НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИОНАЛА В ЗАДАЧАХ КОМПРЕССИИ ЦИФРОВЫХ ВИДЕОИЗОБРАЖЕНИЙ, РЕШАЕМЫХ МЕТОДАМИ КЛАССИЧЕСКОГО ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Калистратов Дмитрий Сергеевич
К.т.н., Тульский государственный университет
kalistratow@list.ru

Аннотация. рассматривается компрессия цифровых видеоизображений, приводится пример дополнительного сжатия высокочастотного компонента вейвлет — преобразования Хаара на основе решения задачи вариационного исчисления с регулированием приоритетов компрессии по принципу объём кода — качество декодируемого изображения, даётся конструкция целевого функционала, разбирается пример решения вариационной задачи по методу неопределённых множителей Лагранжа, подробно анализируются необходимые и достаточные условия экстремума функционала.

Ключевые слова: цифровое видеоизображение, компрессия, объём кода, качество изображения, приоритеты, функционал, экстремальное решение, необходимые и достаточные условия экстремума, уравнения Эйлера, матрица Гёссе.

NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITION OF THE FUNCTIONAL EXTREMUM IN THE TASKS OF DIGITAL VIDEO IMAGE COMPRESSION, SOLVED BY METHODS OF CLASSICAL VARIATION CALCULATION

D. Kalistratov

Summary. the compression of digital video images is considered, an example of additional compression of the high-frequency component of the wavelet — Haar transform, based on the solution of the variational calculus with compression priority adjustment on the principle of code volume — image quality is discussed, the construction of the target functional is given, an example of solving a variational task by Lagrange method of indefinite factors is presented, the necessary and sufficient conditions for its extremum are analyzed in detail.

Keywords: digital video image, compression, amount of code, image quality, priorities, functionality, extreme solution, necessary and sufficient conditions for an extremum, Euler equations, Hesse matrix.

Введение

Известно [1–3], что одними из ключевых параметров современных видеокодеков являются коэффициент компрессии и качество изображения на стороне декодирования. Указанные параметры эффективности обычно противоречат друг другу, то есть при увеличении степени сжатия ухудшается качество декодируемого изображения, а для сохранения качества изображения приходится мириться с низким коэффициентом компрессии.

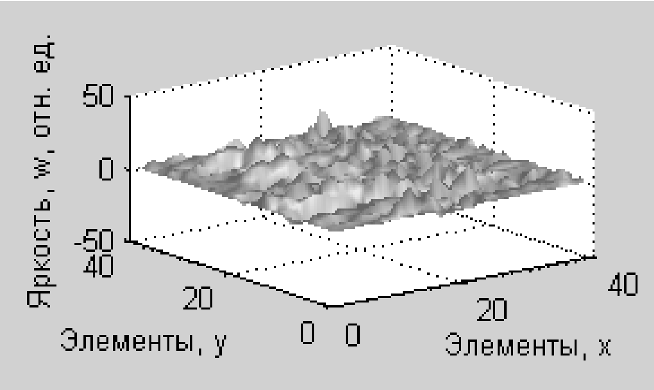
Между тем существует ряд задач, в которых необходимо не просто сделать выбор в пользу одного из этих критериев, а иметь возможность динамического перераспределения приоритетов между ними. Такая постановка задачи позволяет рассматривать процесс компрессии изображений как задачу классического вариационного исчисления [4,5].

В данной работе изложен один из вариантов подобного технического решения. Как будет показано далее, важным в вариационных математических моделях является не только правильное составление функционала, но и проверка его экстремума. По этой причине наиболее пристальное внимание в работе уделено необходимым и достаточным условиям экстремума функционала.

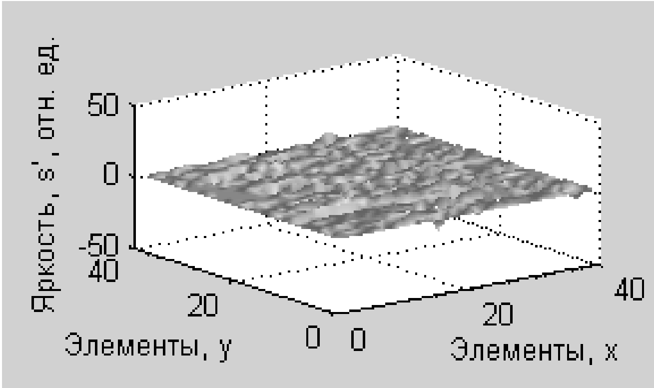
Постановка вариационной задачи

За основу взято вейвлет — преобразование Хаара, которое хорошо зарекомендовало себя для изображений с плавными «переходами» яркости, но «испытывает трудности» при обработке изображений с высокочастотным спектром [2]. Суть состоит в том, чтобы методами вариационного исчисления обеспечить дополнительное сжатие низкочастотному компоненту H этого преобразования (то есть компоненту полуразностей).

В предлагаемом методе построчно сглаживаются резкие всплески H (рисунок 1). Декодеру передаются значения не самого H, а значения его первых производных (после сглаживания).



а)



б)

Рис. 1. Фрагмент высокочастотного компонента H вейвлет — преобразования Хаара для синей цветовой матрицы (квадратный сектор 40×40 элементов): а) — исходный; б) — сглаженный

Для достижения указанной цели к высокочастотному компоненту вейвлет — преобразования построчно подмешивается ещё один искусственный низкочастотный сигнал. На стороне кодирования данный сигнал сглаживает H и минимизирует его первую производную (что благоприятно влияет на коэффициент компрессии), но затем отфильтровывается на стороне декодирования фильтром высоких частот (что сохраняет качество изображения).

С математической точки зрения задачу компрессии отражает функционал J, содержащий целевую функцию с двумя приоритетными слагаемыми и одно ограничение связи при множителе Лагранжа (скобка при λ), то есть (см. формулу (1).

где: $J(x, q, q', f, f')$ — функционал; x — аргумент (в дискретном случае ассоциируется с индексом элемента преобразования); b — верхняя граница области интегрирования (в дискретном виде ассоциируются с концом текущей строки элементов преобразования); $w(x)$ — входная функция; $q(x)$ — добавочная функция; $f(x)$ — функция выхода фильтра декодера; c_1, c_2 — весовые коэффициенты; $\lambda(x)$ — функция-множитель Лагранжа; a — параметр фильтра (связан по смыслу с постоянной RC); k — коэффициент усиления фильтра на выходе (используется также как дополнительный коэффициент квантования).

Первое слагаемое функционала характеризует цель повышения степени гладкости производной суммарной функции (требование объёма кодов). Второе слагаемое характеризует цель сохранения незначительного различия входного кодируемого и выходного декодируемого сигналов (требование качества изображения). Приоритеты между указанными целями регулируются весовыми коэффициентами c_1, c_2. Для определённости положим:

$$c_1 + c_2 = 1. \qquad (2)$$

Чем выше значение c_1, тем более гладкой становится суммарная функция $s=w+q$, тем меньшая разрядная сетка требуется для хранения значений её первой производной и тем больше проявляется эффект уплотнения кода. Выбор в пользу повышения значения c_2, напротив, сохраняет качество изображения, но обеспечивает низкий коэффициент компрессии.

$$\begin{gathered}
J\left(x,q,q',f,f'\right)=\int_0^b\left(c_1\left(\left(w+q\right)'\right)^2+c_2\left(w-f\right)^2+\lambda\left(a\left(k\left(w+q\right)-f\right)'-f\right)\right)dx,\\
J\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{N},\ x\in[0,\,b], \qquad (1)\\
w(x),q(x),f(x)\in\mathbb{R},\quad \lambda(x)\in\mathbb{R},\quad a,k\in\mathbb{R},\\
c_1\in\mathbb{R}_+,\ c_2\in\mathbb{R}_+,
\end{gathered}$$

Ограничение связи, при функции — множителе Лагранжа λ, представляет собой фильтр высоких частот на основе RC — цепи, в которой выходной сигнал фильтра снимается с резистора. Через параметр a задаётся частота среза фильтра.

Необходимые условия экстремума

Следующим этапом решения вариационной задачи является обеспечение экстремума функционала. Необходимые условия экстремума формируются из условия равенству нулю первой вариации функционала (аналог первого дифференциала в функциональном анализе). Отметим, что в литературных источниках очень подробно освещаются подходы и алгоритмы действий для проверки данного условия [4,5].

К примеру, в методе неопределённых множителей Лагранжа [4] система уравнений для нахождения экстремалей функционала применительно к рассматриваемому случаю содержит два уравнения Эйлера и одно ограничение связи (см. формулу (3)

Данную систему на программном уровне удаётся решить в дискретном виде приближёнными методами с заменой производных разностными отношениями. Однако, условие равенства нулю первой вариации функционала является необходимым, но ещё не достаточным. Поэтому решение следует дополнить проверкой достаточного условия экстремума.

Достаточные условия экстремума

Здесь дело обстоит гораздо сложнее, хотя также имеются несколько известных способов прверки. Например, достаточное условие экстремума в терминах вариаций [5] гласит о том, что для обеспечения минимума функционала необходимо, чтобы вторая вариация функционала (аналог второго дифференциала в функциональном анализе) была положительной. При использовании матрицы Гёссе, это условие в данном случае можно записать так: см. формулу (4).

где: $\delta^2 J(x, \mathbf{y}, \delta\mathbf{y})$ — вторая вариация функционала; **y —** вектор функций-аргументов функционала; δ**y** — вектор первых вариаций функций-аргументов функционала; ***G*** — матрица Гёссе; δ — обозначение вариации.

Рассмотрим сначала более простой случай с нерасширенным функционалом, то есть когда он содержит только целевую функцию, но не содержит слагаемое, учитывающее ограничения связи (слагаемое с λ). Тогда, в терминах вариаций получаем следующее достаточное условие минимума функционала в общем виде (см. формулу (5).

То есть, вторая вариация функционала должна быть положительной при любых допустимых приращениях вариаций аргументов. Вычисляя частные производные и раскрывая последнюю формулу для второй вариации нерасширенного функционала, приходим к следующей записи: см. формулу (6)

$$\begin{cases} 2c_1 w'' + 2c_1 q'' + a\lambda' = 0, \\ -a\lambda' + 2c_2 w - 2c_2 f + \lambda = 0, \\ akw' + akq' - af' - f = 0. \end{cases} \tag{3}$$

$$\delta^2 J\left(x, \mathbf{y}, \delta\mathbf{y}\right) = \int_0^b \delta\mathbf{y}\mathbf{G}\left(\delta\mathbf{y}\right)^\tau \, dx > 0, \tag{4}$$

$$\delta^2 J\left(x, \mathbf{y}, \delta\mathbf{y}\right) = \int_0^b \left(\delta q' \;\; \delta f\right) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 J}{\partial q'^2} & \dfrac{\partial^2 J}{\partial q' \partial f} \\ \dfrac{\partial^2 J}{\partial f \partial q'} & \dfrac{\partial^2 J}{\partial f^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta q' \\ \delta f \end{pmatrix} dx > 0. \tag{5}$$

Поскольку весовые коэффициенты и квадраты функциональных вариаций положительны в каждой точке по x, заключаем, что экстремум будет минимумом.

Достаточность экстремума можно установить также по квадратичной форме второй вариации. Для минимума она должна быть положительно определена в каждой точке по x, то есть все главные угловые миноры в каждой точке по x должны быть положительны. В данном случае матрица квадратичной формы одинакова во всех области определения по x (см. формулу (7), где: **A** — матрица квадратичной формы для второй вариации функционала в точке. Видим, что квадратичная форма определена положительно, следовательно, экстремум функционала является минимумом.

Теперь рассмотрим более сложный случай, когда ограничение входит в конструкцию функционала. Все функции, зависящие от x, с точки зрения функционала будем пока считать «равноправными». Таким образом, к исходным аргументам $q'(x)$, $f(x)$ добавляется ещё пара аргументов $q'(x)$, $f(x)$ и функционал зависит уже от четырёх параметров. Следовательно, положив пока все функции-аргументы равноправными, для второй вари-

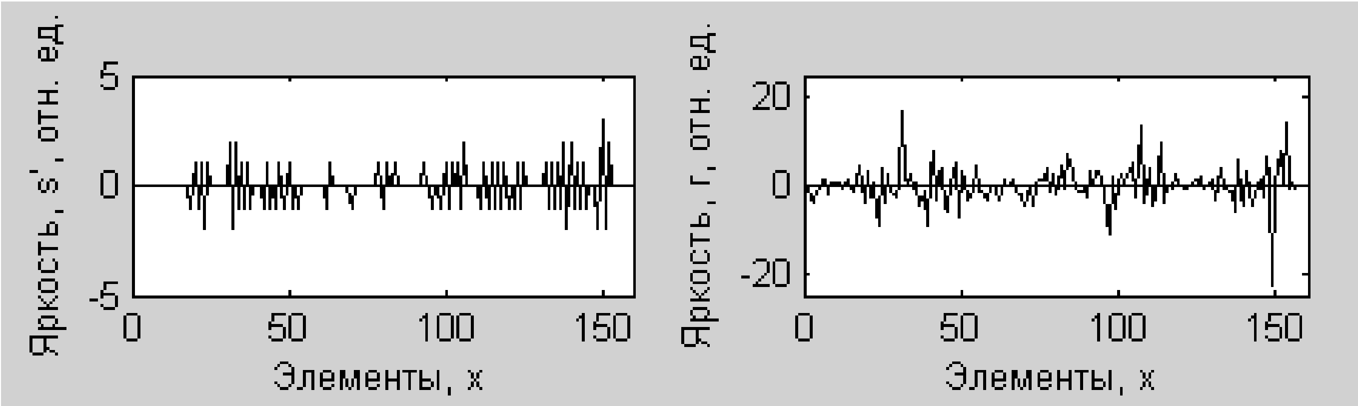
$$\delta^2 J\left(x, q', f, \delta q', \delta f\right) = \int \left(2c_1 \delta^2 q' + 2c_2 \delta^2 f\right) dx, \tag{6}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2\tilde{n}_1 & 0 \\ 0 & 2c_2 \end{pmatrix}, \quad x \in \left[0, b\right], \tag{7}$$

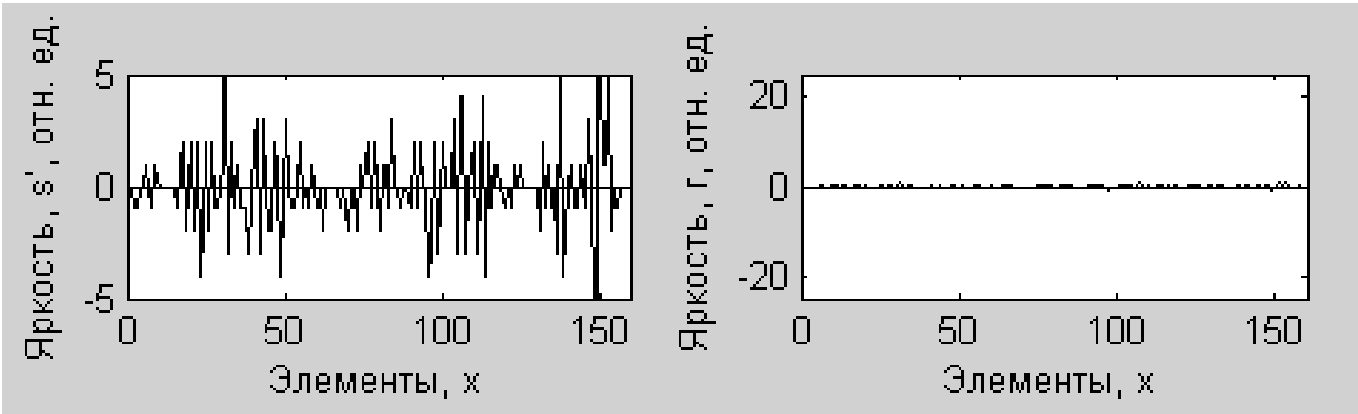
$$\delta^2 J\left(x, \mathbf{y}, \delta \mathbf{y}\right) = \int_0^b \left(\delta q' \;\; \delta f \;\; \delta f' \;\; \delta\lambda\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial q'^2} & \frac{\partial^2 J}{\partial q' \partial f} & \frac{\partial^2 J}{\partial q' \partial f'} & \frac{\partial^2 J}{\partial q' \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial f \partial q'} & \frac{\partial^2 J}{\partial f^2} & \frac{\partial^2 J}{\partial f \partial f'} & \frac{\partial^2 J}{\partial f \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial f' \partial q'} & \frac{\partial^2 J}{\partial f' \partial f} & \frac{\partial^2 J}{\partial f'^2} & \frac{\partial^2 J}{\partial f' \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial \lambda \partial q'} & \frac{\partial^2 J}{\partial \lambda \partial f} & \frac{\partial^2 J}{\partial \lambda \partial f'} & \frac{\partial^2 J}{\partial \lambda^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta q' \\ \delta f \\ \delta f' \\ \delta \lambda \end{pmatrix} dx > 0. \tag{8}$$

$$\begin{gathered} \delta^2 J(x, q', f, f', \lambda, \delta q', \delta f, \delta f', \delta\lambda) = \\ = \int_0^b \left(2c_1 \delta^2 q' + ak\delta q' \delta\lambda + 2c_2 \delta^2 f - \delta f \delta\lambda - a\delta f' \delta\lambda + ak\delta\lambda\delta q' - \delta\lambda\delta f - a\delta\lambda\delta f'\right) dx > 0. \end{gathered} \tag{9}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2\tilde{n}_1 & 0 & 0 & ak \\ 0 & 2c_2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ ak & -1 & -a & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \left[0, b\right]. \tag{10}$$



а)



б)

Рис. 2. Передаваемая сглаженная производная s′ и расхождение кодируемой и декодируемой строки r при разных сочетаниях весовых коэффициентов: а) — при c1=0.9 и c2=0.1; б) — при c1=0.1 и c2=0.9

ации в случае минимума получаем следующее условие: см. формулу 8.

После нахождения частных производных по функциям-аргументам и векторно-матричного перемножения в терминах вариаций приходим к следующему условию: см. формулу (9).

Анализировать последнее выражение при всех возможных сочетаниях вариаций-приращений сложно, поэтому найдём определитель квадратичной формы второй вариации: см формулу (10).

Так как уже третий угловой минор равен нулю, то по критерию определённости квадратичной формы получается, что в этом случае мы не можем гарантировать ни минимум, ни максимум. Однако, результаты моделирования свидетельствуют о том (рисунок 2), что экстремумом рассматриваемого расширенного функционала по прежнему остаётся минимум (то есть, при большом c_1 стремится к нулю первая скобка целевой функции, а при большом c_2 вторая скобка).

Дело в том, что в последнем случае мы рассматривали расширенный функционал, намеренно не принимая во внимание наличия условия, наложенного дополнительно, а все функции положили равноправными и независимыми между собой.

Между тем, очевидно, что в случае соблюдения ограничения связи скобка при множителе Лагранжа при любом x всегда будет равна нулю (это обеспечивается системой уравнений Эйлера, полученной при соблюдении необходимых условий экстремума). То есть, получается, что при соблюдении ограничения связи его вклад в общей конструкции расширенного функционала равен нулю, а кроме того, равен нулю и вклад указанного слагаемого при вычислении второй вариации.

Полученное противоречие определённости квадратичных форм свидетельствует о том, что все переменные в случае вариационной задачи на условный экстремум (включая множитель Лагранжа), принимать как равноправные и независимые нельзя (между ними, или их частью существует связь, которую нельзя не учитывать при вычислении второй вариации функционала).

Иными словами, в случае с первой вариацией и необходимым условием экстремума слагаемое при множителе Лагранжа необходимо было учитывать, чтобы вовлечь в решение введённое ограничение как таковое, а в случае со второй вариацией и достаточным условием слагаемым с ограничением следует пренебречь и вычислять вторую вариацию нерасширенного функционала (содержащего только целевую функцию). Подчеркнём, что указанный случай достаточного условия для условного экстремума в литературных источниках отдельно не оговаривается.

Заключение

В целом можно заключить, что процесс компрессии цифровых изображений можно рассматривать как задачу вариационного исчисления, поскольку приоритеты между основными противоречащими друг другу критериями качества видеокодека (объём кода и качество декодируемого изображения) можно регулировать путём перезадания значений весовых коэффициентов целевой функции.

При этом очевидно, что в процессе поиска экстремального решения необходимо учитывать и анализировать не только необходимые, но и достаточные условия экстремума функционала. Необходимые условия связаны с понятием первой вариации функционала, достаточные условия связаны с его второй вариацией (по сути, первая и вторая вариации функционала в задачах вариационного исчисления являются аналогами дифференциалов в задачах функционального анализа). Кроме того, следует разграничивать условный и безусловный экстремум. В последнем случае вариационная задача усложнятся.

С точки зрения практического применения, видеокодек, построенный по принципу регулирования объём кода — качество декодируемого изображения, будет полезен при создании технических систем, в которых необходимо обеспечить такое регулирование, в том числе в режиме реального времени. Примером здесь является перспективная система статистического анализа автотранспортных потоков мегаполисов с целью поиска решения проблемы транспортных заторов [6–8], а также система видеомониторинга пожарной обстановки лесных массивов с целью сохранения целостности природных ресурсов [9,10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Блаттер К. Вейвлет — анализ. Основы теории. / К. Блаттер. — М.: Техносфера, 2004. — 280с.
2. Калистратов Д. С., Минаков Е. И., Бархоткин В. А., Видеокодирование. Оптимизация методов компрессии статических видеоизображений: монография / Д. С. Калистратов, Е. И. Минаков, В. А. Бархоткин, — Тула: Издательство ТулГУ, 2016. — 104 с.
3. Калистратов Д. С. Минаков Е. И., Способ кодирования — декодирования цифровых видеоизображений // Патент России на изобретение № 2616176. 2017. Бюл. № 11–2017.
4. Ванько В. И., Ермошина О. В., Кувыркин Г. Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление: Учеб. для вузов / В. И. Ванько, О. В. Ермошина, Г. Н. Кувыркин. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. — 488 с.
5. Мышкис Д. А. Математика для втузов. Специальные курсы / Д. А. Мышкис. — М.: Наука, 1971. — 632 с.
6. Минаков Е. И., Калистратов Д. С. Метод геометрической стабилизации квазистационарных аэровидеоизображений в информационно-измерительных системах видеомониторинга / Е. И. Минаков, Д. С. Калистратов // Вестник компьютерных и информационных технологий, — 2016. — № 4 — С. 46–49.
7. Бархоткин В. А., Минаков Е. И., Калистратов Д. С. Модель электронно-измерительной системы видеомониторинга состояния транспортных потоков на основе компрессии и передачи панорамных аэровидеоизображений / В. А. Бархоткин, Е. И. Минаков, Д. С. Калистратов // жур. Наноиндустрия, Микроэлектроника — 2016. 2-я научная конференция: Сборник докладов. — М.: АО РИЦ «ТЕХНОСФЕРА», 2016. — № S (74). — С. 189–193.
8. Минаков Е. И., Калистратов Д. С., Киселев А. П. Особенности статистической обработки и компрессии аэровидеоизображений в электронно-измерительных системах мониторинга состояния транспортных потоков / Е. И. Минаков, Д. С. Калистратов, А. П. Киселев // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия «Естественные и технические науки», — 2018. — № 11. — С. 84–87.
9. Минаков Е. И., Калистратов Д. С., Мирчук С. Г. Модель информационно-измерительной системы видеомониторинга лесных пожаров. / Е. И. Минаков, Д. С. Калистратов, С. Г. Мирчук // Известия ТулГУ. Технические науки. Вып. 11. Ч. 2. Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. С. 194–200.
10. Минаков Е. И., Калистратов Д. С., Мирчук С. Г. Метод идентификации проекций очагов возгорания лесных массивов по цифровым видеоизображениям / Е. И. Минаков, Д. С. Калистратов, С. Г. Мирчук // Цифровая обработка сигналов, — 2017. — № 4. — С. 30–33.

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»