 1996, т. 6, с. 51–70.
3. Федоткин М.А., Федоткин А.М. Анализ и оптимизация выходных процессов при циклическом управлении конфликтными транспортными потоками Гнеденко — Коваленко // Автоматика и телемеханика, 12, 2009, с. 92–108.
4. Suzuki S., Yamashita H. Mean waiting times on the alternating traffic with starting delays // J. Oper. Res. Soc. Japan, 1998, vol. 41, № 3, pp. 442–454. 10.15807/jorsj.41.442
5. Замятин А.А., Малышев В.А. Введение в стохастические модели транспортных потоков. В кн.: Введение в математическое моделирование транспортных потоков. Под ред. А.В. Гасникова. Изд. 2-е. Москва, Изд-во МЦНМО, 2013. С. 272–305.
6. Kanai M, Nishinary K., Tokihiro T. Exact solution and asymptotic behavior of the asymmetric simple exclusion process on a ring Statistical Mechanics (cond-mat. stat-mech). J. Phys. A: Math. Gen. 39 (2006) 9071–9079 DOI: 10.1088/0305-4470/39/29/004 arXiv.0905.2795v1
7. Kanai M. Exact solution of the zero-range process: fundamental diagram of the corresponding exclusion process. arXiv: cond-mat 07011900–2 16 Feb 2009
8. Буслаев А.П., Яшина М.В., Таташев А.Г. О функциях состояния в модели неоднородного трафика // Вестник Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета (МАДИ), 2017. № 3 (50). С. 45–51.
9. Бугаев А.С., Таташев А.Г., Яшина М.В., Лавров О.С., Носов Е.А. Восстановление динамики транспортного потока на основе детерминированно-стохастической модели и данных с интеллектуально транспортных систем // T-Comm, 2019, vol. 13, № 10, с. 1–10. DOI: 10.24411/2072-8735-2018-10315
10. Yashina M.V., Tatashev A.G. Evaluation of highway traffic intensity with different vehicle types. Russ. Engin. Res., 2021, vol. 41, pp. 545–547. DOI: 10.3103/S1068798X21060265

11. Spitzer F. Interaction of Markov processes Adv. Math., 1970, vol. 5, pp., 246–290. 10.1016/0001–8708(70)90034–4
12. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания // Москва, Изд-во РУДН, 1995. 529 с.
13. Daduna H. Queuing networks with discrete time scale: explicit expression for the steady state behavior of discrete time stochastic networks. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2001. DOI: 10.1007/3–540–44592–7 2001.
14. Buslaev A.P., Prikhodko V.M., Tatashev A.G., Yashina M.V. The deterministic- stochastic flow model, 2005, arXiv.physics/0504139/physics.soc-ph
15. Lukanin V.N., Buslaev A.P., Novikov A.V., Yashina M.V. Traffic flows modelling and the evaluation of energy-ecological parameters. Part I // Int. J. of Vehicle Design, 2003, vol. 33, № 4, pp. 381–399.
16. Lukanin V.N., Buslaev A.P., Novikov A.V., Yashina M.V. Traffic flows modelling and the evaluation of energy-ecological parameters. Part II // Int. J. of Vehicle Design, 2003, vol. 33, № 4, pp. 400–421.
17. Pospelov P.I., Belova M.A., Kostsov A.V., A.G. Tatashev A.G., Yashina M.V. Technique of traffic flow evolution localization for calibration of deterministic-stochastic segregation model // 2019 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications, 2019, pp. 1–5. DOI: 10.1109/SOSG.2019.8706766
18. Pospelov P., Kostsov A., Tatashev A., Yashina M. A mathematical model of traffic segregation on multilane road // Periodicals of Engineering and Natural Sciences, 2019, vol. 7, no. 1, pp. 442–446. DOI:10.21533/pen.v7i1.384
19. Yashina M.V., Tatashev A.G., Pospelov P.I., Susoev N.P. Optimization of regulation parameters for traffic scenario with dedicated public transport lane, 2020 International Conference on Engineering Management of Communication and Technology (EMCTECH), 2020, pp. 1–6. DOI: 10.1109/EMCTECH49634.2020.9261534.
20. Yashina M.V., Tatashev A.G., Pospelov P.I., Duc Long., Susoev N.P. Evaluation methodology of distribution of vehicle lane-change probabilities on multilane road before crossroad // 2021 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications, 2021, pp. 1–5.
21. Pospelov P.I., Le Duc Long, Tatashev A.G., Yashina M.V. Methodology of assessing the regulated crossing throughput with a dedicated lane for ground public transport based on a probabilistic model // 2021 IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 1159 012084.
22. Пospelov П.И., Ле Д.Л. Организация движения на нерегулируемом пересечении с выделенной полосой для наземного общественного транспорта // Вестник Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета (МАДИ), 2021, № 2(65), с. 88–95.
23. Терентьев А.В. Многокритериальный показатель качества автомобиля / А.В. Терентьев / А.В. Терентьев // Вестник гражданских инженеров. Санкт-Петербург: СПбГ АСУ, 2015. — 1(48). С. 2001–2004.
24. Карелина М.Ю., Арифиллин И.В., Терентьев А.В., Аналитическое определение весовых коэффициентов при многокритериальной оценке эффективности автотранспортных средств // Вестник Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета (МАДИ), 2018, т. 52, № 1, с. 3–9.
25. Трофименко Ю.В. Оценка вреда, наносимого окружающей среде автотранспортным комплексом региона // Вестник Московского автомобильно-дорожного государственного технического института (государственного технического университета), 2009, т. 17, № 2, с. 97–103.
26. Трофименко Ю.В., Якубович А.Н. Риски природных катастроф на перспективной сети скоростных автомобильных дорог России. Наука и техника дорожной отрасли, 2017, т. 79, № 1, с. 38–43.
27. Trofimenko Yu., Komkov V., Trofimenko K. Forecast of energy consumption and greenhouse gase emissions // Transportation Research Procedia, 2020, vol. 50, pp. 698–707. DOI: 101016/ j.trpro. 2020.10.082
28. Kelly F. Reversibility and stochastic networks. New York, Wiley, 1979.
29. Schreckenberg M., A. Schadschneider A., Nagel K., and Ito N. Discrete stochastic models for traffic flow // Phys. Rev. E, vol. 51, 2939. DOI: 10.1103/PhysRevE.51
30. Kelly F. Reversibility and stochastic networks. New York, Wiley, 1979.
31. Buslaev A.P., Tatashev A.G. (2011). Particles flow on the regular polygon // Journal of Concrete and Applicable Mathematics, vol. 9, no. 4, pp. 290–303.
32. Blank M. Metric Properties of discrete time exclusion type processes in continuum // J. Stat. Phys., 2010, vol. 140, pp. 170–197. DOI: 10.1007/s10955–010–9983-y

© Пospelov Павел Иванович ( pospelov@madi.ru ), Таташев Александр Геннадьевич ( a-tatashev@yandex.ru ),  
 Терентьев Алексей Вячеславович ( aleksej.terentev.67@bk.ru ), Трофименко Юрий Васильевич ( ecology@madi.ru ),  
 Яшина Марина Викторовна ( yash-marina@yandex.ru ).

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»