

# СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕУСТОЙЧИВЫХ МОД СВОБОДНОГО ВИХРЯ

**Ахметов Вадим Каюмович**

Д.т.н., профессор, ФГБОУ ВО «Национальный  
исследовательский Московский государственный  
строительный университет»  
vadim.akhmetov@gmail.com

## SPECTRAL CHARACTERISTICS OF UNSTABLE MODES OF A FREE VORTEX

**V. Akhmetov**

*Summary.* Swirling flow with a velocity profile of the Batchelor vortex type has been studied on the basis of the linear hydrodynamic stability theory. An effective numerical method for solving the spectral problem has been developed. This method includes the asymptotic solutions at artificial and irregular singular points. For fixed values of the Reynolds numbers, the curves of neutral stability are plotted. Branching points of unstable modes are found.

*Keywords:* swirling flow, hydrodynamic stability, spectral problem, neutral curves, singular points.

*Аннотация.* На основе линейной теории гидродинамической устойчивости исследовано закрученное течение с профилем скорости типа вихря Бэтчелора. Разработан эффективный численный метод решения спектральной задачи. Этот метод включает асимптотические решения в регулярных и нерегулярных особых точках. Для фиксированных значений чисел Рейнольдса построены кривые нейтральной устойчивости. Найдены точки ветвления неустойчивых мод.

*Ключевые слова:* закрученный поток, гидродинамическая устойчивость, спектральная задача, нейтральные кривые, особые точки.

**И**сследования гидродинамической устойчивости закрученных течений имеют чрезвычайно важное значение. Потеря устойчивости потока часто приводит к нарушению расчетного режима работы за счет усиления вибрационных воздействий и, в конечном итоге, к повреждению технических устройств.

Существует несколько общих критериев оценки устойчивости закрученных течений. Для течения типа свободного вихря они были сформулированы в [1, 2]. Эти критерии носят достаточный характер и не позволяют точно определить параметры устойчивости течения. Основным инструментом исследования гидродинамической устойчивости вихревых течений является численное моделирование на основе метода возмущений.

В последние годы большое внимание уделяется изучению вихря Бэтчелора (часто называемого Q-вихрем) [3–8]. Выборочный анализ абсолютной неустойчивости Q-вихря с учетом вязкости методом прямого численного моделирования проведен в [9].

В данной работе разработан эффективный численный метод, учитывающий поведение решений в особых точках, который используется для решения многопараметрической спектральной задачи. Целью работы является исследование взаимодействия неустойчивых мод.

### 1. Постановка задачи и метод решения

Профили осевой  $V_z$  и азимутальной  $V_\varphi$  составляющих скорости свободных закрученных течений и внутренних течений в каналах (за исключением пристеночной области) в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  достаточно хорошо описываются следующими выражениями [10]:

$$\begin{aligned} V_z &= W_1 + W_2 \exp(-br^2), \\ V_\varphi &= \frac{K}{r} [1 - W_2 \exp(-br^2)], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $W_1, W_2, K, b$  — эмпирические определяемые константы,  $r$  — безразмерное расстояние от оси. Элементар-

Таблица 1. Критические значения неустойчивых мод.

Мода	Re <sub>c</sub> <sup>m</sup>	α <sub>c</sub> <sup>m</sup>	q <sub>c</sub> <sup>m</sup>
1	13.905	0.415	0.337
2	43.934	0.5012	0.6603
3	165.56	0.5962	0.4576
4	428.086	0.5062	0.6095
5	887.79	0.5547	0.6403
7	1579.73	0.6054	0.700
8	3526.77	0.5679	0.6131

ными преобразованиями профили (1) могут быть сведены к виду

$$U = \exp(-r^2), \quad W = \frac{q}{r}(1 - \exp(-r^2)). \quad (2)$$

Профили (2) выводятся из автомодельного решения уравнений Навье–Стокса для вязкого закрученного следа в предположении плоскопараллельности течения [11].

Рассмотрим малые возмущения течения (2) как решения линеаризованных уравнений Навье–Стокса типа периодической бегущей волны (нормальные моды):

$$\{V'_z, V'_r, V'_\phi, p'\} = \{F, iS, H, P\} \exp[i(\alpha z + n\phi - \alpha ct)], \quad (3)$$

где  $p$  — давление. Комплексные функции  $F(r), S(r), H(r), P(r)$  задают амплитуду волны длиной  $\lambda$  с волновым числом  $\alpha = 2\pi/\lambda$ , модой возмущения  $n$  ( $n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$ ) и скоростью распространения  $c$ . Для амплитудных функций после подстановки возмущений (3) в систему уравнений Навье–Стокса и ее линеаризации получается система обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка:

$$r^2\gamma F + \alpha r^2 P + r^2 S U' = \frac{1}{i \text{Re}} [r(rF)' - (\alpha^2 r^2 + n^2 F)], \quad (4)$$

$$r^2\gamma S + 2rHW - r^2 P' = \frac{1}{i \text{Re}} [r(rG)' - (\alpha^2 r^2 + n^2 + 1)S - 2nH], \quad (5)$$

$$r^2\gamma H + r^2 S \left( W' + \frac{W}{r} \right) + rnP = \frac{1}{i \text{Re}} [r(rH)' - (\alpha^2 r^2 + n^2 + 1)H - 2nS], \quad (6)$$

$$\alpha rF + (rS)' + nH = 0, \quad (7)$$

где  $\gamma = \alpha(U - c) + nW/r$ . Граничные условия для системы (4)-(7) записываются в виде:

$$S(0) = H(0) = 0, \quad ,$$

$$F(0), P(0) \text{ — ограничены при } n = 0 \quad (8)$$

$$S(0) \pm H(0) = 0,$$

$$F(0) = P(0) = 0 \text{ — при } n = \pm 1, \quad (9)$$

$$S(0) = H(0) = F(0) = P(0) = 0 \text{ — при } |n| > 1, \quad (10)$$

$$S(\infty) = H(\infty) = F(\infty) = P(\infty) = 0. \quad (11)$$

Рассмотрим временную устойчивость течения (2), полагая волновое число  $\alpha$  действительным, а скорость распространения возмущений  $c = c_r + ic_i$  комплексным. Тогда, при  $c_i < 0$  возмущения будут затухать и течение можно считать устойчивым, а при  $c_i > 0$  возмущения будут нарастать и течение становится неустойчивым.

Метод расчета собственных значений включает несколько этапов. Вблизи особых точек  $r = 0$  и  $r = \infty$  строятся асимптотические решения по методу Фробениуса [12], которые позволяют перенести граничные условия в точки  $r = r_a$  и  $r = r_d$  соответственно. Интегрирование

проводится от  $r_a$  и  $r_d$  внутрь расчетной области к точке  $r_c$  ( $r_a < r_c < r_d$ ), в которой решения склеиваются в соответствии с условием

$$\sum_{j=1}^3 a_j y_{i,j} = \sum_{j=1}^3 a_{j+3} y_{i,j+3} \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (12)$$

где  $y_{i,j}$  решения, полученные в ходе интегрирования от  $r_d$  к  $r_c$ , а  $y_{i,j+3}$  — при интегрировании от  $r_a$  к  $r_c$ ,  $a_j$  — произвольные постоянные. Равенство нулю определителя линейной однородной системы (12) достигается подбором  $c_r, c_i$  по методу Ньютона.

Система уравнений (4)-(7) для численного интегрирования записывалась в виде шести дифференциальных уравнений первого порядка. Решение определялось методом Кутты-Мерсона с автоматическим выбором шага интегрирования с применением ортогонализационной процедуры Грамма-Шмидта.

Таблица 2. Сравнение с результатами невязкой теории.

Мода	Re=10 <sup>5</sup>			Re=∞ [6]		
	q*	α*	ω <sub>i</sub> *	q*	α*	ω <sub>i</sub> *
1	0.4581	0.8117	0.2424	0.46	0.81	0.2424
3	0.7534	0.5518	0.1112	0.75	0.55	0.1116
4	0.7972	0.5402	0.0797	0.8	0.54	0.08046
5	0.8091	0.5263	0.0609	0.82	0.53	0.06222
6	0.8098	0.5146	0.0483	0.83	0.53	0.05030

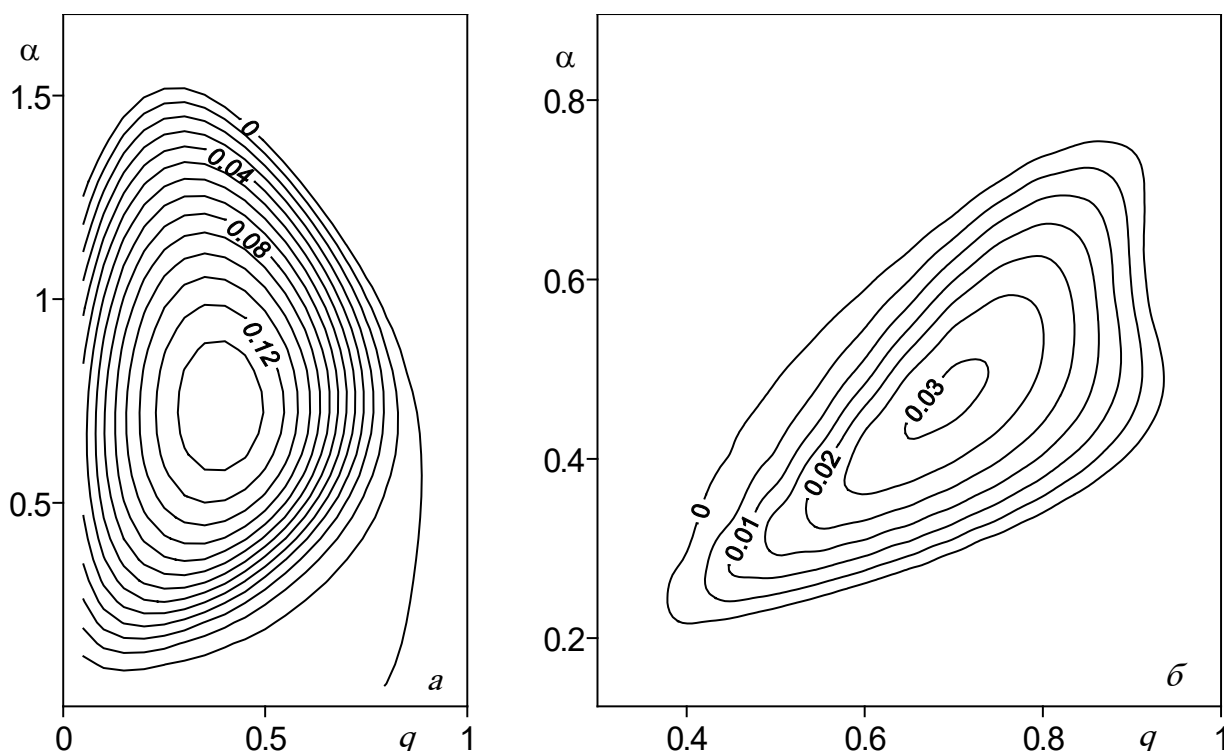


Рис. 1. Топография неустойчивости при Re = 60, а — мода 1, б — мода 2

## 2. Результаты вычислений

Рассмотрим краевую задачу (4)-(7), (8)-(11), в которой имеется три определяющих параметра  $Re$ ,  $q$ ,  $\alpha$ . Исследуем устойчивость течения (2) при значении волнового числа  $n = -1$ , так как согласно [4, 5] данный тип возмущений наиболее опасен.

Собственное число рассматриваемой спектральной задачи  $c = c_r + ic_i$  при  $c_i > 0$ , определяет моду временной неустойчивости. В данном исследовании показывается существование нескольких неустойчивых мод, которые могут одновременно наблюдаться в потоке. Каждая мода с номером  $m$  характеризуется совокупностью параметров, определяющих критические значения числа Рейнольдса  $Re_c^m$ , закрутки  $q_c^m$  и волнового числа  $\alpha_c^m$

, при которых возникает неустойчивость. Этому набору соответствует собственное число  $c_{rm}$ ,  $c_{im} \approx 0$ , от которого численно можно построить параметрическое продолжение по  $Re$ ,  $q$  или  $\alpha$ . В табл. 1 представлены вычисленные значения величин  $Re_c^m$ ,  $\alpha_c^m$ ,  $q_c^m$  в критических точках для восьми обнаруженных мод неустойчивости.

Исследуемые моды имеют разный характер. Моды (1, 3-8) являются невязками. Для них при  $Re \rightarrow \infty$  максимальный коэффициент усиления стремится к некоторому предельному положительному значению  $\omega_i = \alpha c_i \rightarrow \text{const} \neq 0$ . Максимальные коэффициенты усиления  $\omega_i^*$  для невязки мод 1, 3-6 и соответствующие им критические значения волнового числа  $\alpha_*$  и закрутки  $q_*$ , вычисленные при  $Re = 10^5$ , представлены в табл. 2.

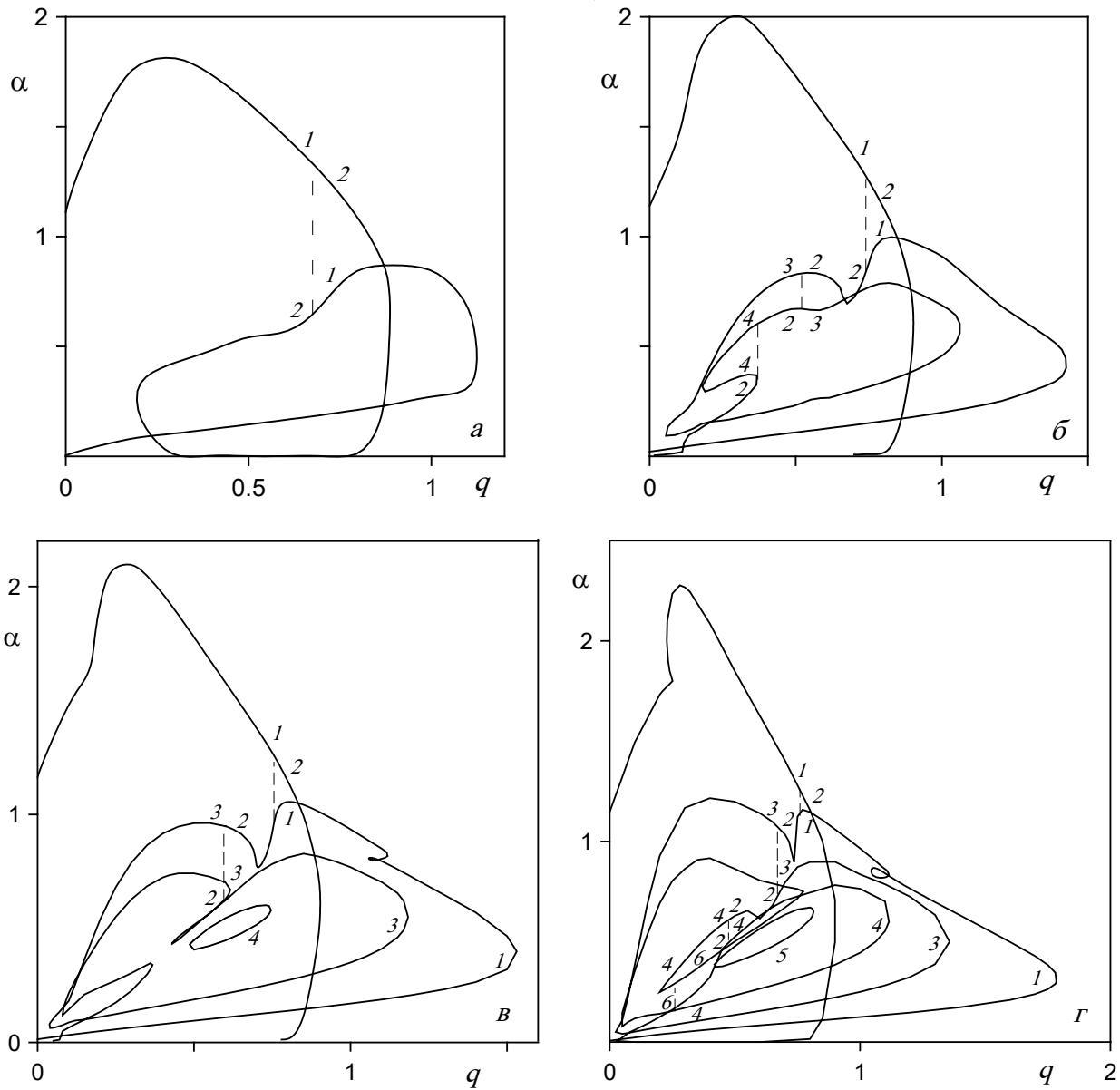


Рис. 2. Нейтральные кривые:  $Re = 140; 300; 450; 1000$  (а—г); моды 1—5

Мода (2) является вязкой: для нее  $\omega_i \rightarrow 0$  при  $Re \rightarrow \infty$ . Впервые она была обнаружена в [13] и более подробно исследована в [14]. Две другие вязкие моды неустойчивости для течения (2) были найдены в [5, 6]. Одна из них наблюдалась для осесимметричных возмущений ( $n = 0$ ), другая (более неустойчивая) для неосесимметричных возмущений с положительным азимутальным волновым числом ( $n = 1$ ).

Обратимся к исследованию собственных решений рассматриваемой задачи в плоскости свободных параметров  $(\alpha, q)$  при  $Re = const$ . Отметим в связи с этим одно важное свойство собственных решений: в пространстве  $Re, q, \alpha$  существуют точки, в которых

задача на собственные значения имеет кратный корень  $c^{(k)} = c^{(m)}$ . Это означает, что решения для двух мод в такой точке совпадают, а в малой окрестности происходит ветвление этих мод. При этом ветвиться могут разные пары  $(k, m)$  из набора неустойчивых мод, существующих при выбранном значении  $Re$ .

Области устойчивости и неустойчивости исходного потока (2) к возмущениям (3) разделяются в плоскости  $(\alpha, q)$  нейтральной кривой — линией, на которой выполняется условие  $\omega_i = 0$ . Для каждой моды неустойчивости можно построить соответствующую нейтральную кривую. Нейтральная кривая моды  $m$  описывается отдельным замкнутым контуром только при значениях

$Re > Re_c'''$ , близких к критическому для данной моды, например, моды 1, 2 при  $Re = 60$ . Для этого случая на рис. 1 представлены линии постоянных значений коэффициента усиления  $\omega_i = \alpha c_i = \text{const}$  в плоскости  $(\alpha, q)$  для мод 1, 2. Внешний контур соответствует нейтральной кривой, на которой  $\omega_i = 0$ . Внутри него течение неустойчиво, а вне его — устойчиво. По мере продвижения по  $Re$  от критической точки возникают ее бифуркации со вновь возникающими модами. При этом форма области неустойчивости качественно меняется: происходит скачкообразное изменение границ отдельных областей неустойчивости, а нейтральные кривые объединяются в единую кривую сложной формы с точками самопересечения.

С увеличением числа Рейнольдса области неустойчивости двух мод пересекаются, а нейтральные кривые объединяются в одну кривую, часть которой соответствует первой моде, а часть — второй. Характерная картина такой области неустойчивости при  $Re = 140$  с точкой ветвления  $q_b = 0.689$  представлена на рис. 2, а. Внутри этой области в зависимости от значений  $(\alpha, q)$  неустойчивость течения (2) может определяться как одной, так и двумя модами одновременно.

При переходе параметра  $q$  через  $q_b$  две ветвящиеся моды обмениваются частями зависимостей  $\omega_r(\alpha)$ ,  $\omega_i(\alpha)$  и как следствие значениями  $\alpha_{\max}$ ,  $\alpha_{\min}$ , характеризующими границы областей неустойчивости. Аналогичным образом происходит ветвление мод во всех других случаях, причем новые точки ветвления возникают с ростом  $Re$  по мере появления новых неустойчивых собственных решений рассматриваемой спектральной задачи (рис. 2, б, в).

Нейтральные кривые для шести неустойчивых мод при  $Re = 1000$  показаны на рис. 2, г. Область неустойчивости моды 5 имеет отдельный контур. Нейтральные

кривые для остальных мод изображаются одной кривой с точками ветвления  $q_b = 0.225; 0.495; 0.675; 0.76$  между модами 4,6; 2,4; 2,3; 1,2 соответственно. При обходе ее в положительном направлении, начиная с точки  $q = 0$ ,  $\alpha = 1.15$ , участки кривой соответствуют модам 1, 2, 4, 6, 4, 2, 3, 2, 1. Отметим, что мода 6 формируется из части моды 2 при  $900 < Re < 1000$  и ее нейтральная кривая не имеет отдельного замкнутого контура в отличие от всех остальных исследованных мод.

### 3. Заключение

Рассмотрена задача об устойчивости закрученного течения типа вихря Бэтчелора по отношению к несимметричным возмущениям. Представлен эффективный численный метод исследования спектра собственных значений. Результаты расчетов показывают существование до восьми одновременно наблюдаемых неустойчивых мод.

Исследовано поведение каждой моды в отдельности и свойства полного спектра мод. Обнаружено и исследовано свойство ветвления собственных решений. Рассчитаны координаты точек ветвления. Это позволило построить кривые нейтральной устойчивости при фиксированных значениях чисел Рейнольдса. Показано, что ветвление мод и скачкообразное изменение границ областей неустойчивости связаны с наличием кратных корней в задаче на собственные значения источника.

Явление распада вихря связано с неустойчивостью течения. Основной вклад в дестабилизацию течения вносит первая основная мода неустойчивости. Более слабые моды могут привести к вторичной неустойчивости. Исследования показали, что в сильно закрученном вихревом течении Бэтчелора именно эти моды остаются неустойчивыми для длинноволновых возмущений.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Leibovich S., Stewartson K.A. Sufficient condition for the instability of columnar vortices // J. Fluid Mech. 1983. V. 126. P. 335–356.
2. Stewartson K., Brown S.N. Near-neutral center-modes as inviscid perturbations to a trailing line vortex // J. Fluid Mech. 1985. V. 156. P. 387–399.
3. Lessen M., Singh P.J., Paillet F. The stability of a trailing line vortex. Part 1. Inviscid theory // J. Fluid Mech. 1974. V.63. P. 753–763.
4. Lessen M., Paillet F. The stability of a trailing line vortex. Part 2. Viscous theory // J. Fluid Mech. 1974. V. 65. P. 769–779.
5. Khorrami M.R. On the viscous modes of instability of a trailing line vortex // J. Fluid Mech. 1991. V. 225. P. 197–212.
6. Mayer E.W., Powell K.G. Viscous and inviscid instabilities of a trailing vortex // J. Fluid Mech. 1992. V. 245. P. 91–114.
7. Ахметов В.К. Гидродинамическая устойчивость контрвихревых течений // Гидротехническое строительство. 2018. № 2. С. 13–18.
8. Ахметов В.К., Шкадов В.Я. Устойчивость свободных и ограниченных закрученных течений с зонами рециркуляции // Инженерная физика. 2008. № 6. С. 6–13.
9. Delbende I., Chomas J.-M., Huerre P. Absolute/convective instabilities in the Batchelor vortex: A numerical study of the linear impulse response // J. Fluid Mech. 1998. V. 355. P. 229–254.
10. Garg A.K., Leibovich S. Spectral characteristics of vortex breakdown flowfields // Phys. Fluids. 1979. V. 22. № 11. P. 2053–2064.
11. Batchelor G.K. Axial flow in the trailing line vortices // J. Fluid Mech. 1964. V. 20. P. 645–658.

12. Ахметов В.К. Влияние закрутки на устойчивость течений в каналах // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия Естественные и Технические Науки. 2021. № 3. С. 69–72.
13. Ахметов В.К., Шкадов В.Я. К вопросу об устойчивости свободного вихря // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1987. № 2. С. 35–40.
14. Ахметов В.К., Шкадов В.Я. Неустойчивость свободного вихря при большой закрутке потока // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2003. № 1. С. 54–58.

---

© Ахметов Вадим Каюмович ( [vadim.akhmetov@gmail.com](mailto:vadim.akhmetov@gmail.com) ).

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»