DOI 10.37882/2223-2966.2025.10.43

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЗАДАЧЕ С ОГРАНИЧЕНИЕМ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОГО ТИПА

OPTIMAL PROGRAM CONTROL IN A PROBLEM WITH ISOPERIMETRIC TYPE CONSTRAINTS

D. Khrychev
A. Vinogradova

Summary. The work is devoted to the construction of optimal program control of a stochastic dynamic system containing a random parameter, in the presence of an isoperimetric type of constraint. The solution is based on the method of discretization of the distribution of random parameters, the essence of which consists in approximating the original stochastic problem with deterministic optimal control problems obtained because of replacing the random parameters of the original problem with discrete random variables converging to these parameters according to the distribution. Deterministic problems, in turn, are solved using known standard methods, both analytical and numerical. The results obtained for different distributions of the random parameter are compared in terms of the rate of convergence of solutions of approximate deterministic problems and the behavior of optimal control functions.

Keywords: optimal control, program control, distribution discretization method.

Хрычев Дмитрий Аркадьевич
кандидат физико-математических наук, доцент,
Российский технологический университет МИРЭА
dakford@yandex.ru
Виноградова Арина Николаевна
Российский технологический университет МИРЭА
arina.airina@yandex.ru

Аннотация. Работа посвящена построению оптимального программного управления стохастической динамической системой, содержащей случайный параметр, при наличии ограничения изопериметрического типа. В основе решения лежит метод дискретизации распределения случайных параметров, суть которого состоит в аппроксимации исходной стохастической задачи детерминированными задачами оптимального управления, получаемыми в результате замены случайных параметров исходной задачи дискретными случайными величинами, сходящимися к этим параметрам по распределению. Детерминированные задачи, в свою очередь, решаются с помощью известных стандартных методов, как аналитических, так и численных. Результаты, полученные для разных распределений случайного параметра, сравниваются с точки зрения скорости сходимости решений приближённых детерминированных задач и поведения оптимальных управляющих функций.

Ключевые слова: оптимальное управление, программное управление, метод дискретизации распределения.

Введение

Задачам оптимального управления стохастическими системами посвящена огромная литература, однако лишь незначительная часть ее относится к изучению программного, т.е. зависящего только от времени, управления. Так, например, различные аспекты программного управления, прежде всего необходимые условия оптимальности, рассматривались в работах [1–4]. В работе [5] доказано существование оптимального программного управления для достаточно широкого круга задач, там же предложен метод аппроксимации исходной стохастической задачи детерминированными задачами, основанный на дискретизации распределений входящих в систему случайных параметров. Еще один метод построения оптимального программного управления, основанный на усреднении уравнений управляемой динамической системы и усечении полученной системы моментных уравнений, рассмотрен в работе [6]. Указанные методы были применены для нахождения оптимального программного управления различными стохастическими системами в работах [7] и [8].

Гораздо более обширной является литература, посвященная управлению с обратной связью при неполной информации о состоянии системы, предельным случаем которого, когда информация о состоянии системы вообще отсутствует, является программное управление (см., например, [9–12] и др.). Однако при таком подходе результаты, касающиеся именно программного управления, естественно, не обладают достаточной проработанностью.

Целью настоящей работы является решение задачи оптимального программного управления стохастической динамической системой, содержащей случайный параметр, при наличии ограничения изопериметрического типа. Используется упомянутый выше метод дискретизации распределения случайных параметров [5]. Полученные в результате применения дискретизации детерминированные задачи решаются с помощью комбинации аналитических и численных методов, в результате получаем приближенные решения исходной стохастической задачи. При этом точность аппроксимации исходной стохастической задачи приближенными детерминированными задачами оценивается экспериментально, поскольку результаты [5] гарантируют лишь сходимость оптимальных управлений для приближенных задач к оптимальному программному управлению для исходной задачи, но не дают оценку их близости. В работе рассматриваются различные распределения случайного параметра и полученные результаты сравниваются с точки зрения скорости сходимости решений приближённых детерминированных задач и поведения оптимальных управляющих функций.

Постановка задачи

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = -kx(t) + u(t), t \in [0, T], \tag{1}$$

где k — случайная величина непрерывного типа, $u(t)$ — управляющая функция, T фиксировано. Уравнению (1) удовлетворяет, например, скорость материальной точки единичной массы, движущейся в среде со случайным коэффициентом сопротивления k под воздействием силы $u(t)$; возможны и другие физические интерпретации.

Уравнение (1) дополняется начальным условием

$$x(0) = 0. \tag{2}$$

Накладывается ограничение на амплитуду управляющей функции

$$|u(t)| \le U \, \forall t \in [0, T], \tag{3}$$

а также ограничение изопериметрического типа

$$\int_0^T u^2(t)\,dt = A, \tag{4}$$

где $U, A = \mathrm{const}$. На параметры T, U и A накладывается естественное условие $A < U^2 T$, невыполнение которого, как легко видеть, приводит к несовместимости ограничений (3) и (4).

Наконец, введем функционал качества

$$J(u) = \mathrm{E}x(T) \to \sup, \tag{5}$$

где E — оператор математического ожидания.

Ставится задача отыскания управляющей функции $u = u(t)$, удовлетворяющей указанным выше ограничениям и доставляющей максимум функционалу качества (5).

Решение задачи

Применим метод дискретизации распределения, описанный в работе [5], для решения задачи (1)–(5).

Пусть $k_n, n = 1, 2, \ldots$ — дискретные случайные величины, сходящиеся к случайному параметру k по распределению, $k_n^m, m = 1, \ldots, n$ — значения с. в. k_n, $p_m = \mathrm{P}(k_n^m)$. Ниже будет описано построение случайных величин k_n для каждого из рассматриваемых в работе распределений.

Заменим в уравнении (1) с. в. k на k_n:

$$\dot{x}(t) = -k_n x(t) + u(t).$$

Тогда случайная функция $x(t)$ совпадает с одной из n неслучайных функций $x_m(t)$, являющихся решениями задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_m(t) = -k_n^m x_m(t) + u(t), \\ x_m(0) = 0, m = 1, \ldots, n, \end{cases} \tag{6}$$

причем $x(t) = x_m(t)$ с вероятностью p_m. Поэтому функционал качества приобретает вид

$$J_n(u) = \mathrm{E}x(T) = \sum_{m=1}^{n} p_m x_m(T) \to \sup. \tag{7}$$

Таким образом, для $n = 1, 2$ и т.д. мы получили детерминированную задачу оптимального управления (6), (3), (4), (7). Из результатов [5] следует, что при $n \to \infty$ решения (оптимальные управляющие функции) этих задач сходятся к решению исходной стохастической задачи по функционалу, т.е. образуют максимизирующую последовательность управлений для функционала качества исходной задачи.

Перейдем к решению приближенной детерминированной задачи (6), (3), (4), (7). Из необходимых условий оптимальности [13] следует, что оптимальная управляющая функция $\hat{u}(t)$ имеет вид

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} U, \text{ если } \dfrac{\sum_{m=1}^{n} \gamma_m(t)}{2\beta} \ge U, \\ \dfrac{\sum_{m=1}^{n} \gamma_m(t)}{2\beta} \text{ при } \left| \dfrac{\sum_{m=1}^{n} \gamma_m(t)}{2\beta} \right| < U, \\ -U, \text{ если } \dfrac{\sum_{m=1}^{n} \gamma_m(t)}{2\beta} \le -U, \end{cases} \tag{8}$$

где $\beta > 0$ — числовой, а $\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t), t \in [0, T]$, — функциональные множители Лагранжа, причем $\gamma_m(t)$ удовлетворяют уравнениям Эйлера $-\dot{\gamma}_m(t) + k_n^m \gamma_m(t) = 0, m = 1, \ldots, n$, и начальным условиям $\gamma_m(T) = p_m$ (условия трансверсальности), откуда

$$\gamma_m(t) = p_m e^{-k_n^m(T-t)}. \quad (9)$$

Далее, множитель Лагранжа β находится из изопериметрического условия (4) как корень уравнения

$$F(\beta) = \int_0^T u^2(t)dt - A = 0, \quad (10)$$

где $\hat{u}(t) = \hat{u}(t,\beta)$ задается формулой (8). Уравнение (10) решается численно, при этом предварительно устанавливается единственность его корня и локализация его на отрезке

$$[\beta_1, \beta_2], \text{ где } \beta_1 = \frac{\min\limits_{t\in[0;T]} \sum_{m=1}^n \gamma_m(t)}{2U},$$

$$\beta_2 = \frac{\max\limits_{t\in[0;T]} \sum_{m=1}^n \gamma_m(t)}{2\sqrt{\frac{A}{T}}}.$$

Как видим, одновременно с нахождением значения β вычисляется оптимальное управление $u = \hat{u}(t)$, которое далее подставляется в задачу Коши (6). Последняя, ввиду структуры (8) функции $\hat{u}(t)$, уже не допускает аналитического решения, и потому решается численно. На последнем этапе находится значение функционала качества (7).

В заключение поясним критерий выбора числа значений n приближенной дискретной с. в. k_n. Это число подбирается экспериментально из соображений стабилизации значения функционала качества $J_n(u)$: разность значений $J_n(u)$ для двух последующих значений n не должна превышать некоторого порогового значения τ, которое в работе было выбрано равным 10^{-6}.

Результаты

В работе рассматривались три различных распределения случайного параметра k: равномерное, смещенное показательное и нормальное. Опишем процесс дискретизации распределения для каждого из этих трех случаев.

Для равномерного распределения на отрезке $[a,b]$ с плотностью

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, x \in [a,b], \\ 0, x \notin [a,b], \end{cases} \quad (11)$$

значения приближенной с. в. k_n задаются как

$$k_n^m = a + hm - \frac{h}{2}, m = 1,\dots,n, \quad (12)$$

где $h = \frac{b-a}{n}$, а вероятность, с которой принимается каждое из значений k_n^m, $p_m = \mathrm{P}(k_n^m) = \frac{1}{n}$.

Для смещенного показательного распределения с плотностью

$$f_k(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-a)}, x \geq a, \\ 0, x < a, \end{cases} \quad (13)$$

сначала находим число b из условия малости вероятности попадания в интервал $[b,+\infty)$ значения случайной величины k: $\int_b^{+\infty} \lambda e^{-\lambda(x-a)}dx = \varepsilon$. Далее определяем дискретную с. в. k_n со значениями (12) и вероятностями принятия этих значений

$$p_m = \mathrm{P}(k_n^m) = \frac{1}{1-\varepsilon}\int_{s_m}^{s_{m+1}} \lambda e^{-\lambda(x-a)}dx, m = 1,\dots,n,$$

где $s_i = a + hi, i = 0,\dots,n.$ Согласно [5] при $\varepsilon \to 0$ и $n \to \infty$ случайная величина $k_n = k_{n,\varepsilon}$ стремится к с. в. k по распределению.

Аналогично аппроксимируется нормально распределенный параметр k с плотностью

$$f_k(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}, \quad (14)$$

только здесь на первом шаге приходится отрезать «хвосты» распределения, уходящие как на $+\infty$, так и на $-\infty$, т.е. находить a и b такие, что

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_b^{+\infty} e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}dx = \varepsilon,$$

после чего на отрезке $[a,b]$ повторять уже известную нам процедуру.

Приведем результаты вычисления значений функционала качества $J_n(u)$. Для всех распределений вычисления проводились при значениях параметров $T = 5, U = 1Ł\ A = 4$. Далее, параметры распределений: для равномерного распределения (11) $a = 1, b = 2$; для показательного распределения (13) $a = 1, \lambda = 2$; наконец, для нормального распределения (14) $M = 1.5$ и $\sigma = 0.25$.

Как видно из таблицы, быстрее всего стабилизация значения J_n происходит в случае равномерно распреде-

Таблица 1.
Зависимость значения функционала качества $J_n\left(\hat{u}\right)$ от числа значений n приближенной дискретной с. в.

Равномерное распределение		Показательное распределение		Нормальное распределение	
n	J_n	n	J_n	n	J_n
30	0.68996950	300	0.71833773	200	0.88007631
40	0.68998403	400	0.71834758	500	0.88012908
50	0.68999075	500	0.71835213	1000	0.88014722
60	0.68999441	600	0.71835461	1500	0.88015333
70	0.68999661	700	0.71835610	2000	0.88015639
80	0.68999804	800	0.71835707	3000	0.88015947
90	0.68999902	900	0.71835774	4000	0.88016101
100	0.68999972	1000	0.71835821	5000	0.88016193

ленного параметра, медленнее всего — для нормального распределения. Объяснение видится в ограниченности носителя плотности распределения вероятностей для равномерно распределенной с. в. и в отсутствии таковой в остальных случаях.

В заключение приведем график оптимальной управляющей функции $u = \hat{u}\left(t\right)$ для случая равномерно распределенного параметра.

Отметим, что для всех рассмотренных в работе распределений оптимальные управляющие функции отли-

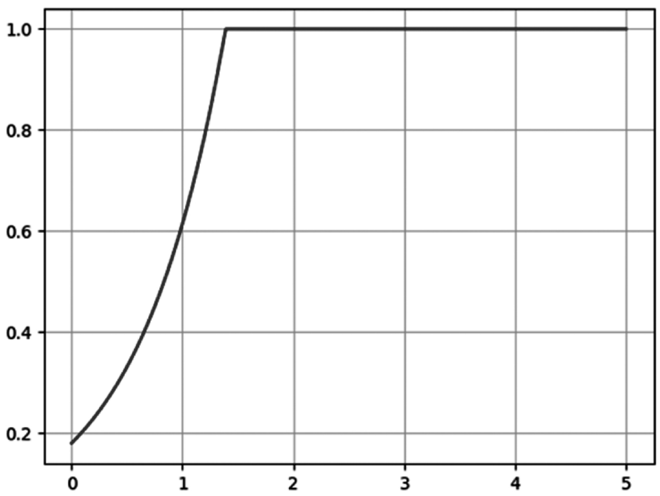

Рис. 1. Оптимальная управляющая функция $\hat{u}\left(t\right)$

чаются друг от друга столь незначительно, что графики их практически неразличимы. В принципе, близость друг другу оптимальных управляющих функций для различных распределений случайного параметра является эффектом ожидаемым. Действительно, в силу (8) и (9) график $\hat{u}\left(t\right)$ вне зависимости от распределения должен иметь вид, как на рис.1, а ввиду жесткости условий (3) и (4) отличие функций $\hat{u}\left(t\right)$ друг от друга для различных распределений в метрике, скажем, пространства $C\left[0,T\right]$, должно быть незначительным. В то же время, столь малое отличие (не более 10^{-2} в метрике $C\left[0,5\right]$), которое показал численный эксперимент, оказалось несколько неожиданным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Warfield V.A stochastic maximum principle. / Ph. D. Thesis, Brown University, Providence, RI, 1971.
2. Holland C. Gaussian open loop control problems. / SIAM J. Control, 1975, N 13, p. 545-551.
3. Колмановский В.Б. Квазиоптимальное программное управление некоторыми стохастическими системами. / Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 5, с. 795–805.
4. Докучаев Н.Г., Якубович В.А. Принцип максимума для стохастических дифференциальных уравнений с детерминированным управлением. / Кибернетика и вычислительная техника, 1982, № 54, с. 72–78.
5. Хрычев Д.А. Оптимальное программное управление: существование и аппроксимация. / Матем. сб., 2001, т. 192, № 5, с. 125–144.
6. Хрычев Д.А. Моменты решений эволюционных уравнений и субоптимальные программные управления. / Матем. сб., 2007, т. 198, № 7, с. 123–160.
7. Башаримов А.Н. Нелинейное оптимальное программное управление: метод дискретизации распределения. / Математические методы в технологиях и технике, 2021, № 1, с. 24–29.
8. Khrychev D.A. Optimal programmed control in energy minimisation problem. E3S Web of Conferences. 2023; Vol. 458 (01028). https://doi.org/10.1051 / e3sconf/202345801028.
9. Bensoussan A. Stochastic Control of Partially Observable Systems. / Cambridge University Press, Cambridge, 1992 — 352 p.
10. Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Оптимальное управление нелинейными системами со случайной структурой при неполной информации о векторе состояния. / Автоматика и телемеханика, 2006, № 7, с. 62–75.
11. Рыбаков К.А. Оптимальное управление стохастической системой со случайным периодом квантования. / Труды МФТИ, 2015, т. 7, № 1, с. 145–165.
12. Wang G.C., Xiong J., Zhang S.Q. Partially observable stochastic optimal control. / Int. J. Numer. Anal. Mod., 2016, v. 13, N 3, p. 493–512.
13. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. — Москва: Физматлит, 2018–384 с.

© Хрычев Дмитрий Аркадьевич (dakford@yandex.ru); Виноградова Арина Николаевна (arina.airina@yandex.ru)