DOI 10.37882/2223-2982.2024.5-2.45

НЕКОТОРЫЕ СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕОРИИ МЕРЫ СТУДЕНТАМ ВУЗОВ

SOME MEANINGFUL PROBLEMS OF TEACHING MEASURE THEORY TO UNIVERSITY STUDENTS

R. Fokin

Summary: The priorities of the mathematical training course in the theory of measure for students of physics and mathematics, technical and humanitarian professional fields from the point of view of hemispheric asymmetry of the brain are discussed. The sections of the course content are defined. Learning styles and methods of meaningful motivation of students are chosen – the Banach-Tarski theorem on doubling an orange, a high degree of abstraction. Questionable elements of the course content are analyzed and transformed – an unsatisfactory presentation of the features of Jordan, Borel, and Lebesgue measures, which can lead to logical errors in theorems. The review of classical textbooks on the theory of measure by A.N. Kolmogorov and S.V. Fomin, I.P. Natanson, B.Z. Vulikh, as well as two modern textbooks developed by practical teachers, is carried out. The author's section of the training course on measure theory has been developed, dedicated to its application to probability theory and mathematical statistics, as well as the Lebesgue-Stieltjes measure.

Keywords: university, education, motivation, mathematics, algebra, measure, Jordan, Lebesgue, Borel, non-negativity, additivity, measurability, probability, statistics.

Фокин Роман Романович
доктор педагогических наук, профессор, доцент,
Федеральное Государственное Бюджетное Военное Образовательное Учреждение Высшего Образования «Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского», (г. Санкт-Петербург)
vka@mil.ru

Аннотация: Обсуждаются приоритеты математического учебного курса теории меры для студентов физико-математического, технического и гуманитарного профессиональных направлений с точки зрения межполушарной асимметрии мозга. Определяются разделы содержания курса. Выбираются стили обучения и способы содержательной мотивации студентов – теорема Банаха-Тарского об удвоении апельсина, высокая степень абстрагирования. Анализируются и преобразуются сомнительные элементы содержания курса – неудовлетворительное изложение особенностей мер Жордана, Бореля, Лебега, которое может привести к логическим ошибкам в теоремах. Производится обзор классических учебных пособий по теории меры А.Н. Колмогорова и С.В. Фомина, И.П. Натансона, Б.З. Вулиха, а также двух современных учебных пособий, разработанных практическими преподавателями. Разработан авторский раздел учебного курса теории меры, посвященный ее приложению к теории вероятностей и математической статистике, а также мере Лебега-Стилтьеса.

Ключевые слова: вуз, обучение, мотивация, математика, алгебра, мера, Жордан, Лебег, Борель, неотрицательность, аддитивность, измеримость, вероятность, статистика.

Введение в проблематику исследования

Актуальность объясняется тем, что теория меры (ТМ) перспективна в вузовской математике, она преподается для физико-математических, технических профессиональных направлений, но может обоснованно преподаваться и для гуманитарных.

Цель исследования состоит в оптимизации курса ТМ путем изучения отдельных проблем его содержания и обучения ему студентов в смысле решения задач, представленных ниже.

Задачи: 1) Определение разделов курса ТМ путем анализа содержательных связей ТМ с другими областями математики. 2) Выбор и оптимизация стилей обучения в курсе ТМ и способов мотивации студентов. 3) Анализ и преобразование выявленных автором сомнительных элементов содержания курса ТМ. 4) Обзор и анализ некоторых учебных пособий по курсу ТМ. 5) Разработка раздела курса ТМ о вероятностных пространствах и мере Лебега-Стилтьеса.

Обзор методов и материалов исследования

Исследование является междисциплинарным. Применяются как психолого-педагогические, так и логико-математические методы. Из 3 аспектов обучения (содержательный, прагматический, методический – чему, зачем, как учить) статья более затрагивает содержательный, но при этом невозможно совсем не затронуть и другие из-за их тесной связи между собой.

В качестве материалов используются статьи автора, посвященные [1], [2] оптимизации содержания и [3] другим проблемам обучения математике и информатике. Принято считать [4], [5], что настоящие и будущие математики, физики, техники, естественники (ПНТ1 - профессиональные направления типа 1) – это в большинстве левополушарные люди (мыслительный тип), а гуманитарии и спортсмены (ПНТ2, но из спортсменов исключая шахматистов, например) – правополушарные (художественный тип), Есть еще люди гармоничного типа. При обучении левополушарным предпочтительна вербальная (символьная в широком смысле) информа-

Таблица 1.
Доля (%) студентов М - мыслительного, Х - художественного, Г - гармоничного типов по ПНТ1 и ПНТ2 соответственно.

Уч. годы	ПНТ1			ПНТ2		
	М	Х	Г	М	Х	Г
1993-1995	37.1	58.2	4.7	25.6	69.4	5.0
2000-2003	32.1	62.8	5.1	22.9	71.6	5.5
2008-2011	27.7	66.8	5.5	21.2	73.0	5.8

Источник: Составлено автором на основании [6]

ция – научная информация чаще так и представлена. А правополушарным – не вербальная, что представляет при обучении проблемы. (Таб. 1.)

Автор с коллегами проводил в различных вузах Санкт-Петербурга тесты [6] сотен студентов с 1993 по 2011 годы (см. таблицу 1), из-за больших объемов выборок уровень значимости колебался около 10-15 - таков порядок вероятности, что мы приняли ошибочные гипотезы. Отсюда наблюдаемое в последние годы обострение проблем в обучении математике именно студентов ПНТ1. Это сейчас на 2/3 и более правополушарные люди, а методика обучения традиционно нацелена на левополушарных.

Студенты ПНТ2 остались правополушарными в большинстве, на что осталось ориентированным их обучение математике. Профессор Пичугин Ю.А., имеющий богатый опыт преподавания математики студентам-гуманитариям, считает [7], что значительно больший интерес (и результат!) у них получается именно при изучении оснований математики и ее фундаментальных концепций, а не вычислений конкретных типов производных и интегралов. ТМ порождается фундаментальными концепциями, и она близка к основаниям математики. ТМ может успешно изучаться студентами и ПНТ1, и ПНТ2, людьми художественного, мыслительного, гармоничного типов.

Также материалами нашего исследования являются различные учебные пособия по ТМ. Заметим, что основные достижения ТМ связаны с 20 веком, а большинство разделов вузовской математики – с 16-19 веками.

Результаты исследования и их обсуждение

I. О разделах курса ТМ

ТМ логически связана почти со всеми другими областями математики и изучается студентами в конце изучения математики. Курс ТМ короткий - обычно 2-3 зачетные единицы, 72-108 часов. В этот курс помимо непосредственно ТМ и интеграла Лебега следует также включить: 1) Теорию множеств: только Декартово произведение; 2М – множество всех подмножеств множества М; мощности конечных и бесконечных множеств; не более, чем счетные (НБЧС) множества – конечные или счетные. 2) Топологические пространства (ТП): только определение ТП, открытые и замкнутые множества, топологическое определение непрерывного отображения. 3) Метрические пространства (МП): включая порождение топологии на МП. 4) Линейные пространства (ЛП): включая нормированные пространства и порождение метрики в них, сопряженные ЛП. 5) Вероятностные пространства и мера Лебега-Стилтьеса.

Обзор раздела ТП. Определение 1: Пусть М – абстрактное (произвольное) множество, $T\subset 2^M$ (см. абзац выше), причем Т удовлетворяет свойствам 1-4 (аксиомам топологии): 1) пустое множество $\varnothing\in T$; 2) $M\in T$; для $\forall A, B\in T$ 3) $A\cup B\in T$; 4) $A\cap B\in T$. Тогда говорят, что: 1) Т – топология на М; 2) Т –множество открытых множеств; 3) упорядоченная пара (М, Т) – топологическое пространство. Определение 2: Множество А – замкнутое означает, что М\А – открытое. Определение 3: Топологическое определение непрерывного отображения. Пусть (М, Т) и (М', Т') – топологические пространства, отображение $f: M\to M'$. Если при этом прообраз всякого открытого множества – это открытое множество, то отображение f называют непрерывным на М.

II. О стилях обучения в курсе ТМ и способах мотивации студентов

Стиль скороговорки. «Определение ... Теорема ... Следствие ... Замечание ... « - и так далее. Такой стиль лекции – очень экономный в смысле формального времени обучения, если «надо» большой и сложный материал «изучить» в очень короткое время. Первый недостаток: Студент учебный материал за короткое время не поймет совсем и даже законспектировать не успеет. Он слышит о нем впервые в жизни, причем делает подобное 6 дней в неделю по 6-8 часов в день. Лектору следует делать паузы в своей речи и произносить слова медленно и четко. Второй недостаток: Отсутствие в учебном материале информации, мотивирующей студента к обучению.

Стили компьютерной презентации лекции: На просмотр слайда студентами отводится фиксированное время, затем появляется следующий слайд – это стиль фильма для коллективного просмотра, на всю аудиторию необходим 1 компьютер, 1 проектор, 1 большой экран. Лучше в смысле понимания студентом учебного материала, когда слайд меняется по действию студента (по щелчку мыши, например) – это стиль электронной книги для индивидуального просмотра, при этом каждый студент работает на своем компьютере. Презентация, разработанная в последнем стиле, также может использоваться в режиме лектора для коллективного просмотра, лектор при этом меняет слайды на основе обратной связи со студентами, чтобы они успевали понять содержание каждого слайда.

О внешней и внутренней мотивации. Студента желательно мотивировать к изучению всего курса и конкретной лекции. Не только внешне – получением хорошей оценки, но и внутренне (содержательно) – в смысле самосовершенствования, формирования новых знаний, способностей. Конкретные определение и теорема должны им рассматриваться как элементарный шаг на понятном для него пути.

Об учебном материале для внутренней мотивации. В самом начале курса ТМ следует сказать, что мера – это понятие, обобщающее такие понятия как длина, площадь, объем. Студент может подумать: «Мы уже умеем вычислять длины, площади, объемы не только прямолинейных, но и криволинейных фигур с помощью интегралов, включая многомерные интегралы. Что же еще тут изучать?» Автор не видел ни одного учебного пособия по ТМ, где обучаемый был бы мотивирован в этом смысле. Для этого предлагается такой учебный материал:

Теорема 1 Банаха-Тарского «Удвоим апельсин»: Можно разбить замкнутый шар единичного объема $B \in \mathbf{R}^3$ на 5 дизъюнктных (попарно непересекающихся) множеств A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и построить такие соответственно конгруэнтные им дизъюнктные множества B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, что $B_1 \cup B_2 = C$ и $B_3 \cup B_4 \cup B_5 = D$. При этом B, C, D конгруэнтны. Приводить без доказательства. Противоречие (парадокс) при этом заключается в том, что поскольку объем V неотрицателен и аддитивен (так учат в средней школе), то $1 = V(B) = V(A_1) + V(A_2) + V(A_3) + V(A_4) + V(A_5) = V(B_1) + V(B_2) + V(B_3) + V(B_4) + V(B_5) = (V(B_1) + V(B_2)) + (V(B_3) + V(B_4) + V(B_5)) = V(C) + V(D) = 1 + 1 = 2$.

Отсюда, эти объемы V, а значит и меры μ нуждаются в дополнительном математическом исследовании, которое последовательно провели М.-Э.-К. Жордан, Ж. Борель и А.-Л. Лебег. Выход из парадокса заключается в том, чтобы объявить, что у таких сложных множеств, как $A_1, \ldots, A_5$ и $B_1, \ldots, B^5$ объема (меры) не существует, они не измеримы.

Определение 4: Принадлежит Жордану. Пространство с мерой: это упорядоченная тройка (M, A, μ), где M – это основное множество произвольных (абстрактных) объектов, некоторые подмножества которого измеряются мерой, A – это множество измеримых подмножеств M, $A \subset 2^M$, A – это алгебра, неотрицательный и аддитивный функционал $\mu: A \to \mathbf{R}$ – это мера. Неотрицательность и аддитивность μ означает соответственно, что 1) $\forall Q \in A$ $\mu(Q) \geq 0$; 2) $\forall Q, W \in A$: $Q \cap W = \varnothing$ $\mu(Q \cup W) = \mu(Q) + \mu(W)$

Определение 5: A – это алгебра, означает, что $\varnothing \in A$, $M \in A$, A замкнуто относительно операций объединения, пересечения, разности множеств ($\cup$, $\cap$, $\setminus$), выполненных конечное количество раз.

Здесь следует обратить внимание студента на то, что Жордан предложил измерять мерой μ подмножества M, состоящее из абстрактных объектов. Становится теоретически возможным разрабатывать математическую модель, в рамках которой, например, как мера измеряется весомость некоторого высказывания на некотором подмножестве людей. В результате может стать возможной математическая формализация некоторых очень сложных задач, в частности таких, которые сейчас относят к сфере гуманитарных наук. Например, компьютерная программа будет подбирать совместимые экипажи самолетов, судов. Об этом следует сказать студенту, но автор не видел ни одного учебного пособия, где бы это было сделано.

III. О сомнительных элементах содержания курса ТМ

Более распространено изучение пространств с мерой (см. определение 4) при $M = \mathbf{R}^n$ – в обычном n-мерном пространстве, при этом нельзя считать измеримыми все его подмножества, иначе будут иметь место различные парадоксы Банаха-Тарского, Хаусдорфа. Наиболее известны 3 свободные от этих парадоксов пространства с мерой: Жордана ($\mathbf{R}^n$, A_J, μ_J); Бореля ($\mathbf{R}^n$, A_B, μ_B); Лебега ($\mathbf{R}^n$, A_L, μ_L). При этом $A_J \subset A_B \subset A_L$, $A_J \neq A_B \neq A_L$, эти меры одно и то же множество меряют одинаково, A_B и A_L –σ-алгебры; μ_B, μ_L - σ-аддитивные меры.

Определение 6: A – это σ-алгебра, означает, что A – это алгебра и A замкнуто относительно операций объединения, пересечения, разности множеств ($\cup$, $\cap$, $\setminus$), выполненных НБЧС количество раз.

Определение 7: Пусть (M, A, μ) – пространство с мерой, A – σ-алгебра. Если для любых дизъюнктных (попарно не пересекающихся) измеримых $B_1, B_2, \ldots$ в НБЧС количестве $\mu(B_1 \cup B_2 \cup \ldots) = \mu(B_1) + \mu(B_2) + \ldots$, то говорят, что μ - σ-аддитивная мера.

Определение 8: Алгебра Бореля A_B – это минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые множества из M. Пространство с мерой Бореля может быть определено теоретически на любом топологическом пространстве M, а не только на $\mathbf{R}^n$.

Сообщение 1: Процедуры построения алгебры Бореля. 1) Если мы будем открытые множества из M объединять, пересекать, вычитать НБЧС количество раз, то в результате мы и получим алгебру Бореля. 2) Про нее же можно сказать, что это минимальная σ-алгебра, содержащая все замкнутые множества из M. 3) Можно объединять, пересекать, вычитать НБЧС количество раз элементарные прямоугольники [8, С. 267-268] - получится алгебра Бореля.

Сообщение 2: Алгебра Жордана строится при помощи верхней (μ*) и нижней (μ*) мер, определенных для всех подмножеств $\mathbf{R}^n$.

Сообщение 3: Алгебра Лебега. строится при помощи только верхней (μ*) меры, построенной ранее Жорданом (см. сообщение 2) для $\mathbf{R}^n$

Замечание 1: Алгебра Жордана, несмотря на свою бедность относительно алгебр Бореля и Лебега, вполне достаточна для расчетов длин, площадей и объемов фигур с помощью интегралов Римана, включая многомерные случаи.

Замечание 2. Трудно (но возможно) построить множество в $\mathbf{R}^n$, которое принадлежит алгебре Лебега, но не принадлежит алгебре Бореля. Для приложений почти всегда используется именно алгебра Бореля.

В курсе ТМ правильным было бы (как минимум!) четко выделять разницу мер Бореля и Лебега, а желательно - и Жордана. В теоремах существенно правильно указывать, какая из этих мер имеется в виду. Об этом ниже.

Определение 9: Пусть: (X, A_x, μ_x), (Y, A_y, μ_y) – пространства с мерами, где A_x, A_y – σ-алгебры. Тогда отображение $f\colon X \to Y$ называют (A_x, A_y) – измеримым, если измерим прообраз любого измеримого множества.

Теорема 2: Пусть: (M, A, μ) –пространство с мерой, где A – σ-алгебра, $(\mathbf{R}, A_B, \mu_B)$ – на $\mathbf{R}$ заданы σ-алгебра Бореля и мера Бореля, Функционал $f\colon M \to \mathbf{R}$ является (A, A_B)-измеримым $\Leftrightarrow \forall a\in R \ \{x\in M: f(x)< a\}\in A$.

Доказательство (⇒) очевидно. Пусть y=f(x), тогда на оси y множество {y< a} – открытое $\Rightarrow \{y< a\}\in AB \Rightarrow f^{-1}(\{y< a\})\in A$.

Доказательство (⇐): Про прообразы f несложно доказать, что:

$$f^{-1}(C_1\cup C_2\cup \dots)= f^{-1}(C_1)\cup f^{-1}(C_2)\cup \dots \qquad (1)$$
$$f^{-1}(C_1\cap C_2\cap \dots)= f^{-1}(C_1)\cap f^{-1}(C_2)\cap \dots \qquad (2)$$
$$f^{-1}(C\setminus C_1\setminus C_2\setminus \dots)= f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(C_1)\setminus f^{-1}(C_2)\setminus \dots \qquad (3)$$

В (1), (2), (3) имеются в виду НБЧС объединения, пересечения, разности подмножеств $\mathbf{R}$. На оси y для $\forall a\in \mathbf{R}$ назовем {y<a} множеством типа 1, $\forall b\in \mathbf{R}$ {y>b} - типа 2, $\forall a< b\in \mathbf{R}$ {a<y<b} - типа 3. Из (1), (2), (3) и того, что A – σ-алгебра следует, что если некоторое множество D на оси y можно породить НБЧС количеством операций (∪∩\) из множеств типа 1, то f -1 (D) измеримо. Для доказательства достаточно так породить любое $D\in A_B$, такое D (см. определение 8, сообщение 1 пункт 1) порождается из открытых множеств НБЧС количеством операций (∪∩\). Любое открытое множество на оси y – это НБЧС объединение множеств типов 1, 2, 3.

Далее для доказательства достаточно так породить множества типов 2, 3 из множеств типа 1. 1) $\mathbf{R}\setminus\{y<a\}=\{y\geq a\}$ – породили для любого a. 2) Пусть an= b+ 1/n при натуральных n. Тогда $\{y\geq a1\}\cup\{y\geq a2\}\cup \dots = \{y>b\}$ – породили для любого b. 3) При a<b $\{y< b\}\cap\{y> a\}= \{a<y<b\}$ - породили для любых a<b.

Автор не видел ни одного учебного пособия по ТМ, где приводилось бы доказательство теоремы 2, хотя оно простое. Дело в том, что в ее формулировке используются термины алгебры и меры Бореля. А в большинстве учебных пособий по ТМ предпочитают термины алгебры и меры Лебега. В результате может по смыслу получиться приводимая ниже неправильная «теорема».

«Теорема» 3: Пусть: (M, A, μ) –пространство с мерой, где A – σ-алгебра. Пространство с мерой $(\mathbf{R}, L, \mu_L)$ на $\mathbf{R}$ задает σ-алгебру Лебега L и меру Лебега μ_L. В этих условиях функционал $f\colon X \to \mathbf{R}$ является (A, L)-измеримым $\Leftrightarrow \forall a\in \mathbf{R}$ $\{x\in X: f(x)< a\}\in A$

Контрпример по «теореме» 3: Пусть (X, A, μ) – это (R, B, μ_B), пространство с мерой Бореля на оси x. Пусть y= f(x)= x, функционал в данном случае представляет собой тождественную функцию. Она не является (B, L)-измеримой: возьмем на оси y множество C из алгебры Лебега, которое не принадлежит алгебре Бореля, тогда C измеримо на оси y, но измеримо на оси x, однако $C= f^{-1}(C)$ в силу тождественности f.

«Определение» 10: Пусть функционал $f\colon M \to \mathbf{R}$, (M, A, μ) – абстрактное пространство с мерой. В этих условиях функционал f называется измеримым по Лебегу, если $\forall a\in \mathbf{R}$ $\{x\in X: f(x)< a\}$ – измеримое множество. Фактически «определение» 10 неявно вводит «теорему» 3.

IV. Обзор некоторых учебных пособий по курсу ТМ.

Объемные учебные пособия по ТМ [8], [9], [10] являются классическими, в них нет прямых логических ошибок в теоремах, хотя идеальным для изучения ТМ ни одно из них не является. Пособие [8] - почти идеальное. Его терминология по ТМ полностью соответствует принятой в математической науке. Оно написано очень подробно в хорошо понятном для студента стиле и по сути не имеет внутренних недостатков. Пособие явно содержит меры Бореля, Лебега, Лебега-Стилтьеса, указывая их различия. Неплохо бы сюда добавить теорему 1 Банаха-Тарского (для обеспечения внутренней мотивации студента), а также рассмотрение меры Жордана и вероятностных пространств, хотя это лишь спорная авторская точка зрения.

В [9] рассказывается о неуказанных мере и σ-алгебре измеримых множеств, причем рассматривается только M= **R**. Меры и алгебры Жордана, Бореля, Лебега вовсе не упоминаются. При построении σ-алгебры используется стиль Бореля (см. сообщение 1, пункты 1, 2), а также стиль Жордана (см. сообщение 2). По мнению автора, фактически построена при этом алгебра Бореля. «Функция f(x), заданная на множестве E, называется измеримой, если измеримо это множество E и если при любом a измеримо множество E(f>a)» [9, С. 81] – используется стиль «определения» 10, но фактическая опора на алгебру Бореля избавляет от логических ошибок в теоремах. Терминология по ТМ здесь своя (не совместимая с [8], [10]), что не делает [9] хорошо понятным студенту.

В [10] рассматривается лишь M= Rn, функционалы называются функциями, что не очень плохо, поскольку термин «функция нескольких аргументов» в математической литературе также часто используется. О мерах Жордана и Бореля не упоминается, говорится только о мере Лебега и σ-алгебре Лебега, неуказанные мера и σ-алгебра подразумеваются Лебеговскими. Определение измеримой по Лебегу функции дается в стиле «определения» 10. При этом $M= \mathbf{R}^n$, $A=A_L$ и $\forall a\in \mathbf{R}$ множество $\{x\in M: f(x)< a\}$ называется Лебеговым множеством вместе с аналогичными множествами $\{x\in M: f(x)\leq a\}$, $\{x\in M: f(x)> a\}$, $\{x\in M: f(x)\geq a\}$. Функция измерима по Лебегу, если прообраз любого Лебегова множества измерим по Лебегу – никаких ошибок в теоремах это не влечет. Но причем тут Лебег? Требование $A=A_L$ чрезмерно, достаточно того, чтобы A было абстрактной σ-алгеброй. Терминология по ТМ здесь своя (не совместимая с [8], [9]), что не делает [10] хорошо понятным студенту.

Недостатки кратких пособий по ТМ [11], [12], разработанных преподавателями различных вузов еще более серьезны. Видимо, это объясняется быстротою их разработки и тем, что за основу брались объемные пособия [9], [10] или им подобные, а не [8] – увы!

V. О вероятностных пространствах и мере Лебега-Стилтьеса.

Идея рассмотрения вероятности как частного случая меры принадлежит Ж. Борелю и А.Н. Колмогорову, в развитии теории вероятностей (ТВ) и математической статистики (МС) начался новый этап изучения вероятностных мер (распределений). Предыдущий этап называют Байесовским, он преимущественно связан с идеями комбинаторики. Т. Байес (1702 – 1761) – великий британский математик. Обычно студент изучает ТВ и МС, не зная ТМ, следовательно, он не может при этом понимать фундаментальных основ вероятности, и это трудно практически изменить. Проще в ТМ включить соответствующий раздел.

Определение 11: Вероятностное пространство – это упорядоченная тройка (Ω, Σ, P), где $\Omega= \{\omega\}$ – множество элементарных событий ω, Σ - σ-алгебра измеримых событий (событие – это множество элементарных событий), $P: \Sigma \to \mathbf{R}$ – вероятность (неотрицательный σ-аддитивный функционал, $P(\Omega)= 1$). Обычно с этого начинается изучение ТВ. Может ли это понять большинство студентов? Знающему ТМ очевидно, что вероятностное пространство – это частный случай пространства с мерой.

Определение 12: Пусть: (Ω, Σ, P) – это вероятностное пространство, $(\mathbf{R}, A_B, \mu_B)$ – пространство с мерой Бореля на **R**. Тогда (Σ, A_B)-измеримый функционал $\xi: \Omega \to R$ называется случайной величиной

Определение 13: Функция распределения случайной величины ξ - это (в условиях определения 12) $F_\xi(x)= P(\{\omega\in \Omega: \xi(\omega)< x\})$ для $\forall x\in \mathbf{R}$. В ТВ принято сокращенно писать о событии $\xi<x$ и о его вероятности $P(\xi<x)$. Событие $\xi<x$ измеримо (см. теорему 2), следовательно, определение 13 корректно. Просто доказать свойства F_ξ: 1) F_ξ не строго монотонно возрастает; 2) F_ξ непрерывна слева; 3) $F_\xi(-\infty)= 0$; 4) $F_\xi(+\infty)= 1$

Определение 14: Пусть (в условиях определений 12 и 13) $F_\xi(x)$ – дифференцируемая функция при $\forall x\in\mathbf{R}$. Тогда ее производную $F'_\xi(x) = f_\xi(x)$ называют плотностью распределения случайной величины ξ

Определение 15: Строим пространство с мерой $(\mathbf{R}, A_B, \mu_\xi)$. Сначала для $\forall a\in\mathbf{R}$ зададим μ_ξ на множествах типа 1 (см. доказательство теоремы 2) как $F_\xi(a)$. Затем по σ-аддитивности распространим μ_ξ на любое множество из A_B – аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 2. Поскольку F_ξ не строго монотонно возрастает, то нужные для этого пределы будут существовать согласно аксиоме о точной верхней грани подмножества **R**. Мера μ_ξ называется распределением случайной величины ξ.

Выше приведено математически корректное изложение фундаментальных основ ТВ, чего автору не доводилось видеть ни в одном учебном пособии ни по ТВ, ни по ТМ. В ТВ замена меры и σ-алгебры Бореля на меру и σ-алгебру Лебега приведет к некорректности определения 13, а это классическое определение F_ξ. ТВ и МС широко используют интеграл Лебега, но он может быть основан на любой σ-аддитивной мере, например, на мере Бореля.

Определение 16. Не строго монотонно возрастающая и непрерывная слева функция F: **R** → **R** называется порождающей меру Лебега-Стилтьеса.

Определение 17: Строим пространство с мерой (**R**, A_L, μ_{LS}). Сначала зададим μ_{LS} на одномерных элементарных прямоугольниках [8, С. 375]:

$\mu_{LS}((a; b))= F(b)- F(a+0)$ (4)

$\mu_{LS}([a; b])= F(b+0)- F(a)$ (5)

$\mu_{LS}((a; b])= F(b+0)- F(a+0)$ (6)

$\mu_{LS}([a; b))= F(b)- F(a)$ (7)

Что и реализуется (4), (5), (6), (7). Затем с помощью стандартной Лебеговой процедуры распространим μ_{LS} на множества из A_L. Мера Лебега-Стилтьеса μ_{LS} похожа на μ_{ξ} - распределение случайной величины, но μ_{LS} основана на мере Лебега, а μ_{ξ} - на мере Бореля, что внушает автору сомнения по прямому приложению μ_{LS} к ТВ и МС, помня о теореме 2 и «теореме» 3

Заключение

Поставленные задачи 1 - 5 были решены, а, следовательно, цель исследования была достигнута.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фокин Р.Р. О содержательном аспекте обучения математике и информатике в современной высшей школе. // Современные наукоемкие технологии – 2021 - №6 ч. 2 - С.340-344.
2. Фокин Р.Р. О содержательном аспекте изучения математического доказательства на примере теоремы Кронекера-Капелли в курсе линейной алгебры. // Современные наукоемкие технологии – 2022 - №2 - С.231-235.
3. О некоторых проблемах в групповом обучении студентов математике и информатике / Р.Р. Фокин, Д.А. Булекбаев, А.А. Атоян, М.А. Абиссова // Педагогический научный журнал – 2023 - № 6. – С. 124-131.
4. Спрингер С., Дейч Г. Левый мозг. Правый мозг. - М: Книга по требованию, 2013. - 254 с.
5. Москвина Н.В., Москвин В.А. Межполушарные асимметрии и индивидуальные различия человека. - М: Смысл, 2011. - 368 с.
6. Фокин Р.Р. Некоторые психологические и статистические аспекты преподавания дисциплин из областей математики и информатики в современной высшей школе. // Современные наукоемкие технологии – 2019 - №9 - С.175-179.
7. Новые образовательные технологии и оценка статистической надежности обучения студентов / Ю.А. Пичугин, М.Л. Никонорова, Н.Р. Карелина // Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. – 2013. – № 154. – С. 138-145.
8. Колмогоров А.Н. Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа: учеб. пособие - М.: Наука, 1976. – 544 с.
9. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной: учеб. пособие - М.: Наука, 1974. – 480 с.
10. Вулих Б.З. Краткий курс теории функций вещественной переменной: учеб. пособие - М.: Наука, 1973. – 352 с.
11. Элементы теории меры и интеграл Лебега: учеб. пособие / И.А. Кареев, Е.А. Турилова. - Казань: изд-во Казан. ун-та, 2016 — 66 с.
12. Элементы теории меры и интеграл Лебега: конспект лекций / О.Б. Васюнина, С.В. Самуйлова. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2012 – 51с.

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»