

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ ОБМЕНА ИНФОРМАЦИЕЙ С ПОМОЩЬЮ СТОХАСТИЧЕСКИХ ГРАФОВ

MODELING OF INFORMATION EXCHANGE SYSTEMS USING STOCHASTIC GRAPHS

M. Musayev

Summary. The Article is dedicated to development known and development of a new analytical method of study of the exchange by information between controlling computing system and subscriber. Difficulty of the analysis of the systems of the exchange by information is conditioned by difficulty of the process of the exchange. The considered model exchange system by information in single-circuit controlling computing system (CCS) and building its mathematical model with considering provision for some simplifications. These models in step of functional syntheses allows to conduct the analysis and estimate necessary performance a processor, time to realization of the standard program, analyses the flows in system, compare the different variants of the building of the functional nodes and ways of the exchange by information between CS and external subscribers, identify the possible mistakes.

Keywords: systems of the exchange by information, two-phase system of mass service, exponential distribution, external poison flow, stochastic earl.

Мусаев Мухаммаджон Усарович

*К.т.н., доцент, Навоийский государственный
горный институт, Узбекистан Ташкентская область
г. Алмалык
elyor.musayev1978@mail.ru*

Аннотация. Статья посвящена развитию известных и разработке новых аналитических методов исследования обмена информацией между управляющей вычислительной системы и абонентами. Сложность анализа систем обмена информацией обусловлена сложностью процесса обмена. Рассмотрена модель система обмена информацией в одноконтурной управляющей вычислительной системе (УВС) и построение ее математической модели с учетом некоторых упрощений. Эти модели на этапе функционального синтеза позволяют провести анализ и оценить необходимую производительность процессоров, время реализации типовой программы (работы), проанализировать потоки в системе, сравнить различные варианты построения функциональных узлов и способы обмена информацией между ВС и внешними абонентами, выявить возможные ошибки.

Ключевые слова: систем обмена информацией, двухфазная система массового обслуживания, экспоненциальное распределение, внешний пуассоновский поток, стохастический граф.

Постановка задачи

При построении и исследовании математической модели вычислительных систем используется некоторые приближения и упрощения. Для этого имеется много доводов и, прежде всего—это невозможность математически абсолютно точно представить и описать реальную систему. Кроме того, очень хорошая модель может оказаться трудной в математическом отношении, что зачастую не оправдывается экономически применение точных моделей. С этой целью проведен анализ модели систем обмена информацией в одноконтурной управляющей вычислительной системы.

Вывод уравнений

Формальной моделью описанной выше ВС служит двух узловая двухфазная система массового обслуживания (СМО), у которой узел (процессорные устройство) содержит один обслуживающий прибор А и является первой фазой для внешнего потока заявок и второй —для внутреннего потока, генерируемого внешним запоминающим устройством (узлом С) (рис 1). Полагаем, что ширина полосы пропускания памяти

больше или равна ширине полосы процессоров, а поэтому на выходе С всегда содержатся заявки внутреннего потока, требующие второй фазы обслуживания. На вход системы поступает внешний пуассоновский поток интенсивности λ .

Прибор А должен обслуживать заявки внутреннего потока и внешнего, обладающего относительным приоритетом. Следовательно, заявки внешнего потока не прерывают уже начатого обслуживания заявки внутреннего потока, а поступают в очередь r накопитель (БН) и ждут окончания обслуживания. Если же в очереди r нет заявок, а в узле С всегда имеются заявки внутреннего потока (предположение о неограниченности программ), то прибор А по окончании обслуживания одной заявки из узла С немедленно приступает к обслуживанию другой и т.д. до прихода заявок внешнего потока.

Сделав допущение о том, что время обслуживания имеет экспоненциальное распределение с параметром μ для внешнего потока и μ_1 для внутреннего, тогда СМО может быть описана однородной Марковской цепью, для которой определим фазовой вектор

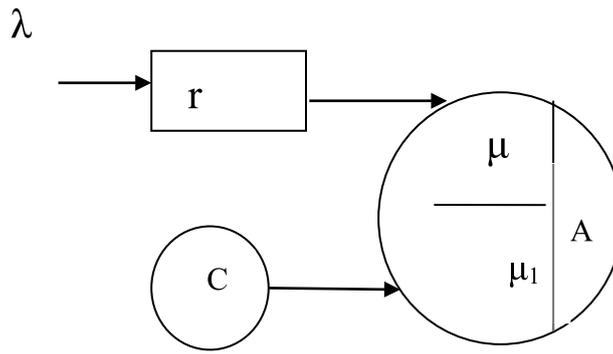


Рис. 1. Двухузловая двухфазная СМО

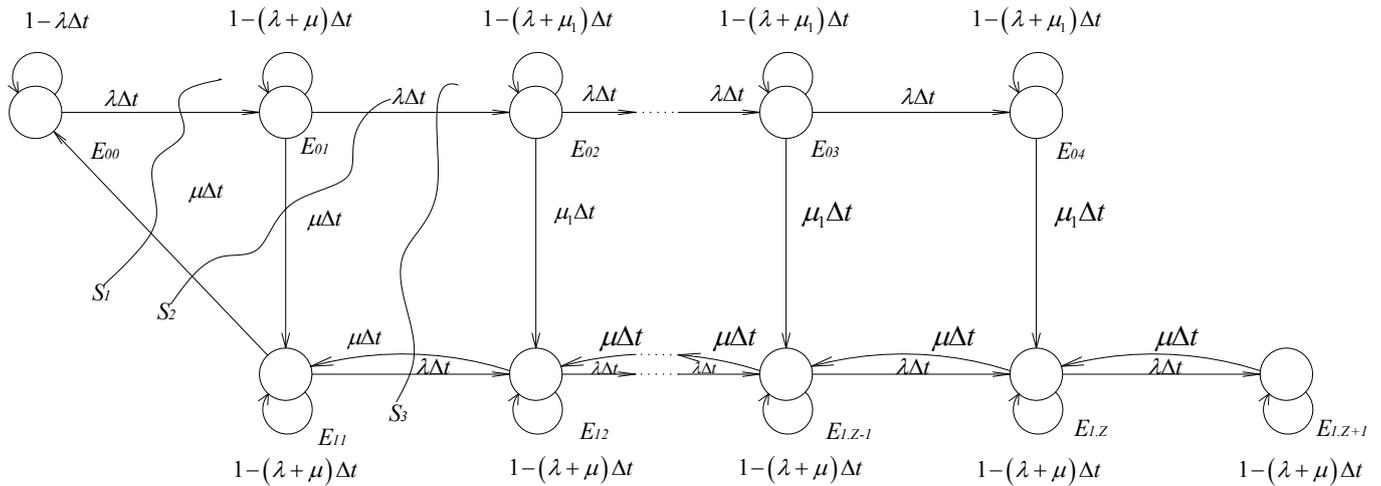


Рис. 2. Граф переходов обслуживающей системы

$P(t) = \{P_{00}(t), P_{01}(t), \dots, P_{0r}(t), P_{11}(t), P_{12}(t), \dots, P_{1r+1}(t)\}$, где $P_{ik}(t)$ — вероятность пребывания системы в момент времени t в состоянии $E_{ik}; i = 0, 1; k = 0, 1, \dots, r + 1$.

Чтобы определить Марковский процесс, необходимо задаться матрицей плотностей переходов. Это удобно делать, построив стохастический граф процесса [1, 2], так как между матрицей плотности перехода и матрицей смежности B графа $G(X, F)$ существует взаимно однозначное соответствие [1]. Графом $G(X, F)$ называется пара, состоящая из множества X и отображения F множества X в подмножество Y по закону, когда каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие некоторое подмножество $F_x \subset Y$. При этом возможны подмножества $F_x = \emptyset$. Каждый элемент множества X (множество элементарных состояний системы) представляет вершину графа, а упорядоченная пара элементов (X, Y) , где $y \in F_x$ является дугой графа.

Квадратная матрица $B = \|b_{\alpha\beta}\|_{\alpha, \beta=0}^N = 1$ называется матрицей смежности графа G , где $b_{\alpha\beta} = 1$, если из X_α в вершину X_β идет дуга, и $b_{\alpha\beta} = 0$ — в противном случае. Чтобы получить из матрицы B матрицу A , нужно

единичные элементы матрицы B заменить соответствующими плотностями переходов.

Построим граф возможных переходов, за время Δt между состояниями множества X . Для этого элементы X состояния изобразим в виде точек (или малых кружков), называемых узлами графа, расположив в ряд все состояния $x \in X (x = 0, 1, \dots, N)$ в порядке возрастания (слева направо) количества заявок в системе. Возможные переходы из одного состояния в другое указываются стрелками, соединяющими эти состояния. Осуществляются же переходы в результате принятия на обслуживание новой заявки (переход направо) или окончания обслуживания (переход налево). Линия, соединяющая два узла, называется ветвью графа. Каждая ветвь (x, y) характеризуется величиной, называемой передачей ветви P_{xy} , а для нашей системы передача принимает смысл вероятности перехода из состояния x в состояние y .

Ветвь бывает прямой, индексы коэффициента передачи расположены в порядке возрастания, и обратной, если в коэффициенте передачи расположены в порядке убывания. Ряд последовательных ветвей образует путь

графа, и если этот путь замкнут, то мы имеем контур обратной связи. Если контур обратной связи образован одной ветвью, то он называется петлей.

Для пуассоновского процесса коэффициент передачи (вероятность перехода) прямых ветвей, вычисленный с точностью до $0(\Delta t)$, одинаков и равен $P_{i,i+1}(t) = \lambda \Delta t + 0(\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots, r-1$, где r — длина очереди, а для обратных ветвей $P_{i,i+1}(t) = \mu \Delta t + 0(\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots, r-1$, передачу петли найдем следующим образом:

$$P_{i,i+1}(t) = (\lambda + \mu)\Delta t + 0(\Delta t), \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

На основании описанного выше алгоритма представления обслуживающего прибора заявкам различных потоков и алгоритма его освобождения составляем стохастический граф переходов (Рис. 2) обслуживающей системы, являющейся математической моделью исследуемой управляющей ВС.

Коэффициентами передачи ветвей данного графа будут:

$$\begin{aligned} P\{E_{ik} \rightarrow E_{i,k+1}\} &= \lambda \Delta t + 0(\Delta t), \quad i = 0, k = 0, 1, 2, \dots, r-1, \\ P\{E_{i,k+1} \rightarrow E_{ik}\} &= \mu \Delta t + 0(r-1\Delta t), \quad i = 1, \quad k = 1, 2, \dots, r, \\ P\{E_{0,k} \rightarrow E_{0,k}\} &= \begin{cases} 1 - \lambda \Delta t + 0(\Delta t) & k = 0 \\ 1 - (\lambda + \mu_1)\Delta t + 0(\Delta t) & k = 1, \dots, r-1; \\ 1 - (\lambda + \mu_1)\Delta t + 0(\Delta t) & k = r; \end{cases} \\ P\{E_{1,k} \rightarrow E_{1,k}\} &= \begin{cases} 1 - (\lambda + \mu)\Delta t + 0(\Delta t), & k = 1, \dots, r \\ 1 - \mu \Delta t + 0(\Delta t) & k = 1, \dots, r+1 \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

В соответствии с графом составляем систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} P'_{00}(t) = -\lambda P_{00}(t) + \mu P_{11}(t), & (a) \\ P'_{01}(t) = \lambda P_{0k-1}(t) - (\lambda - \mu_1)P_{0k}(t) \quad k = 1, \dots, r-1 & (б) \\ P'_{or}(t) = \lambda P_{or-1}(t) - \mu_1 P_{or}(t); & (в) \\ P'_{11}(t) = -(\lambda + \mu)P_{11}(t) + \mu P_{12}(t) + \mu_1 P_{01}(t); \\ P'_{1k}(t) = \lambda P_{1k+1}(t) - (\lambda + \mu)P_{1k}(t) + \mu P_{1k+1}(t) + \mu_1 P_{0k}(t) & (g) \\ \quad \quad \quad k = 2, 3, \dots, r \\ P'_{1r}(t) = \lambda P_{1r}(t) - \mu P_{1r+1}(t) & (e) \end{cases} \quad (2)$$

При $r \rightarrow \infty$ уравнения (2a) и (2r) очевидно отсутствуют.

Так как $\lambda, \mu, \mu_1 > 0$, то переходные вероятности также больше нуля, $P_{ik}(t) > 0$ ($i = 0, 1$); $k = 0, 1, 2, \dots, r+1$), $P_{ik}(t) > 0$ ($i = 0, 1$); $k = 0, 1, 2, \dots, r+1$), а поэтому данная цепь является неприводимой и апериодической. Тогда, согласно теореме Маркова [1,2], существуют предельные вероятности $P_{ik}(t)$, ($k = 0, 1, \dots, r+1$; $i = 0, 1$), что является единственным решением системы уравнений (3), полученным путем предельного перехода по t (при $t \rightarrow \infty, P'_{ik}(t) = 0$)

$$\begin{cases} -\lambda P_{00}(t) + \mu P_{11}(t) = 0 & (a) \\ \lambda P_{0k-1}(t) - (\lambda - \mu_1)P_{0k}(t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r-1; & (б) \\ \lambda P_{or-1}(t) + \mu_1 P_{or}(t) = 0 & (в) \\ (\lambda + \mu)P_{11}(t) + \mu P_{12}(t) + \mu_1 P_{01}(t) = 0 & (г); \\ \lambda P_{1k-1}(t) - (\lambda + \mu)P_{1k}(t) + \mu P_{1k+1}(t) + \mu_1 P_{0k}(t) = 0 & (d) \\ \quad \quad \quad k = 2, 3, \dots, r \\ \lambda P_{1r}(t) - \mu_1 P_{1r+1}(t) = 0 & (e) \end{cases} \quad (3)$$

Решая данную систему с условием нормировки

$$\sum_{k=0}^r P_{0k} + \sum_{k=1}^{r+1} P_{1k} = 1 \quad (4)$$

получим единственное распределение стационарных вероятностей системы.

Решение задачи

Определить вероятности состояний дискретной Марковской цепи можно, воспользовавшись теоремой Медведева Г.А. [1] для анализа стохастических графов, позволяющей получить простые рекуррентные формулы их вычисления. Суть теоремы состоит в следующем: выделяются сечения S ($S \subset F$) ветвей в графе $G = (X, F)$, которые превращают его при удалении S в на не связанных между собой связанных графа: $G_1(X_1, F_1)$ и $G_2(X_2, F_2)$. Причем сечение S можно представить в виде суммы двух сечений $S = S_1 \vee S_2$, где $S_1 \wedge S_2 = \emptyset$ и если $(\alpha, \beta) \in S_1$, то $\alpha \in X_1, \beta \in X_2$. Аналогично, если $(\alpha, \beta) \in S_2$, то $\alpha \in X_2, \beta \in X_1$. Тогда справедлива следующая теорема

$$\sum_{i,j \in S_1} P(i,j)P_i = \sum_{k,l \in S_2} P(k,l)P_k \quad (5)$$

Граф, представленный на рис 2. и описывающий поведение управляющей ВС при описанных допущениях о потоках и дисциплине обслуживания, может иметь следующие сечения:

1. $S_1 = \{(0,0;0,1), (1,1;0,0)\}$. В этом случае с помощью теоремы (5) получим соотношение $P_{00}\lambda = P_{11}\mu$; $P_{11} = [(\lambda/\mu)]P_{00}$.

2. Сечение 2: $S_2 = \{(0,1;0,2), (1,1;0,0), (1,1;0,0)\}$; В этом случае получаем

$$\begin{aligned} P_{01}\lambda + P_{01}\mu &= P_{11}\mu; \\ P_{01} &= [\mu/(\lambda + \mu_1)]P_{11}. \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая (6), найдем

$$P_{01} = [\mu/(\lambda + \mu_1)]P_{11} \quad (7)$$

3. $S_3 = \{(0,k;0,k+1), (1,k;1,k+1), (1,k+1;1,k)\}$ для $k = 1, 2, 3, \dots$

из которого с помощью (5) получаем

$$\begin{aligned} \lambda P_{0k} + \lambda P_{1k} &= P_{1k+1}\mu, \\ P_{1,k+1} &= (\lambda/\mu)(P_{0k} + P_{1k}), \text{ где } k = 1, 2, \dots, r, \end{aligned} \quad (8)$$

4. Сечение S'_2 дает выражение, аналогичное S_2 для произвольного $k = 1, 2, \dots, r$, в чем легко можно убедиться, для чего применим к

$$S'_2 = \{(0,k+1;0,k+2), (0,k+1;1,k+1),$$

$(1,k;1,k+1), (1,k+1;1,k)\}$ теорему (5)

$$\begin{aligned} \lambda P_{0,k+1} + \mu P_{0,k+1} + \lambda P_{1k} &= P_{1,k+1}\mu; \\ P_{0,k+1} &= [\mu/(\lambda + \mu_1)](P_{1k+1} - [\lambda/(\lambda + \mu_1)]P_{1k}) \end{aligned} \quad (9)$$

и, подставив в последнее выражение P_{1k+1} , полученное из (8), значение после преобразований находим $P_{0k+1} = [\lambda/(\lambda + \mu_1)]P_{0k}, k = 1, 2, \dots, r$, где (9) применяя последовательно k раз, получим

$$P_{0k} = \lambda/(\lambda + \mu_1)P_{00}, \text{ или } P_{0k} = a^k P_{00}; \quad (10)$$

где $a = \lambda/(\lambda + \mu_1)$

Применяя же k раз (8) с учетом (6), (7) и (10), находим

$$\begin{aligned} P_{1k} &= \rho^k [(1 - \alpha^k)/(1 - \alpha)]P_{00} \\ (k = 1, 2, \dots, r + 1), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\rho = \lambda/\mu, \alpha = \mu/(\lambda + \mu_1)$.

Подставив значение $P_{0k} (k = 0, 1, 2, \dots)$ и $P_{1k} (k = 1, 2, \dots)$ в условие нормировки, после преобразований находим

$$P_{00} = (1 - a)(1 - \rho) \quad (12)$$

Подставив (12) в (10) и (11) окончательно получим

$$P_{0k} = a^k (1 - a)(1 - \rho), (k = 0, 1, 2, \dots, r)$$

$$\begin{aligned} P_{1k} &= \rho^k [(1 - \alpha^k)/(1 - \alpha)](1 - a)(1 - \rho), \\ (k = 1, 2, \dots, r + 1). \end{aligned}$$

Зная распределение стационарных вероятностей пребывания системы в различных состояниях, с помощью теоремы (5) можем определить среднее время ожидания, начала обслуживания заявок внешнего потока как $\bar{w} = \bar{k}/\lambda$, где \bar{k} — среднее число заявок в очереди r , определяемое следующим образом:

$$\bar{k} = \sum_{k=1}^r kP_{0k} + \sum_{k=1}^{r+1} (k-1)P_{1k} \quad (13)$$

При $r = \infty$ получим следующее выражение для \bar{k}

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \frac{a}{(1-a)} + \frac{\rho_2}{(1-\rho)}, \quad \bar{k} = \rho/(1-\rho) \\ \text{где } a &= \lambda/(\lambda + \mu_1). \end{aligned} \quad (14)$$

Подставив его в \bar{w} найдем

$$\bar{w} = (1/\mu_1) + (1/\mu) \cdot \rho/(1-\rho), \rho = \lambda/\mu. \quad (15)$$

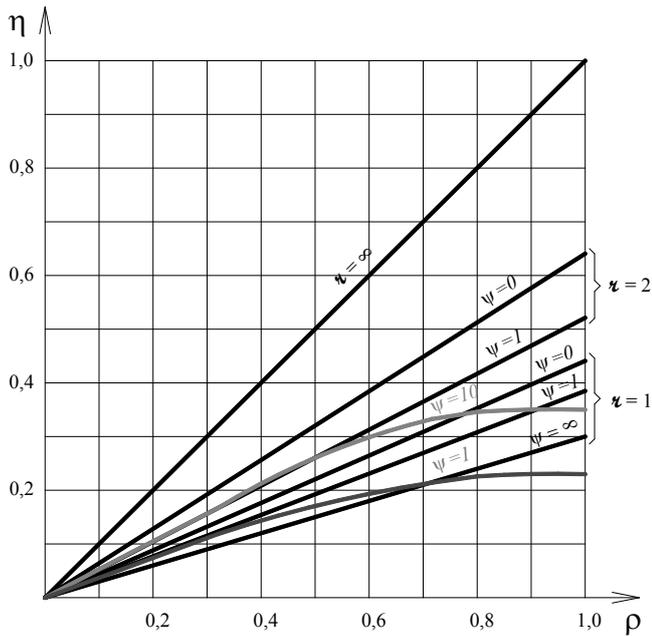


Рис. 3. График зависимости η от P_{00}

Кривые ————— получены для пуассоновского потока, ————— для регулярного потока.

Если время обслуживания заявок внутреннего потока равно нулю, т.е. $\mu_1 = \infty$ (это равносильно тому, что нет заявок внутреннего потока), то $a = 0$, а потому получим $\bar{w} = \rho / [\mu(1 - \rho)]$, $\bar{k} = \rho^2 / (1 - \rho)$, т.е. известные [1, 3, 2] формулы для вычислений времени ожидания начала обслуживания и средней длины очереди, если на вход обслуживающего прибора поступает один пуассоновский поток и имеет место дисциплина выбора из очереди «первый пришел — первый обслуживается». Прибор не все время обслуживает заявки внутреннего потока, часть времени (производительной мощности) расходуется на обслуживание заявок внешнего потока, а потому среднее время обслуживания одной заявки внутреннего потока \bar{t}_r будет отличаться от величины μ_1^{-1} . Определим \bar{t}_r через вероятность занятости прибора обслуживания заявок внутреннего потока интенсивность их обслуживания:

$$\bar{t}_r = (\mu \sum_{k=1}^{\infty} P_{ok})^{-1}.$$

Коэффициент снижения производительность η процессора (производительность будем понимать в ранее определенном смысле) вычисляется следующим образом:

$$\eta = \frac{(\bar{t}_r - \mu_1^{-1})}{\bar{t}_r} = 1 - \sum_{k=0}^r P_{ok} \quad (16)$$

Подставив в \bar{t}_r и η значения $P_{ok}(k = 0, 1, 2, \dots, r)$, получим после упрощений $\bar{t}_r = 1 / \mu(1 - \rho)$, $\eta = \rho$.

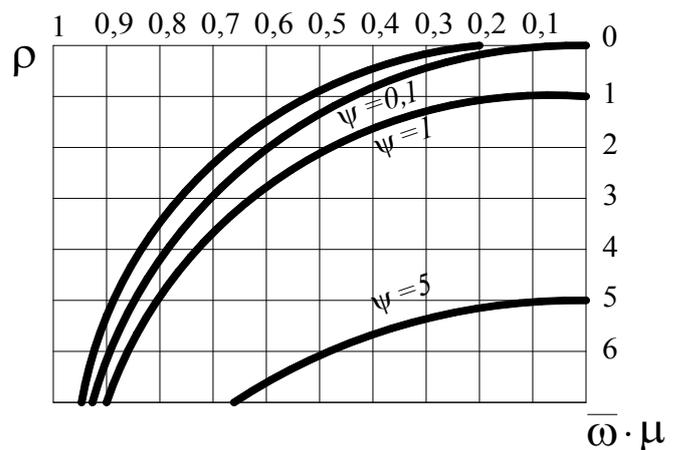


Рис. 4. Средняя длительность ожидания

Учитывая ограниченность длины очереди, выражение для P_{00} будем искать в виде

$$P_{00} = \frac{(1-a)(1-\rho)(\rho-a)}{\rho-a+a^{r+2}(1-\rho)-\rho^{r+2}(1-a)}. \quad (17)$$

При $r = 0$ мы получим $P_{00} = 1$. Это значит, что если очередь для накопления заявок внешнего потока отсутствует, то обслуживаться всегда будут заявки внутреннего потока. Отметим довольно простые выражения для P_{00} при

$$r = 1, 2; P_{00} | r = 1 = \frac{1}{1+a+\rho};$$

$$P_{00} | r=2 = 1/[1 + \rho + \rho^2 + a(1 + a + \rho)].$$

которые помогут при построении графика зависимости P_{00} от длины очереди и интенсивности потока требований, поступающих от внешнего источника. (рис. 3.) Среднее время обслуживания заявок внутреннего потока при этом равно

$$\bar{t}_{rcp} = (1-a)P_{00} / [\mu_1(1-a)^{r+1}] \quad (18)$$

Тогда относительное снижение производительности обслуживания прибора будет

$$\eta = 1 - [1 + \frac{\lambda}{\mu_1} (1-a^r)] P_{00} \quad (19)$$

График изменения P_{00} и $\eta = \eta(\lambda, \mu, \mu_1, r)$, показанные на рис. 4 для $r = 1, 2$ и $r = \infty$ при фиксированных значениях отношений $\psi = \mu / \mu_1$, равных 0,1 и ∞ , позволяют сделать ряд **выводов**:

1. При увеличении емкости внешнего накопителя уменьшается степень загрузки процессора вычислительными операциями и вероятность потери информации.

2. При $r \rightarrow \infty$ относительное снижение производительности стремится к величине загрузки процессора обслуживанием внешних заявок, т.е. $\eta \rightarrow \rho$.

На рисунке 3, 4 показана зависимость времени ожидания от величины ρ при фиксированных значениях отношения $\psi = \mu / \mu_1$ и сравниваются кривые при дисциплинах обслуживания: относительных и абсолютных приоритетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко. Б.В., Коволенко. И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. — 2-е изд. — М: наука, 1987.-336 с.
2. Алгоритмы и программы решения задач на графах и сетях./ Нечепуренко. М.И., Попков. В.И. и др. — Новосибирск: Наука. Сибирское. отделение, 1990. — 515 с.
3. Медведев. Г. А. Анализ стохастических графов, описывающих поведения шаговых систем автоматического поиска // Автоматика и вычислительная техника, 1978, — N4 — с 15–24
4. Кендалл. Д. Стохастические процессы, встречающиеся в теории очередей и их анализ методом вложенных цепей Маркова: Математика. — М: ИЛ, 1969 г. с 3–22 (сб. переводов).

© Мусаев Мухаммаджон Усарович (elyor.musayev1978@mail.ru).

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»

