

# ОБ АППРОКСИМАЦИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ МЕТОДОМ ПОТОЧЕЧНОЙ КОЛЛОКАЦИИ

Панкратов Илья Алексеевич

К. т. н., доцент,

Саратовский государственный  
университет им. Н.Г. Чернышевского

## COLLOCATION METHOD FOR APPROXIMATION OF OPTIMAL TRAJECTORIES

I. Pankratov

### Annotation

The article considers the problem of optimal control for the case where energy consumption is minimized. End time of controlled process is fixed. With the help of collocation method we constructed an approximate solution. An example of the numerical solution of the problem is given.

**Keywords:** optimal control, collocation method.

### Аннотация

В статье рассмотрена задача оптимального управления для случая, когда минимизируются затраты энергии. Время окончания управляемого процесса задано. С помощью метода поточечной коллокации построено приближённое решение. Приведён пример численного решения задачи.

### Ключевые слова:

Оптимальное управление, метод поточечной коллокации.

## 1. Постановка задачи.

Пусть движение управляемой системы описывается линейным векторным обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad (1)$$

Здесь  $A, B$  – постоянные матрицы размерности  $n \times n$  и  $n \times 1$  соответственно;  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  – символ транспонирования; управление  $u$  – скалярная функция, на которую наложены ограничения. Необходимо перевести управляемую систему из начального положения

$$x(0) = x^0 \quad (2)$$

в заданное конечное

$$x(T) = x^1 \quad (3)$$

Качество процесса управления определяется функционалом

$$J = \int_0^T u^2 dt,$$

который характеризует затраты энергии на управление. Время окончания управляемого процесса  $T_K$  задано. Поставленная задача решается с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина [1]. Введём вектор сопряжённых переменных

$$\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T.$$

Известно [2], что система сопряжённых дифференциальных уравнений в этом случае имеет вид:

$$\frac{d\Psi}{dt} = -A^T \Psi. \quad (4)$$

При этом оптимальное управление есть

$$u^{opt} = (B_1 \psi_1 + \dots + B_n \psi_n) / 2. \quad (5)$$

Таким образом, решение задачи оптимального управления сведено к краевой задаче с закреплённым правым концом траектории, описываемой системой линейных дифференциальных уравнений (1), (4), (5) порядка  $2n$  и  $2n$  краевыми условиями (2), (3).

## 2. Метод поточечной коллокации.

Традиционно для численного решения указанных краевых задач оптимального управления применяются различные итерационные методы: метод Ньютона, метод градиентного спуска [3]. Поиску эффективных численных методов посвящены, например, работы Р.П. Федоренко [4], Ф.П. Васильева [5] и др. К сожалению, в общем случае неизвестны формулы для нахождения начальных значений сопряжённых переменных. Отметим также, что произвольно взятые начальные приближения для значений сопряжённых переменных плохо сходятся к тем, которые доставляют нули функциям невязок из-за постоянного попадания в их локальные минимумы, где итерационные методы не дают хороших результатов. В настоящей работе приближённое решение рассматриваемой задачи

оптимального управления ищется в виде линейной комбинации базисных функций [6]:

$$x_j \approx \tilde{x}_j = x_j^0 + \sum_{k=1}^n a_{j,k} N_k^x(t),$$

$$\psi_j \approx \tilde{\psi}_j = \sum_{k=1}^n a_{n+j,k} N_k^\psi(t), \quad (6)$$

$$j = \overline{1, n}.$$

Здесь  $a_{j,k}$ ,  $j = \overline{1, 2n}$ ,  $k = \overline{1, M}$

– неизвестные коэффициенты, а  $N_k^x(t)$ ,  $N_k^\psi(t)$  – линейно независимые базисные функции, удовлетворяющие условиям:

$$N_s^x(0) = 0, \quad s = \overline{1, M}; \quad \exists k, l, m, \quad N_k^x(T) \neq 0, \quad (7)$$

$$N_l^\psi(0) \neq 0, \quad N_m^\psi(T) \neq 0.$$

Из условий (7) следует, что функции  $\tilde{x}_j$  автоматически удовлетворяют начальным условиям при произвольных коэффициентах

$$a_{j,k}, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, M}.$$

Подставляя разложения (6) в фазовые и сопряжённые уравнения, найдём невязки

$$R_{[0;T]}^{x_s} \quad \text{и} \quad R_{[0;T]}^{\psi_s}.$$

Для получения приближённых равенств

$$R_{[0;T]}^{x_s} \approx 0 \quad \text{и} \quad R_{[0;T]}^{\psi_s} \approx 0$$

при  $t \in [0; T_k]$  воспользуемся методом поточечной коллокации. Для этого выберем следующую систему весовых функций:

$$W_k = \delta(t - t_k), \quad k = \overline{1, M}.$$

Здесь  $\delta(t)$  – дельта-функция Дирака, а  $t_k = k T_k/M$  – точки коллокации. Потребуем также, чтобы выполнялись равенства

$$\int_0^T R_{[0;T]}^{x_s} \delta(t - t_k) dt = 0, \quad (8)$$

$$s = \overline{1, n}; \quad k = \overline{1, M}.$$

$$\int_0^T R_{[0;T]}^{\psi_{s-n}} \delta(t - t_k) dt - (\tilde{x}_{s-n} - x_{s-n}^i) \cdot \delta(t - t_k)|_{t=T} = 0, \quad s = \overline{n+1, 2n}. \quad (9)$$

Преобразовывая (8), (9) с помощью известного свойства дельта-функции, получим результирующую систему  $2Mn$  линейных алгебраических уравнений

$$R_{[0;T]}^{x_s}|_{t=t_k} = 0, \quad s = \overline{1, n}; \quad k = \overline{1, M}. \quad (10)$$

$$R_{[0;T]}^{\psi_{s-n}}|_{t=t_k} - (\tilde{x}_{s-n} - x_{s-n}^i) \delta(t - t_k)|_{t=T} = 0, \quad (11)$$

$$s = \overline{n+1, 2n}; \quad k = \overline{1, M}.$$

Решив систему (10), (11), мы построим решение фазовых и сопряжённых уравнений, точно удовлетворяющее условиям на левом конце траектории и приближённо – на правом.

### 3. Пример численного решения задачи.

Пусть материальная точка массы  $m$  кг движется прямолинейно под действием управляющей силы  $F(t)$  и силы сопротивления  $F_{\text{сопр}} = -kv$ , где  $v$  – скорость точки. Движение точки согласно второму закону Ньютона описывается уравнением

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(t) - kv. \quad (12)$$

Введём фазовые координаты  $x_1 = x$  (координата точки, м),  $x_2 = dx/dt = v$ , м/сек; и управление  $u = F(t)/m$ , м/сек<sup>2</sup>.

Тогда уравнение (12) можно представить в виде системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{k}{m} x_2 + u. \quad (13)$$

В начальный момент времени состояние управляемой системы есть

$$x(0) = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix};$$

в конечный момент времени

$$x(T) = \begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \end{pmatrix}.$$

Из уравнений (13) следует, что матрицы  $A$  и  $B$  имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -k/m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Введём сопряжённые переменные  $\Psi_1, \Psi_2$ . Система дифференциальных уравнений для сопряжённых переменных примет вид

$$\frac{d\Psi_1}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\Psi_2}{dt} = -\Psi_1 + \frac{k}{m} \Psi_2.$$

При этом оптимальное управление имеет вид –  $u^{\text{опт}} = \frac{\Psi_2}{2}$ .

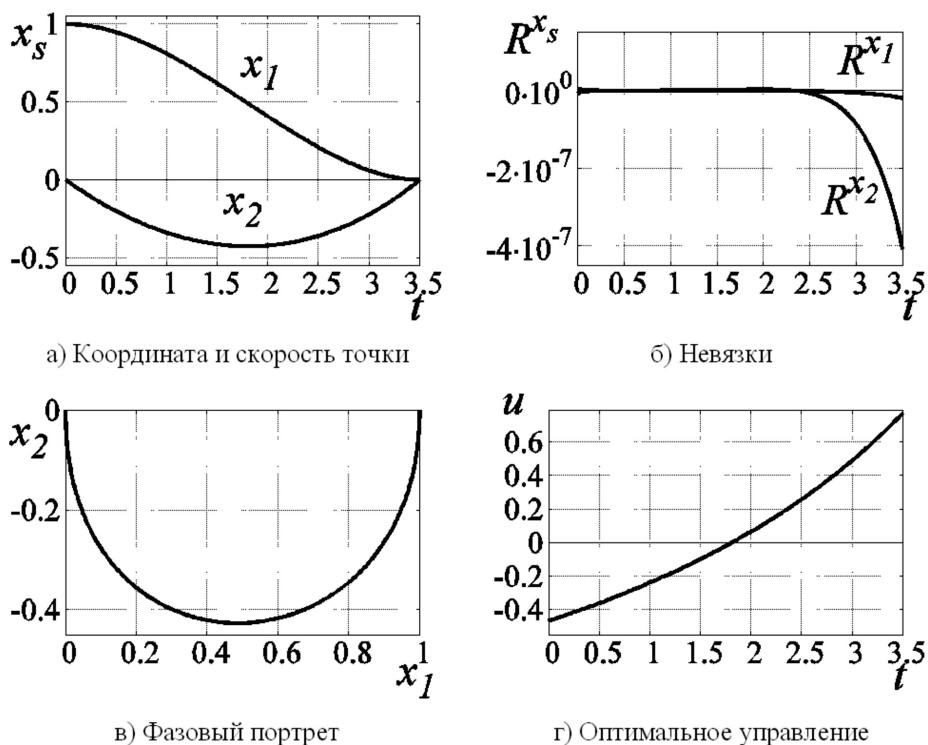


Рисунок 1. Управляемое движение точки (линейная сила сопротивления).

Для численного решения задачи была составлена программа с помощью математического пакета Scilab [7].

На рис. 1 показаны результаты решения задачи для следующих значений параметров:

$$M = 13, T = 3.5 \text{ Ас}, k/m = 0.125 \text{ Ас}^{-1},$$

$$x^0 = (1, 0)^T, x^1 = (0, 0)^T.$$

При этом в качестве базисных функций были взяты полиномы

$$N_k^x = t^k, N_k^v = t^{k-1}, k = \overline{1, M}.$$

Отметим, что при сек скорость точки достигает своего минимального значения и  $t = 1,75$  сек – точка перегиба функции  $x_1 = x_1(t)$ .

В результате исследования задачи было установлено, что при фиксированном количестве базисных функций

погрешность тем меньше, чем меньше время окончания управляемого процесса и параметр  $k/m$ .

Наименьшая погрешность определения конечного положения точки с выбранными параметрами задачи была достигнута при тринадцати базисных функциях.

Отметим также, что погрешность метода поточечной коллокации несколько выше, чем у рассмотренного ранее в работах [8–10] метода Галёркина. В то же время построить систему (10), (11) проще, так как в (8), (9) не нужно искать первообразную. Следовательно, метод поточечной коллокации может с успехом применяться для грубой оценки решения краевой задачи.

В дальнейшем рассмотренный метод будет применён к решению задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата [11, 12].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С.Понтрягин[ и др.].М.: Наука, 1983. 393с.
2. Ройтенберг Я.Н.Автоматическое управление. М.: Наука, 1971. 396с.
3. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971. 424с.
4. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488с.

5. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 552с.
6. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с.
7. Алексеев Е. Р., Чеснокова О. В., Рудченко Е. А. Scilab: Решение инженерных и математических задач. М.: ALTLinux; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 269 с.
8. Панкратов И. А. Решение задач оптимального управления методом взвешенных невязок. Математика. Механика. 2014. №16. С. 117–120.
9. Панкратов И. А. Применение метода Галёркина к решению линейных задач оптимального управления. Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 3. С. 340–349.
10. Панкратов И. А. Об одном методе решения задач оптимального управления. Международная научная школа "Парадигма". Лято-2015. В 8 т. Т.2: Информационные технологии: сборник научных статей. Варна: ЦНИИ "Парадигма", 2015. С. 204–212.
11. Челноков Ю.Н., Панкратов И. А. Переориентация орбиты космического аппарата, оптимальная в смысле минимума интегрального квадратичного функционала качества. Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 8. С. 74–78.
12. Челноков Ю. Н., Панкратов И. А. Переориентация круговой орбиты космического аппарата с тремя точками переключения управления. Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 1. С. 70–73.

© И.А. Панкратов, (PankratovIA@info.sgu.ru), Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики».

Russian Oil&Gas Industry Week  
**НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
НЕФТЕГАЗОВЫЙ  
ФОРУМ**

19-20 апреля 2016 г.  
Москва, ЦВК «Экспоцентр»  
[www.oilandgasforum.ru](http://www.oilandgasforum.ru)

16-я Международная выставка  
**НЕФТЕГАЗ-2016**

18-21 апреля 2016 г.  
Москва, ЦВК «Экспоцентр»  
[www.neftegaz-expo.ru](http://www.neftegaz-expo.ru)

12+