DOI 10.37882/2223-2966.2023.7-2.31

ДИСКРЕТНЫЕ ГРУППЫ И РЕШЕНИЯ СТЕПЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОРБИТЫ ТАНГЕНСОВ ОБОБЩЁННОГО УРАВНЕНИЯ ЭМДЕНА–ФАУЛЕРА

Хакимова Зиля Наильевна
Кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского,
vka@mil.ru

Аннотация. Рассматривается класс обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка со степенными правыми частями, подклассом которого является обобщённое уравнение Эмдена–Фаулера (ОУЭФ). Для одного уравнения из класса ОУФЭ, общее решение которого выражается через тригонометрические и гиперболические функции косинуса и тангенса, построена дискретная группа преобразований 78-го порядка, подгруппами которой являются группы преобразований диэдра 6-го и 12-го порядков, а также изображены графы этих дискретных групп.
Найдены все уравнения орбиты указанного выше уравнения из класса ОУЭФ и приведены общие решения всех этих уравнений.

Ключевые слова: обобщенное уравнение Эмдена–Фаулера (ОУЭФ), обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка, дифференциальное уравнение со степенной правой частью, дискретная группа преобразований, группа диэдра, точное решение дифференциального уравнения.

DISCRETE GROUPS AND SOLUTIONS OF POWER DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE ORBIT OF TANGENTS OF THE GENERALIZED EMDEN–FOWLER EQUATION

Z. Khakimova

Summary: We consider a class of ordinary differential equations of the 2nd order with power right-hand sides, a subclass of which is the generalized Emden–Fowler equation (GEFE). For one equation from the GEFE class, the general solution of which is related to the trigonometric and hyperbolic cosine and tangent functions, a discrete 78th order transformation group is constructed, subgroups of which are the 6th and 12th order dihedral transformation groups, also the graphs of these discrete groups are constructed.
All equations of the orbit of the original equation from the GEFE class are found and general solutions of these equations are calculated.

Keywords: generalized Emden–Fowler equation (GEFE), 2nd order ordinary differential equation, differential equation with power right side, discrete transformation group, dihedral group, exact solution of the differential equation.

Введение

Одна из главных задач теории дифференциальных уравнений — нахождение точных решений уравнений. Эта задача успешно решается методами дискретно-группового анализа дифференциальных уравнений, разработанного В.Ф. Зайцевым [1].

Впервые «подвергся» дискретно-групповому анализу класс обобщённых уравнений Эмдена–Фаулера (ОУЭФ):

$$y''_{xx} = Ax^k y^l \left(y'_x\right)^m, \tag{1}$$

для которого была найдена дискретная группа диэдра (6-го порядка) преобразований, замкнутых в этом классе уравнений.

С помощью метода «размножения» разрешимых случаев (по найденной группе диэдра и её расширениям) В.Ф. Зайцевым и его научной школой было получено более 100 разрешимых уравнений [1–5] в классе уравнений (1).

В свою очередь, эти интегрируемые случаи являются «фундаментом» для «размножения» разрешимых уравнений в более общих классах уравнений, в частности, в 4-хпараметрическом (не считая коэффициента) классе степенных уравнений:

$$y''_{xx} = Ax^k y^l \left(y'_x\right)^m \left(xy'_x - y\right)^n. \tag{2}$$

Для класса уравнений (2) была найдена группа преобразований диэдра 12-го порядка, с помощью которой было получено [3] около 400 разрешимых уравнений класса (2). Но общие решения этих уравнений до сих пор практически не вычислены, за малым исключением.

Представленная работа посвящена дискретным симметриям и вычислению точных решений степенных дифференциальных уравнений вида (2) орбиты тангенсов ОУЭФ.

Данная статья является продолжением и конкретизацией статей [6] и [7], в которых был указан путь нахождения уравнений орбиты тангенсов и вычисления их решений. В представленной статье эти алгоритмы реализованы: найдены 78 уравнений степенного вида (2) орбиты тангенсов ОУЭФ и получены их общие решения.

Группы диэдра для классов уравнений (1) и (2)

Обозначим класс уравнений (2) с помощью вектора параметров.

$$(k,l,m,n|A) \tag{1}$$

Тогда его подкласс (1) при $n = 0$:

$$(k,l,m,0|A) = (k,l,m|A) \tag{2}$$

Основой дискретно-группового анализа дифференциальных уравнений является нахождение преобразований, замкнутых в исследуемых классах уравнений.

Для класса уравнений (1) были найдены 2 преобразования, действующие на всём классе уравнений [1]:

$$\mathbf{r}: \quad x \rightleftarrows y, (k,l,m,0|A) \xrightarrow{r} (l,k,3-m,0|A), \mathbf{r}^2 = \mathbf{E} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{g}: \quad x \to y^{\frac{1}{k+1}}, y \to (y'_x)^{-\frac{1}{l}} \\ (k,l,m,0|A) \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{g} \left(\frac{1}{1-m}, -\frac{k}{k+1}, \frac{2l+1}{l}, 0 \left| \frac{l(m-1)}{(k+l)^2} A \right. \right), \mathbf{g}^3 = \mathbf{E} \end{gathered} \tag{4}$$

где $\mathbf{E}$ — тождественное преобразование.

Преобразования $\mathbf{r}$ и $\mathbf{g}$ являются образующими дискретной группы преобразований диэдра 6-го порядка:

$$D_3 = \{\mathbf{E},\mathbf{g},\mathbf{g}^2,\mathbf{r},\mathbf{gr},\mathbf{g}^2\mathbf{r}\}, \mathbf{r}^2 = \mathbf{g}^3 = (\mathbf{gr})^2 = \mathbf{E} \tag{5}$$

Для класса уравнений (2) была найдена группа преобразований диэдра 12-го порядка [3]:

$$\begin{gathered} D_6 = \{\mathbf{E},\mathbf{h},\mathbf{h}^2,\mathbf{h}^3,\mathbf{h}^4,\mathbf{h}^5,\mathbf{r},\mathbf{hr},\mathbf{h}^2\mathbf{r},\mathbf{h}^3\mathbf{r},\mathbf{h}^4\mathbf{r},\mathbf{h}^5\mathbf{r}\}, \\ \mathbf{r}^2 = \mathbf{h}^6 = (\mathbf{hr})^2 = \mathbf{E} \end{gathered} \tag{6}$$

с образующими:

$$\begin{gathered} \mathbf{r}: \quad x \rightleftarrows y, (k,l,m,n|A) \xrightarrow{r} \\ \xrightarrow{r} \left(l,k,-m-n+3,n \left| (-1)^{n-1} A \right. \right), \\ \mathbf{r}^2 = \mathbf{E} \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{h}: \quad x \to \frac{1}{y'_x}, y \to -\frac{xy'_x - y}{y'_x} \\ (k,l,m,n|A) \xrightarrow{h} \left(-n,-m,k+l+3,-l \left| (-1)^{1-l} \cdot A \right. \right), \\ \mathbf{h}^6 = \mathbf{E} \end{gathered} \tag{8}$$

Графы групп D_3 (5) и D_6 (6) изображены на рис. 1 и рис. 2.

Уравнения, соответствующие вершинам графов, помещены в табл. 1 и 2. Дуги графов обозначают преобразования — элементы групп (5) и (6), связывающие уравнения.

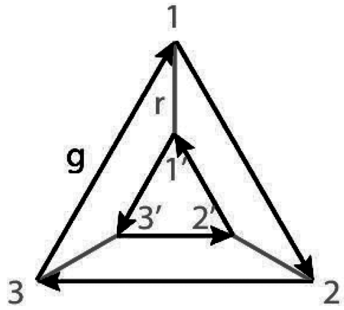

Рис. 1. Граф группы D_3

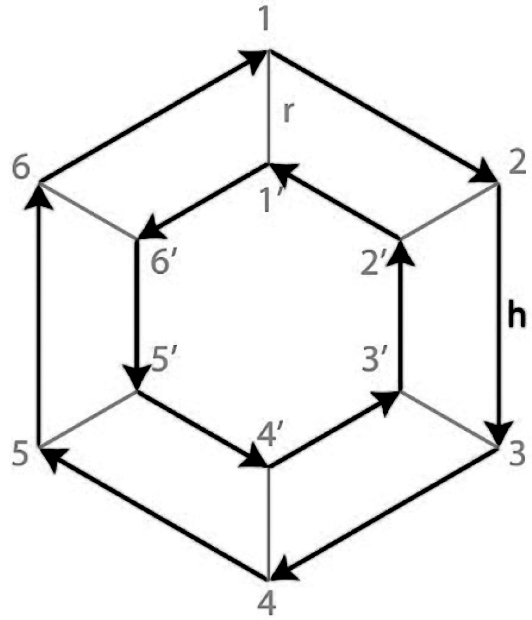

Рис. 2. Граф группы D_6

Таблица 1.

Уравнения-вершины графа группы D_3

1	(k, l, m)	1′	$(l, k, 3 - m)$
2	$\left(\frac{1}{1-m}, -\frac{k}{k+1}, \frac{2l+1}{l}\right)$	2′	$\left(-\frac{k}{k+1}, \frac{1}{1-m}, \frac{l-1}{l}\right)$
3	$\left(-\frac{l}{l+1}, \frac{1}{m-2}, \frac{k-1}{k}\right)$	3′	$\left(\frac{1}{m-2}, -\frac{l}{l+1}, \frac{2k+1}{k}\right)$

Дискретные группы 18-го и 78-го порядков

Рассмотрим уравнение

$$\left(2, -\frac{5}{3}, 0, 0 \middle| A\right) \tag{9}$$

принадлежащее классам уравнений (1) и (2).

Применив к (9) и преобразованным уравнениям группу D_3 3 раза, получаем группу 18-го порядка, граф которой изображён на рис. 3, где

$$\mathbf{s}: \quad x \to \frac{1}{x}, y \to -\frac{y}{x},$$

Таблица 2.

Уравнения-вершины графа группы D_6

1	$(k,l,m,n\|A)$	1′	$\left(l,k,-m-n+3,n\middle\|(-1)^{n-1}\cdot A\right)$
2	$\left(-n,-m,k+l+3,-l\middle\|(-1)^{1-l}\cdot A\right)$	2′	$(-m,-n,-k,-l\|A)$
3	$\left(l,-k-l-3,-m-n+3,m\middle\|(-1)^{l+m}\cdot A\right)$	3′	$\left(-k-l-3,l,n,m\middle\|(-1)^{l-1}\cdot A\right)$
4	$\left(-m,m+n-3,-k,k+l+3\middle\|(-1)^{-k-m}\cdot A\right)$	4′	$\left(m+n-3,-m,-l,k+l+3\middle\|(-1)^{-l-m}\cdot A\right)$
5	$\left(-k-l-3,k,n,-m-n+3\middle\|(-1)^{k+n}\cdot A\right)$	5′	$\left(k,-k-l-3,m,-m-n+3\middle\|(-1)^{k+m}\cdot A\right)$
6	$\left(m+n-3,-n,-l,-k\middle\|(-1)^{1-n}\cdot A\right)$	6′	$\left(-n,m+n-3,k+l+3,-k\middle\|(-1)^{-k-n}\cdot A\right)$

$$(k,l,0,0|A)\xrightarrow{s}\left(-k-l-3,l,0,0\middle|(-1)^{l-1}\cdot A\right),\quad \mathbf{s}^2=\mathbf{E} \tag{10}$$

$$\mathbf{sr}:\quad x\to-\frac{y}{x},\ y\to\frac{1}{x},$$

$$(k,l,0,0|A)\xrightarrow{sr}\left(l,-k-l-3,3,0\middle|(-1)^{l+m}\cdot A\right),\quad (\mathbf{sr})^3=\mathbf{E};\ \mathbf{sr}=\mathbf{h}^2; \tag{11}$$

$$\mathbf{f}:\quad x\to-\frac{y'_x}{xy'_x-y},\ y\to\frac{1}{xy'_x-y}$$

$$(k,-k-3,m,0|A)\xrightarrow{f}\left(-m,m-3,-k,0\middle|(-1)^{-k-m}\cdot A\right),\quad \mathbf{f}^2=\mathbf{E},\mathbf{f}=\mathbf{h}^3. \tag{12}$$

Замечание 1. На рис. 3 опущено преобразование **r**, удваивающее граф.

Применив к вершинам i.1 (i = 1, 2, …, 7) группы D_6, получаем граф группы 78-го порядка (декартово произведение графов на рис. 3 и рис. 2), изображённый на рис. 4.

Уравнения, соответствующие графам на рис. 3 и рис. 4, помещены в таблицу 3.

Замечание 2. На рис. 4, так же, как и на рис. 3, опущено преобразование **r**, поэтому отсутствует половина вершин 1.1′–7.6′.

Замечание 3. На рис. 4 изображён граф с 42 вершинами — после удвоения с помощью преобразования **r** получается 84 вершины.

Но уравнение 3.4 совпадает с уравнением 3.1′, поэтому уравнения 3.1′–3.6′ дублируют уравнения 3.1–3.6. После исключения вершин 3.1′–3.6′ получается граф 78-го порядка.

Замечание 4. Если бы уравнение 3.4 не совпадало с уравнением 3.1′, то к нему можно было бы применить D_3, как показано пунктиром на рис. 4, а затем к двум новым образовавшимся вершинам можно бы было применить D_6. Таким образом, граф на рис. 4 был бы как минимум 108-го порядка.

Решения уравнений орбиты тангенсов

Уравнение

$$\left(2,-\frac{5}{3},0,0\middle|A\right) \tag{13}$$

обозначенное на рис. 3 и 4 вершиной 1.1, имеет общее решение в параметрическом виде (τ-параметр), выраженное через тригонометрические и гиперболические функции (см. таблицу 4), следовательно, все уравнения-вершины графов на рис. 3 и 4 также выражаются через тригонометрические и гиперболические функции, так как решения уравнений связаны теми же преобразованиями, что и сами уравнения.

Выберем в качестве «ключевых» уравнения, соответствующие вершинам i.1 (i = 1, 2, …, 7), изображённые на рис. 3. Общие решения «ключевых» уравнений помещены в таблицу 4.

К каждой из «ключевых» вершин i.1 на рис. 4 «прикреплён» граф группы D_6, состоящий из 12-ти вершин. Таким образом, решения ещё 11-ти уравнений i.2—i.6 выражается через решение «ключевого» уравнения.

Обозначим общее решение «ключевого» уравнения i.1 в параметрическом виде:

$$x=\alpha,\ y=\beta,\ y'_x=\gamma,\ xy'_x-y=\delta \tag{14}$$

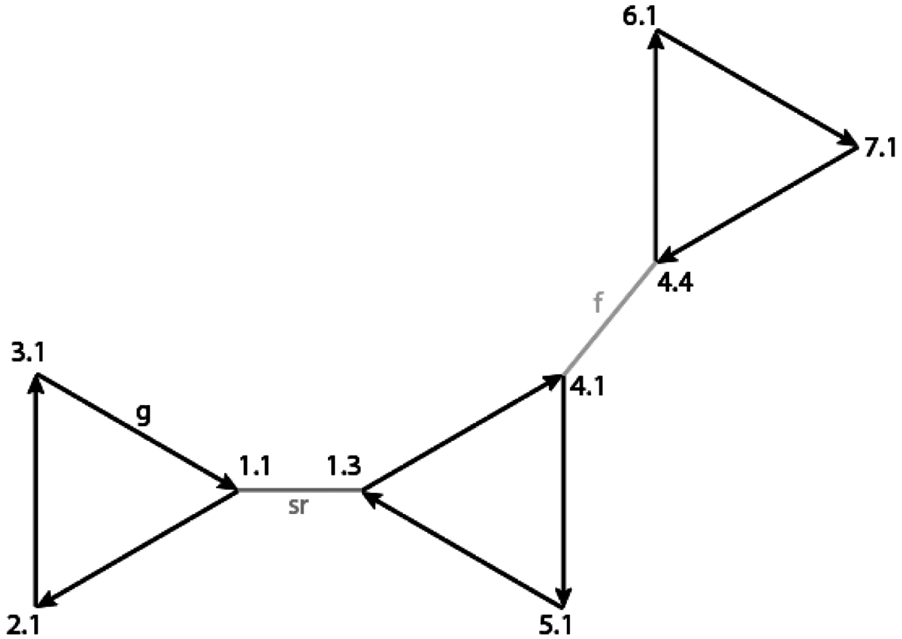

Рис. 3. Граф группы 18-го порядка

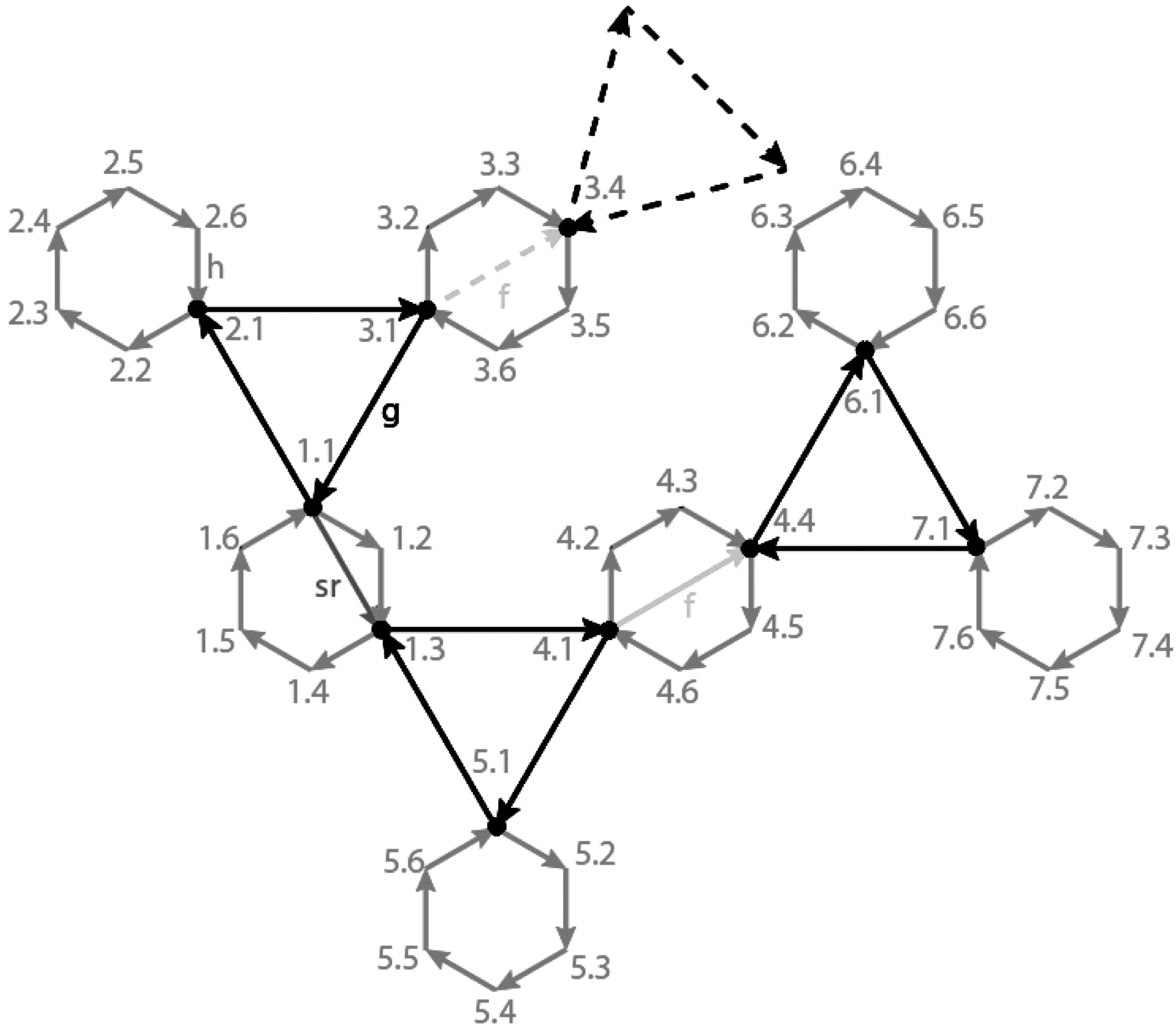

Рис. 4. Граф группы 78-го порядка

Таблица 3.

Уравнения-вершины графов 18-го и 78 порядков

1.1	$\left(2,-\frac{5}{3},0,0\middle\|A\right)$	1.1′	$\left(-\frac{5}{3},2,3,0\middle\|-A\right)$
1.2	$\left(0,0,\frac{10}{3},\frac{5}{3}\middle\|(-1)^{-\frac{1}{3}}A\right)$	1.2′	$\left(0,0,-2,\frac{5}{3}\middle\|A\right)$
1.3	$\left(-\frac{5}{3},-\frac{10}{3},3,0\middle\|(-1)^{\frac{1}{3}}A\right)$	1.3′	$\left(-\frac{10}{3},-\frac{5}{3},0,0\middle\|(-1)^{\frac{1}{3}}A\right)$
1.4	$\left(0,-3,-2,\frac{10}{3}\middle\|A\right)$	1.4′	$\left(-3,0,\frac{5}{3},\frac{10}{3}\middle\|(-1)^{-\frac{1}{3}}A\right)$
1.5	$\left(-\frac{10}{3},2,0,3\middle\|A\right)$	1.5′	$\left(2,-\frac{10}{3},0,3\middle\|A\right)$
1.6	$\left(-3,0,\frac{5}{3},-2\middle\|-A\right)$	1.6′	$\left(0,-3,\frac{10}{3},-2\middle\|A\right)$
2.1	$\left(1,-\frac{2}{3},\frac{7}{5},0\middle\|A\right)$	2.1′	$\left(-\frac{2}{3},1,\frac{8}{5},0\middle\|-A\right)$
2.2	$\left(0,-\frac{7}{5},\frac{10}{3},\frac{2}{3}\middle\|(-1)^{-\frac{1}{3}}A\right)$	2.2′	$\left(-\frac{7}{5},0,-1,\frac{2}{3}\middle\|A\right)$
2.3	$\left(-\frac{2}{3},-\frac{10}{3},\frac{8}{5},\frac{7}{5}\middle\|(-1)^{\frac{11}{15}}A\right)$	2.3′	$\left(-\frac{10}{3},-\frac{2}{3},0,\frac{7}{5}\middle\|(-1)^{\frac{1}{3}}A\right)$
2.4	$\left(-\frac{7}{5},-\frac{8}{5},-1,\frac{10}{3}\middle\|(-1)^{-\frac{2}{5}}A\right)$	2.4′	$\left(-\frac{8}{5},-\frac{7}{5},\frac{2}{3},\frac{10}{3}\middle\|(-1)^{-\frac{11}{15}}A\right)$
2.5	$\left(-\frac{10}{3},1,0,\frac{8}{5}\middle\|-A\right)$	2.5′	$\left(1,-\frac{10}{3},\frac{7}{5},\frac{8}{5}\middle\|A\right)$
2.6	$\left(-\frac{8}{5},0,\frac{2}{3},-1\middle\|-A\right)$	2.6′	$\left(0,-\frac{8}{5},\frac{10}{3},-1\middle\|-A\right)$
3.1	$\left(-\frac{5}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\middle\|A\right)$	3.1′	$\left(-\frac{1}{2},-\frac{5}{2},\frac{5}{2},0\middle\|-iA\right)$
3.2	$\left(0,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\middle\|-iA\right)$	3.2′	$\left(-\frac{1}{2},0,\frac{5}{2},\frac{1}{2}\middle\|A\right)$
3.3	$\left(-\frac{1}{2},0,\frac{5}{2},\frac{1}{2}\middle\|A\right)$	3.3′	$\left(0,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\middle\|iA\right)$
3.4	$\left(-\frac{1}{2},-\frac{5}{2},\frac{5}{2},0\middle\|A\right)$	3.4′	$\left(-\frac{5}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\middle\|A\right)$
3.5	$\left(0,-\frac{5}{2},0,\frac{5}{2}\middle\|-iA\right)$	3.5′	$\left(-\frac{5}{2},0,\frac{1}{2},\frac{5}{2}\middle\|A\right)$
3.6	$\left(-\frac{5}{2},0,\frac{1}{2},\frac{5}{2}\middle\|iA\right)$	3.6′	$\left(0,-\frac{5}{2},0,\frac{5}{2}\middle\|iA\right)$
4.1	$\left(-\frac{1}{2},-\frac{5}{2},\frac{17}{10},0\middle\|A\right)$	4.1′	$\left(-\frac{5}{2},-\frac{1}{2},\frac{13}{10},0\middle\|-A\right)$
4.2	$\left(0,-\frac{17}{10},0,\frac{5}{2}\middle\|-iA\right)$	4.2′	$\left(-\frac{17}{10},0,\frac{1}{2},\frac{5}{2}\middle\|A\right)$
4.3	$\left(-\frac{5}{2},0,\frac{13}{10},\frac{17}{10}\middle\|(-1)^{-\frac{4}{5}}A\right)$	4.3′	$\left(0,-\frac{5}{2},0,\frac{17}{10}\middle\|iA\right)$

4.4	$\left(-\frac{17}{10},-\frac{13}{10},\frac{1}{2},0 \mid (-1)^{\frac{4}{5}}A\right)$	4.4′	$\left(-\frac{13}{10},-\frac{17}{10},\frac{5}{2},0 \mid (-1)^{\frac{4}{5}}A\right)$
4.5	$\left(0,-\frac{1}{2},0,\frac{13}{10} \mid -iA\right)$	4.5′	$\left(-\frac{1}{2},0,\frac{17}{10},\frac{13}{10} \mid (-1)^{-\frac{4}{5}}A\right)$
4.6	$\left(-\frac{13}{10},0,\frac{5}{2},\frac{1}{2} \mid -A\right)$	4.6′	$\left(0,-\frac{13}{10},0,\frac{1}{2} \mid iA\right)$
5.1	$\left(-\frac{10}{7},1,\frac{8}{5},0 \mid A\right)$	5.1′	$\left(1,-\frac{10}{7},\frac{7}{5},0 \mid -A\right)$
5.2	$\left(0,-\frac{8}{5},\frac{18}{7},-1 \mid A\right)$	5.2′	$\left(-\frac{8}{5},0,\frac{10}{7},-1 \mid A\right)$
5.3	$\left(1,-\frac{18}{7},\frac{7}{5},\frac{8}{5} \mid (-1)^{\frac{3}{5}}A\right)$	5.3′	$\left(-\frac{18}{7},1,0,\frac{8}{5} \mid A\right)$
5.4	$\left(-\frac{8}{5},-\frac{7}{5},\frac{10}{7},\frac{18}{7} \mid (-1)^{-\frac{6}{35}}A\right)$	5.4′	$\left(-\frac{7}{5},-\frac{8}{5},-1,\frac{18}{7} \mid (-1)^{-\frac{3}{5}}A\right)$
5.5	$\left(-\frac{18}{7},-\frac{10}{7},0,\frac{7}{5} \mid (-1)^{\frac{4}{7}}A\right)$	5.5′	$\left(-\frac{10}{7},-\frac{18}{7},\frac{8}{5},\frac{7}{5} \mid (-1)^{\frac{6}{35}}A\right)$
5.6	$\left(-\frac{7}{5},0,-1,\frac{10}{7} \mid -A\right)$	5.6′	$\left(0,-\frac{7}{5},\frac{18}{7},\frac{10}{7} \mid (-1)^{-\frac{4}{7}}A\right)$
6.1	$\left(2,-\frac{17}{7},\frac{16}{13},0 \mid A\right)$	6.1′	$\left(-\frac{17}{7},2,\frac{23}{13},0 \mid -A\right)$
6.2	$\left(0,-\frac{16}{13},\frac{18}{7},\frac{17}{7} \mid (-1)^{-\frac{4}{7}}A\right)$	6.2′	$\left(-\frac{16}{13},0,-2,\frac{17}{7} \mid A\right)$
6.3	$\left(-\frac{17}{7},-\frac{18}{7},\frac{23}{13},\frac{16}{13} \mid (-1)^{\frac{73}{91}}A\right)$	6.3′	$\left(-\frac{18}{7},-\frac{17}{7},0,\frac{16}{13} \mid (-1)^{\frac{4}{7}}A\right)$
6.4	$\left(-\frac{16}{13},-\frac{23}{13},-2,\frac{18}{7} \mid (-1)^{-\frac{16}{13}}A\right)$	6.4′	$\left(-\frac{23}{13},-\frac{16}{13},\frac{17}{7},\frac{18}{7} \mid (-1)^{-\frac{73}{91}}A\right)$
6.5	$\left(-\frac{18}{7},2,0,\frac{23}{13} \mid A\right)$	6.5′	$\left(2,-\frac{18}{7},\frac{16}{13},\frac{23}{13} \mid (-1)^{\frac{16}{13}}A\right)$
6.6	$\left(-\frac{23}{13},0,\frac{17}{7},-2 \mid -A\right)$	6.6′	$\left(0,-\frac{23}{13},\frac{18}{7},-2 \mid A\right)$
7.1	$\left(-\frac{13}{3},-\frac{2}{3},\frac{27}{17},0 \mid A\right)$	7.1′	$\left(-\frac{2}{3},-\frac{13}{3},\frac{24}{17},0 \mid -A\right)$
7.2	$\left(0,-\frac{27}{17},-2,\frac{2}{3} \mid (-1)^{-\frac{1}{3}}A\right)$	7.2′	$\left(-\frac{27}{17},0,\frac{13}{3},\frac{2}{3} \mid A\right)$
7.3	$\left(-\frac{2}{3},2,\frac{24}{17},\frac{27}{17} \mid (-1)^{-\frac{47}{51}}A\right)$	7.3′	$\left(2,-\frac{2}{3},0,\frac{27}{17} \mid (-1)^{\frac{1}{3}}A\right)$
7.4	$\left(-\frac{27}{17},-\frac{24}{17},\frac{13}{3},-2 \mid (-1)^{\frac{38}{51}}A\right)$	7.4′	$\left(-\frac{24}{17},-\frac{27}{17},\frac{2}{3},-2 \mid (-1)^{-\frac{47}{51}}A\right)$
7.5	$\left(2,-\frac{13}{3},0,\frac{24}{17} \mid (-1)^{-\frac{1}{3}}A\right)$	7.5′	$\left(-\frac{13}{3},2,\frac{27}{17},\frac{24}{17} \mid (-1)^{-\frac{38}{51}}A\right)$
7.6	$\left(-\frac{24}{17},0,\frac{2}{3},\frac{13}{3} \mid -A\right)$	7.6′	$\left(0,-\frac{24}{17},-2,\frac{13}{3} \mid (-1)^{\frac{1}{3}}A\right)$

Таблица 4.

Общие решения «ключевых» уравнений

i.1	$\left(2,-\frac{5}{3},0\middle\vert A\right)$	$A=-\frac{3}{16}a^{-4}b^{\frac{8}{3}},\ x=aC_1^2T_1T_2,\ y=bC_1^3T^{\frac{3}{2}}$
i.2	$\left(1,-\frac{2}{3},\frac{7}{5}\middle\vert A\right)$	$A=-5a^{-2}b^{\frac{2}{3}}\left(\frac{a}{12b}\right)^{\frac{2}{5}}\Rightarrow x=aC_1T_1^{\frac{1}{2}}T_3$ $y=bC_1^6\left(T_1T_2\right)^3;$ $A=-5a^{-2}b^{\frac{2}{3}}\left(\frac{a}{6b}\right)^{\frac{2}{5}}\Rightarrow x=aC_1\theta^{-\frac{1}{2}}\theta_3,$ $y=bC_1^6\theta_2^3$
i.3	$\left(-\frac{5}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle\vert A\right)$	$A=-4ab,\ x=aC_1^{-1}T_1^{-1},\ y=bC_1T_1T_3^2$
i.4	$\left(-\frac{1}{2},-\frac{5}{2},\frac{17}{10}\middle\vert A\right)$	$A=20b\left(ab\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{9a}\right)^{\frac{3}{10}},\ x=aC_1^9T_1^3T_4^2,$ $y=bC_1^{-1}T_1^{-\frac{1}{3}}T_2^{\frac{2}{3}}$
i.5	$\left(-\frac{10}{7},1,\frac{8}{5}\middle\vert A\right)$	$A=\frac{5}{9}a^{\frac{10}{7}}b^{-2}\left(\frac{9b}{28a}\right)^{\frac{2}{5}}\Rightarrow x=aC_1^{14}\left(T_1T_2\right)^{\frac{7}{3}},$ $y=bC_1^9T_1^{\frac{3}{2}}T_4;$ $A=-\frac{5}{9}a^{\frac{10}{7}}b^{-2}\left(\frac{9b}{28a}\right)^{\frac{2}{5}}\Rightarrow x=aC_1^{14}\theta_2^{\frac{7}{3}},$ $y=bC_1^9\theta_1^{-\frac{1}{2}}\theta_4$
i.6	$\left(2,-\frac{17}{7},\frac{16}{13}\middle\vert A\right)$	$A=-\frac{13}{63}252^{\frac{10}{13}}a^{-\frac{36}{13}}b^{\frac{200}{91}}\Rightarrow$ $\Rightarrow x=-aC_1^{50}T_1^{\frac{5}{3}}T_2^{-\frac{1}{3}}T_4,$ $y=-bC_1^{63}T_1^{\frac{21}{10}}\left(T_4^2-9T_2^4\right)^{\frac{7}{10}};$ $A=\frac{13}{63}126^{\frac{10}{13}}a^{\frac{36}{13}}b^{\frac{200}{91}}\Rightarrow x=-aC_1^{50}\theta_2^{-\frac{1}{3}}\theta_4,$ $y=bC_1^{63}\theta_1^{-\frac{7}{10}}\left(4\theta_1^4+9\theta_2^4-12\theta_1^2\theta_2\theta_3+9\theta_2^2\theta_3^2\right)^{\frac{7}{10}}$
i.7	$\left(-\frac{13}{3},-\frac{2}{3},\frac{27}{17}\middle\vert A\right)$	$A=102\cdot 2^{\frac{3}{17}}\left(a^{50}b\right)^{\frac{4}{51}}\Rightarrow x=-aC_1^{-3}T_1^{-\frac{1}{10}}T_2^{-1}\left(T_4^2-9T_2^4\right)^{\frac{3}{10}},$ $y=bC_1^{50}T_1^5T_2^{-1}T_4^3;$ $A=-51\cdot 2^{\frac{10}{17}}\left(a^{50}b\right)^{\frac{4}{51}}\Rightarrow$ $\Rightarrow x=-aC_1^{-3}\theta_1^{-\frac{3}{10}}\theta_2^{-1}\left(4\theta_1^4+9\theta_2^4-12\theta_1^2\theta_2\theta_3+9\theta_2^2\theta_3^2\right)^{\frac{3}{10}},$ $y=-bC_1^{50}\theta_2^{-1}\theta_4^3$

Вычислив по графу группы D_6 на рис. 2 преобразования, связывающие 11 вершин i.2—i.6′ с «ключевым» уравнением i.1, получаем таблицу 5 [8], в которой представлены решения уравнений i.2—i.6′ через α, β, γ, δ из (13).

Замечание 5. Масштабированием можно убрать коэффициент $(-1)^{\lambda}$ при A в правых частях уравнений таблицы 5.

Таблица 5.

Решения уравнений i.2—i.6′ через решение «ключевого» уравнения i.1 (i = 1, …, 7)

i.1	$x = \alpha, y = \beta,$ $y'_x = \gamma, xy'_x - y = \delta$	i.1′	$x = \beta, y = \alpha,$ $y'_x = \frac{1}{\gamma}, xy'_x - y = -\frac{\delta}{\gamma}$
i.2	$x = \delta, y = \gamma,$ $y'_x = \frac{1}{\alpha},$ $xy'_x - y = -\frac{\beta}{\alpha}$	i.2′	$x = \gamma, y = \delta,$ $y'_x = \alpha, xy'_x - y = \beta$
i.3	$x = -\frac{\beta}{\alpha}, y = \frac{1}{\alpha},$ $y'_x = \frac{1}{\delta},$ $xy'_x - y = -\frac{\gamma}{\delta}$	i.3′	$x = \frac{1}{\alpha}, y = -\frac{\beta}{\alpha},$ $y'_x = \delta, xy'_x - y = \gamma$
i.4	$x = -\frac{\gamma}{\delta}, y = \frac{1}{\delta},$ $y'_x = -\frac{\alpha}{\beta},$ $xy'_x - y = \frac{1}{\beta}$	i.4′	$x = \frac{1}{\delta}, y = -\frac{\gamma}{\delta},$ $y'_x = -\frac{\beta}{\alpha}, xy'_x - y = \frac{1}{\alpha}$
i.5	$x = \frac{1}{\beta}, y = -\frac{\alpha}{\beta},$ $y'_x = -\frac{\delta}{\gamma},$ $xy'_x - y = \frac{1}{\gamma}$	i.5′	$x = -\frac{\alpha}{\beta}, y = \frac{1}{\beta},$ $y'_x = -\frac{\gamma}{\delta}, xy'_x - y = \frac{1}{\delta}$
i.6	$x = \frac{1}{\gamma}, y = -\frac{\delta}{\gamma},$ $y'_x = \beta, xy'_x - y = \alpha$	i.6′	$x = -\frac{\delta}{\gamma}, y = \frac{1}{\gamma},$ $y'_x = \frac{1}{\beta}, xy'_x - y = -\frac{\alpha}{\beta}$

Пример

Покажем на примере, как пользоваться таблицей 5 для нахождения решений уравнений i.2—i.6′ через решение «ключевого» уравнения i.1. Найдём, к примеру, общее решение уравнения 1.6:

$$y''_{xx} = Ax^{-3}y'^{\frac{5}{3}}_x\left(xy'_x - y\right)^{-2} \text{ или } \left(-3,0,\frac{5}{3},-2\middle|-A\right) \quad (15)$$

через решение уравнений 1.1:

$$y''_{xx} = Ax^2y^{-\frac{5}{3}} \text{ или } \left(2,-\frac{5}{3},0,0\middle|A\right) \quad (16)$$

По графам группы D_6 на рис. 2 и рис. 4 легко видеть, что

$$1.6 \xrightarrow{\mathbf{h}^{-1}=\mathbf{h}^5} 1.1,$$

где $$\mathbf{h}^5 : \quad x = \frac{1}{\gamma}, y = -\frac{\delta}{\gamma}, y'_x = \beta, xy'_x - y = \alpha \quad (17)$$

Преобразование $\mathbf{h}^5$ указано в последней строке таблицы 5. Буквами α, β, γ, δ обозначим общее решение исходного уравнения 1.1 (9):

$$x = aC_1^2T_1T_2 = \alpha, y = bC_1^3T_1^{\frac{3}{2}} = \beta,$$

$$y'_x = \frac{3bC_1T_1^{\frac{1}{2}}\dot{T}_1}{2a\left(\dot{T}_1T_2 + T_1\dot{T}_2\right)} = \gamma,$$

$$xy'_x - y = \frac{bC_1^3T_1^{\frac{3}{2}}\left(\dot{T}_1T_2 - 2T_1\dot{T}_2\right)}{2\left(\dot{T}_1T_2 + T_1\dot{T}_2\right)} = \delta,$$

$$A = -\frac{3}{16}a^{-4}b^{\frac{8}{3}}, \quad (18)$$

$$T_1 = ch\left(\tau + C_2\right)\cos\tau, T_2 = th\left(\tau + C_2\right) + \mathrm{tg}\,\tau$$

Тогда композиция (17) и (18) является общим решением уравнения 1.6 (14):

$$x = \frac{2a\left(\dot{T}_1T_2 + T_1\dot{T}\right)}{3bC_1T_1^{\frac{1}{2}}\dot{T}_1}, y = -\frac{C_1T_1\left(\dot{T}_1T_2 - 2T_1\dot{T}\right)}{3\dot{T}_1}$$

(T_1 и T_2 указаны в (18)).

Замечание 6. Совокупность уравнений-вершин графа на рис. 4 названа орбитой тангенсов, так как «родитель» всех этих уравнений имеет решение (18) через тригонометрические и гиперболические функции тангенса и косинуса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин — М.: Наука, 1993. — 464 с.
2. Polyanin A.D. Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems / A.D. Polyanin, V.F. Zaitsev. — CRC Press. Boca Raton — London, 2018. — 1496 p. DOI: 10.1201/9781315117638
3. Хакимова З.Н. Классификация новых разрешимых случаев в классе полиномиальных дифференциальных уравнений / З.Н. Хакимова, О.В. Зайцев // Актуальные вопросы современной науки, №3. — СПб., 2014. — С. 3–11.
4. Хакимова З.Н. Выбор класса дифференциальных уравнений для нахождения новых разрешимых случаев / З.Н. Хакимова // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения — 2017». — СПб.: РГПУ, 2017. — С. 112–117.
5. Зайцев В.Ф. Об одном применении метода вложения / В.Ф. Зайцев, О.В. Зайцев // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения — 2015». — СПб.: РГПУ, 2014. — С. 30–33.
6. Хакимова З.Н. Расширения дискретных групп преобразований обобщенного уравнения Эмдена-Фаулера / З.Н. Хакимова // Перспективы науки. — Тамбов: ТМБпринт. — 2022. — № 3 (150). — С. 55–59.
7. Хакимова З.Н. Решения степенных дифференциальных уравнений в тригонометрических функциях / З.Н. Хакимова // Перспективы науки. — Тамбов: ТМБпринт. — 2022. — № 6 (153). — С. 44–48.
8. Хакимова З.Н. Дробно-полиномиальные дифференциальные уравнения: дискретные группы и решения через трансцендент 1-го уравнения Пенлеве [Электронный ресурс] / З.Н. Хакимова, О.В. Зайцев // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2021. — N 1(4). — С. 61–92. — URL: https://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2021.1/article.1.4 (дата обращения: 20.05.2021)

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»