

# О НЕКОТОРЫХ МНОГОГРАННИКАХ КОНЕЧНОГО ОБЪЁМА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

## ON SOME POLYHEDRA OF FINITE VOLUME IN LOBACHEVSKY SPACE

*A. Muzyka*

*Summary.* The work found all crystallographic groups of reflections in Lobachevsky spaces of dimensions 3 and 4, the fundamental polyhedra of which satisfy the following geometric conditions:

1. any two faces of the highest dimension of the fundamental polyhedron  $M$  intersect along a face of codimension one or at a point at infinity;
2. all dihedral angles of the polyhedron  $M$  are equal to  $90^\circ$ ,  $60^\circ$  and  $0^\circ$  (the angle between faces intersecting at a point at infinity)

Polyhedra are depicted using Gram graphs. The complete list of such polyhedra contains 16 polyhedra, all of them are non-compact, all polyhedra with exception of two are pyramids.

*Keywords:* vertex at infinity, face, Gram's graphs.

**Музыка Александр Андреевич**

аспирант, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «МИРЭА — Российский технологический университет»  
vispoftheblayor@gmail.com

*Аннотация.* В работе найдены все кристаллографические группы отражений в пространствах Лобачевского размерностей 3 и 4, фундаментальные многогранники которых удовлетворяют следующим геометрическим условиям:

1. любые две грани старшей размерности фундаментального многогранника  $M$  пересекаются по грани коразмерности единица или в бесконечно удалённой точке;
2. все двугранные углы многогранника  $M$  равны  $90^\circ$ ,  $60^\circ$  и  $0^\circ$  (угол между гранями, пересекающимися в бесконечно удалённой точке).

Многогранники изображаются с помощью графов Грама. Полный список таких многогранников содержит 16 многогранников, все они некомпактны, все многогранники за исключением двух являются пирамидами.

*Ключевые слова:* бесконечно удалённая вершина, грань, графы Грама.

### Введение

Классификация дискретных групп движений пространств постоянной кривизны, порождённых отражениями относительно гиперплоскостей, эквивалентна задаче описания фундаментальных многогранников таких групп. Дискретная группа, порождённая отражениями относительно гиперплоскостей пространства Евклида или Лобачевского, называется кристаллографической, если её фундаментальный многогранник имеет конечный объём, т.е. является выпуклой оболочкой конечного числа точек, некоторые из которых — в случае пространства Лобачевского — могут быть бесконечно удалёнными. Если бесконечно удалённых вершин нет, то данная группа называется кристаллографической группой компактного типа, иначе — некомпактного типа.

В данной работе перечисляются все кристаллографические группы отражений в размерностях 3 и 4 пространства Лобачевского, фундаментальные многогранники которых удовлетворяют следующим геометрическим условиям:

1. любые две грани старшей размерности фундаментального многогранника  $M$  пересекаются по грани коразмерности единица или в бесконечно удалённой точке
2. все двугранные углы многогранника равны 0, 60 или 90 градусов (под двугранным углом 0 градусов понимается угол между гранями, сходящимися в бесконечно удалённой точке).

Полный список многогранников, удовлетворяющих данным условиям, был получен автором на ЭВМ. Он содержит 16 многогранников, 14 из них являются пирамидами. Каждому многограннику каноническим образом сопоставляется некоторая чётная гиперболическая решётка.

Приведём формулировку основного результата работы.

### Теорема 0.1

Ниже перечислен полный список графов Грама многогранников конечного объёма в пространствах Лобачевского размерностей 3 и 4, удовлетворяющих условиям 1) и 2). Вершины на графах Грама соответствуют граням старшей размерности, вес ребра обозначает угол между соответствующими гранями. Если ребро имеет вес 0 (отсутствует), соответствующие грани ортогональны, если ребро имеет вес 1 (вес над ребром не обозначается), соответствующие грани образуют угол 60 градусов, если ребро имеет вес 2, соответствующие грани пересекаются в бесконечно удалённой точке. В графах Грама многогранников, не являющихся пирамидами, (изображены в левых верхних углах рисунков 1 и 2) все рёбра с ненулевым весом имеют вес 2.

Статья является продолжением работы [1] М.Н. Прохорова, в ней используются те же алгоритм, формулы, терминология и обозначения.

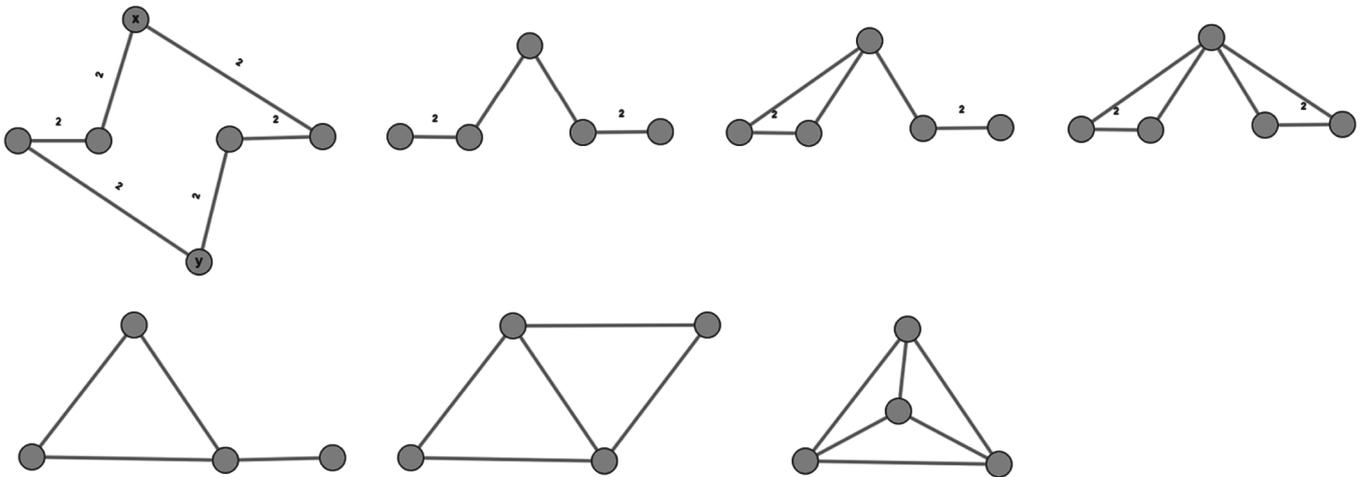


Рис. 1. Графы Грама многогранников размерности 3

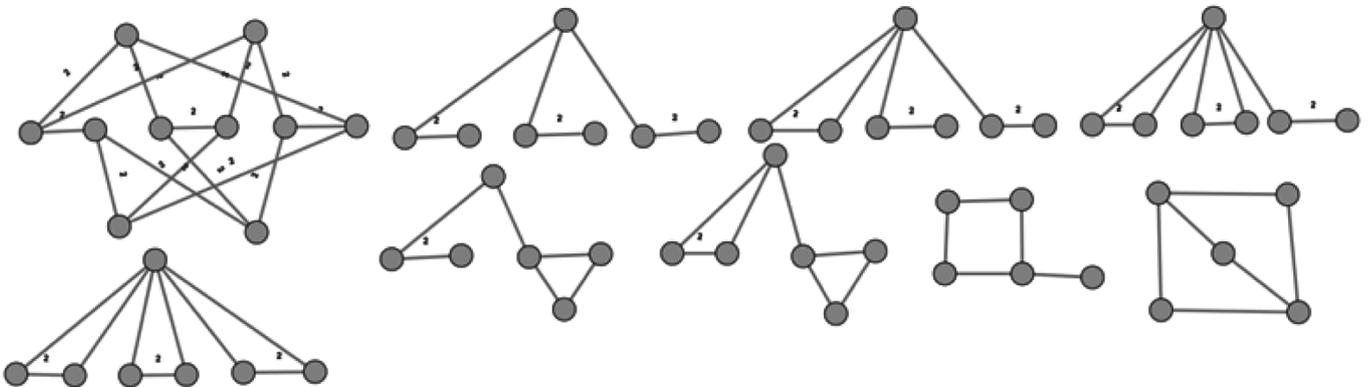


Рис. 2. Графы Грама многогранников размерности 4

1. Обозначения и терминология.

Далее решёткой называется свободный  $\mathbb{Z}$ -модуль с заданной на нём невырожденной целочисленной симметрической билинейной формой со значениями  $\mathbb{Z}$ .

Значение билинейной формы решётки  $S$  на паре элементов  $x, y \in S$  будем обозначать  $x * y$ , и  $x^2 = x * x$ .

Всякий элемент  $\delta \in S$ , такой, что  $\delta^2 = -2$  определяет автоморфизм  $\Gamma_\delta : x \rightarrow x + (x * \delta)\delta, x \in S$ , решётки  $S$ , тождественный на  $(\delta)^\perp_S$  и переводящий  $\delta$  в  $-\delta$ . Он называется 2-отражением.

Обозначим  $\Delta(S)$  множество элементов с квадратом  $(-2)$  решётки  $S$ , а через  $W(S)$  — подгруппу группы всех автоморфизмов  $O(S)$  решётки  $S$ , порождённую всеми 2-отражениями относительно элементов  $\Delta(S)$ . Группа  $W(S)$  называется группой 2-отражений  $S$ .

Решётка  $S$  называется эллиптической, если билинейная форма квадратичного пространства  $S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ , индуцированная формой решётки  $S$ , отрицательно определена.

Решётка  $S$  называется параболической, если форма  $S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  имеет ровно один нулевой квадрат, остальные — отрицательные.

Решётка  $S$  называется гиперболической, если форма  $S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  имеет ровно один положительный квадрат, остальные — отрицательные.

Решётка  $S$  называется чётной, если  $x^2 = 0 \pmod{2}$  для любого  $x \in S$ .

Решётка  $S$  называется 2-рефлективной, если  $O(S) / W(S)$  — конечная группа.

Всякой кристаллографической группе, фундаментальный многогранник которой удовлетворяет условиям 1) и 2) (далее такая группа называется кристаллографической) каноническим образом ставится в соответствие чётная гиперболическая 2-рефлективная решётка, подгруппой группы автоморфизмов которой является данная кристаллографическая группа, следующим образом. Пусть  $f(x) = x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2$  невырожденная квадратичная форма индекса инерции единица в векторном пространстве  $V$  размерности  $n + 1$ .

Положим

$$K(f) = \{x \in V \mid x^2 > 0, x_0 > 0\}$$

Тогда  $K(f)$  — пара положительного конуса. Пусть  $L^n = K(f) / \mathbb{R}^+$  соответствующее пространство Лобачевского размерности  $n$ , получающееся факторизацией  $K(f)$  по  $\mathbb{R}^+v, v \in K(f)$ . Для  $\delta \in V$  обозначим  $H_\delta = \{x \in V \mid x * \delta = 0\}$  гиперплоскость в пространстве  $V$ , ортогональную  $\delta, H_\delta^+ = \{x \in V \mid x * \delta \leq 0\}$  — соответствующее полупространство,  $\overline{H_\delta}, \overline{H_\delta^+}$  их образы в  $L^n$ . Тогда всякий многогранник  $M$  в  $L^n$  является пересечением полупространств  $\overline{H_{e_i}^+}$  для некоторой совокупности векторов  $e_i, e_i^2 < 0$ . Рассмотрим некоторый кристаллографический многогранник, удовлетворяющий условиям 1) и 2). Сопоставим ему множество всех векторов  $\delta_i \in V$ , ортогональных его граням старшей размерности, направленных наружу и нормированных условием  $\delta_i^2 = -2$ . Тогда из условий, которым удовлетворяет многогранник, следует, что  $\delta_i * \delta_j$  равно 0, 1 или 2 в зависимости от того, равен ли двугранный угол между  $\overline{H_{\delta_i}}$  и  $\overline{H_{\delta_j}}$   $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$  или 0, соответственно. Система векторов  $\delta_i$  определяет некоторую чётную гиперболическую решётку  $S$ . Отражения относительно  $\delta_i$  являются автоморфизмами решётки  $S$  и порождают подгруппу  $W(\delta_i)$  группы всех автоморфизмов решётки  $O(S)$ . Известно [1], что фундаментальный многогранник группы всех автоморфизмов решётки  $S$  имеет конечный объём. В силу конечности объёма искомого многогранника, удовлетворяющего условиям 1) и 2) (далее для краткости будем называть такие многогранники «искомыми»), получаем башню  $W(\delta_i) \subset W(S) \subset O(S)$  с конечными этажами. Следовательно, так построенная решётка  $S$  является чётной гиперболической 2-рефлективной решёткой, для которой наша кристаллографическая группа является подгруппой группы  $W(S)$  всех 2-отражений решётки  $S$ . Как следствие имеем, что любой искомым многогранник сложен из фундаментальных многогранников для группы  $W(S)$  для некоторой решётки  $S$ .

Пусть задан фундаментальный многогранник  $P$  для группы отражений в пространстве Лобачевского,  $\delta_i \in V^{1,n}, \delta_i^2 = -2$  — множество всех векторов, ортогональных  $(n-1)$ -граням  $P$  и направленных наружу. Граф Грама многогранника  $P$  будем называть схемой многогранника  $P$ . Схеме  $S$  соответствует матрица Грама  $A(S)$  системы векторов  $\delta_i$ . Схема  $S$  называется отрицательно определённой (эллиптической), полупределённой или неопределённой, если таковой является соответствующая ей матрица  $A(S)$ .

В работе [2] Э.Б. Винберга приведён критерий конечности объёма невырожденного неразложимого выпуклого многогранника  $P$  в  $n$ -мерном пространстве Лобачевского. Для нашего случая этот критерий можно сформулировать так:

**Теорема 1.1 (Винберг[2])**

Пусть  $P$  фундаментальный многогранник для группы отражений в пространстве Лобачевского размерности  $n$ ,  $\{\delta_i \mid \delta_i^2 = -2\}$  — множество векторов, ортогональных  $(n-1)$ -граням  $P$ , направленных наружу и удовлетворяющих условию  $\delta_i * \delta_j = 0, \delta_i * \delta_j = 1$  или  $\delta_i * \delta_j = 2$  для всех  $i, j$ . Многогранник  $P$  имеет конечный объём тогда и только тогда, когда всякая связная параболическая подсхема в схеме многогранника  $P$  содержится в единственной параболической подсхеме ранга  $(n-1)$ .

**2. Используемые формулы и алгоритм**

В работе [1] была получена удобная для решения рассматриваемой задачи формула произведения векторов в псевдоевклидовом пространстве  $V^{1,n}$  сигнатуры  $(1,n)$ .  $L^n$  — пространство Лобачевского, ассоциированное с этим псевдоевклидовым пространством. Рассмотрим многогранный конус  $P$  в  $L^n$  с вершиной в бесконечно удалённой точке  $[c]$ , где  $c^2 = 0$ . Пусть схема  $T$  многогранника  $P$  имеет вид  $\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2 \cup \dots \cup \tilde{R}_m$ , где  $R_i$  — стандартный граф Дынкина типа  $A_1, B_1, \dots, F_4$  или  $G_2$ ,  $\tilde{R}_i$  — соответствующий пополненный граф Дынкина,  $rg R_i = r_i, \sum_{i=1}^m r_i = n-1$ . Пусть  $e_1^i, e_2^i, \dots, e_{r_i+1}^i$  — соответствующая  $\tilde{R}_i$  система векторов в  $V^{1,n}$ ,  $e_1^i, e_2^i, \dots, e_{r_i}^i$  соответствует  $R_i$ .

Всякие  $x, y \in V^{1,n}$  с  $x * c \neq 0, y * c \neq 0$  однозначно определяются строками

$$k_1^1, \dots, k_{r_1+1}^1; k_1^2, \dots, k_{r_2+1}^2; \dots; k_1^m, \dots, k_{r_m+1}^m; x^2, \\ l_1^1, \dots, l_{r_1+1}^1; \dots, l_{r_m+1}^m; y^2, \text{ где } k_j^i = x e_j^i, l_j^i = y e_j^i.$$

Пусть  $A = \frac{x * c}{y * c}$ , тогда верна следующая формула:

$$x * y = \left( \frac{x^2}{2A} + \frac{y^2}{2} A \right) + S_1 + \dots + S_m$$

где

$$S_p = \sum_{i < j} \left( k_i^p l_j^p + k_j^p l_i^p - \frac{k_i^p k_j^p}{A} - l_i^p l_j^p * A \right) (s_i^p * s_j^p),$$

матрицы  $G^p = (s_i^p * s_j^p)$  соответствуют компонентам  $R_p, p = 1, \dots, m$ .

В работе [1] приводится алгоритм для получения кристаллографических многогранников, все двугранные углы которых равны 60 или 90 градусов. Модифицированная версия этого алгоритма применима в нашем случае. В исходном алгоритме требуется, чтобы скалярное произведение векторов принимало значения 0 или 1 (соответственно, грани пересекались под углами 60 или 90 градусов). В нашем случае скалярное произведение также может принимать значение 2 (возможен угол 0 градусов). Пусть  $P$  — искомый кристаллографический многогранник, удовлетворяющий условиям в  $L^n$ ,  $v$  — его бесконечно удалённая вершина (всякий искомый многогранник содержит бесконечно удалённую вершину [1]). Если существует единственная  $(n - 1)$ -грань многогранника  $P$ , не проходящая через вершину  $v$ , то  $P$  — пирамида с вершиной  $v$ . Иначе имеются по крайней мере 2 грани старшей размерности, пересекающие рёбра многогранника  $P$ , выходящие из вершины  $v$ . С учётом этого мы будем использовать следующий порядок действий.

1) Фиксируем параболическую схему  $T$  ранга  $n - 1$ , соответствующую бесконечно удалённой вершине  $v$ .

2) Перечисляем все пирамиды конечного объёма с вершиной  $v$ .

3) Выбираем в  $E^{1,n}$  векторы  $x, y$ , такие, что  $x^2 = y^2 = -2$ ; если  $T_0 \subset T$  произвольная связная параболическая подсхема ранга  $k$ , то дополнительно требуем, чтобы нашлись эллиптические подсхемы  $T_1, T_2 \subset T_0$  ранга  $k$ , такие, что подсхемы  $T_1 U_x, T_1 U_y$  полуопределены (здесь  $T_1 U_x$  обозначает схему, порождённую всеми  $\delta_i \in T_1$  и  $x$ ); требуем, чтобы  $x * y$  принимало значения 0, 1 и 2. Такую пару  $x, y$  будем называть «допустимой», соответственно векторы — «допустимыми». Ищем максимальное множество  $x_1, \dots, x_m \in E^{1,n}$ , где  $x_i, x_j$  — допустимая пара для любых  $i, j$ . Если такое множество найдено, проверяем, является ли  $T \cup x_1, \dots, x_m$  схемой искомого многогранника.

Действия 1)–3) применяются для всех рассматриваемых типов бесконечно удалённых вершин.

**3. Случай  $\tilde{A}_{n-1}$**

Пусть конус  $P$  в  $L^n$  имеет бесконечно удалённую вершину типа  $\tilde{A}_{n-1}$ . Тогда  $xu = -A - \frac{1}{A} + S$ , где  $x = (k_1, \dots, k_n; -2), y = (l_1, \dots, l_n; -2)$ ,

$$A = \frac{k_1 + \dots + k_n}{l_1 + \dots + l_n}$$

$$S = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( -\frac{k_i k_j}{A} - l_i l_j * A + k_i l_j + l_i k_j \right) \frac{(j - i)(n - j + i)}{2n}$$

Всякая эллиптическая подсхема ранга  $n - 1$  схемы  $\tilde{A}_{n-1}$  имеет тип  $A_{n-1}$ . Из комбинаторных соображений, используя список полуопределённых подсхем типов  $A_i, D_i, E_i, \tilde{A}_i, \tilde{D}_i, \tilde{E}_i$ , получаем, что вектор  $x$  — допустимый, если и только если имеет один из следующих типов:

$$l = (0, 0, 1), l = (0, 1, 1), l = (1, 1, 1), l = (0, 0, 2), \text{ при } n = 3$$

$$l = (0, 2, 1), l = (2, 1, 1)$$

$$l = (0, 0, 0, 1), l = (0, 0, 1, 1), l = (0, 1, 0, 1), l = (0, 1, 1, 1),$$

$$l = (0, 0, 0, 2), l = (0, 0, 2, 1), l = (0, 2, 0, 1), l = (0, 1, 2, 1),$$

$$l = (0, 2, 1, 1) \text{ при } n = 4$$

$$l = (0, 1), l = (0, 2), l = (1, 1), l = (1, 2), l = (2, 2) \text{ при } n = 2.$$

Приведём значения  $S$  и  $A$  для  $n = 2, 3, 4$ . Стараемся исключить повторения, обусловленные симметрией диаграмм  $\tilde{A}_k$ .

Таблица 1.

(Диаграмма  $\tilde{A}_i$ )

x	y	A	S	x	y	A	S
(1,0)	(1,0)	1	0	(1,1)	(2,2)	$\frac{1}{2}$	0
(1,0)	(1,1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	(2,0)	(2,0)	1	0
(1,0)	(2,0)	$\frac{1}{2}$	0	(2,0)	(1,2)	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
(1,0)	(1,2)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	(2,0)	(0,2)	1	1
(1,0)	(0,1)	1	$\frac{1}{4}$	(2,0)	(2,1)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
(1,0)	(0,2)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	(2,0)	(2,2)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
(1,0)	(2,1)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	(1,2)	(1,2)	1	0
(1,0)	(2,2)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	(1,2)	(2,1)	1	$\frac{1}{4}$
(1,1)	(1,1)	1	0	(1,2)	(2,2)	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{12}$
(1,1)	(2,0)	1	$\frac{1}{4}$	(2,2)	(2,2)	1	0
(1,1)	(1,2)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{24}$				

Таблица 2.

(Диаграмма  $\tilde{A}_2$ )

x	y	A	S	x	y	A	S
(1,0,0)	(1,1,0)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	(1,1,0)	(2,1,1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
(1,0,0)	(1,1,1)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	(1,1,0)	(0,0,2)	1	1
(1,0,0)	(2,0,0)	$\frac{1}{2}$	0	(1,1,0)	(2,0,1)	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{18}$
(1,0,0)	(1,2,0)	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	(1,1,1)	(2,0,0)	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$
(1,0,0)	(1,1,2)	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{12}$	(1,1,1)	(1,2,0)	1	$\frac{1}{3}$
(1,0,0)	(0,1,0)	1	$\frac{1}{3}$	(1,1,1)	(1,1,2)	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{12}$
(1,0,0)	(0,1,1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	(2,0,0)	(1,2,0)	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$
(1,0,0)	(0,2,0)	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	(2,0,0)	(1,1,2)	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{6}$
(1,0,0)	(0,1,2)	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{9}$	(2,0,0)	(0,2,0)	1	$\frac{4}{3}$
(1,0,0)	(2,1,1)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	(2,0,0)	(0,1,2)	$\frac{2}{3}$	$\frac{14}{9}$
(1,0,0)	(2,0,1)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	(2,0,0)	(2,1,1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
(1,1,0)	(1,1,1)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	(2,0,0)	(2,0,1)	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$
(1,1,0)	(2,0,0)	1	$\frac{1}{3}$	(1,2,0)	(1,1,2)	$\frac{3}{4}$	$\frac{31}{36}$
(1,1,0)	(1,2,0)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{18}$	(1,2,0)	(0,1,2)	1	1
(1,1,0)	(1,1,2)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	(1,2,0)	(2,1,1)	$\frac{3}{4}$	$\frac{19}{36}$
(1,1,0)	(0,1,1)	1	$\frac{1}{3}$	(1,2,0)	(1,2,1)	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{36}$
(1,1,0)	(0,1,2)	$\frac{2}{3}$	$\frac{13}{18}$	(1,1,2)	(2,1,1)	1	$\frac{1}{3}$

Таблица 3.

(Диаграмма  $\tilde{A}_3$ )

x	y	A	S	x	y	A	S
(1,0,0,0)	(1,1,0,0)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}$	(1,0,0,0)	(0,1,0,0)	1	$\frac{3}{8}$
(1,0,0,0)	(1,0,1,0)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	(1,0,0,0)	(0,1,1,0)	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{16}$

x	y	A	S	x	y	A	S
(1,0,0,0)	(1,1,1,0)	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{24}$	(1,0,0,0)	(0,1,0,1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
(1,0,0,0)	(2,0,0,0)	$\frac{1}{2}$	0	(1,0,0,0)	(0,1,1,1)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
(1,0,0,0)	(1,2,0,0)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	(1,0,0,0)	(0,2,0,0)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
(1,0,0,0)	(1,0,2,0)	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	(1,0,0,0)	(0,1,2,0)	$\frac{1}{3}$	$\frac{9}{8}$
(1,0,0,0)	(1,1,2,0)	$\frac{1}{4}$	$\frac{27}{32}$	(1,0,0,0)	(0,1,0,2)	$\frac{1}{3}$	$\frac{19}{24}$
(1,0,0,0)	(1,2,1,0)	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	(1,0,0,0)	(0,1,1,2)	$\frac{1}{4}$	$\frac{35}{32}$
(1,0,0,0)	(0,1,2,1)	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	(1,1,0,0)	(2,0,0,1)	$\frac{2}{3}$	$\frac{9}{16}$
(1,0,0,0)	(0,0,1,0)	1	$\frac{1}{2}$	(1,1,0,0)	(1,2,0,1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}$
(1,0,0,0)	(0,0,2,0)	$\frac{1}{2}$	1	(1,0,1,0)	(0,1,0,1)	1	$\frac{1}{2}$
(1,0,0,0)	(0,0,1,2)	$\frac{1}{3}$	1	(1,0,1,0)	(0,1,1,1)	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{12}$
(1,0,0,0)	(2,0,1,0)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	(1,0,1,0)	(1,1,1,0)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
(1,0,0,0)	(2,0,1,1)	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{32}$	(1,0,1,0)	(2,0,0,0)	1	$\frac{1}{2}$
(1,0,0,0)	(1,1,0,1)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	(1,0,1,0)	(0,2,0,0)	1	1
(1,0,0,0)	(2,0,0,1)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	(1,0,1,0)	(1,2,0,0)	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$
(1,0,0,0)	(1,2,0,1)	$\frac{1}{4}$	$\frac{19}{32}$	(1,0,1,0)	(0,1,2,0)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
(1,0,0,0)	(2,1,0,1)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	(1,0,1,0)	(1,0,2,0)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
(1,1,0,0)	(1,0,1,0)	1	$\frac{3}{8}$	(1,0,1,0)	(0,2,0,1)	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$
(1,1,0,0)	(1,1,1,0)	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{48}$	(1,0,1,0)	(1,1,2,0)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}$
(1,1,0,0)	(2,0,0,0)	1	$\frac{3}{8}$	(1,0,1,0)	(0,1,1,2)	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{16}$
(1,1,0,0)	(1,2,0,0)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{16}$	(1,0,1,0)	(1,2,1,0)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
(1,1,0,0)	(1,0,2,0)	$\frac{2}{3}$	$\frac{43}{48}$	(1,0,1,0)	(0,1,2,1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
(1,1,0,0)	(1,1,2,0)	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{16}$	(1,1,1,0)	(2,0,0,0)	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{12}$

x	y	A	S	x	y	A	S
(1,1,0,0)	(1,2,1,0)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	(1,1,1,0)	(1,2,0,0)	1	$\frac{3}{8}$
(1,1,0,0)	(0,1,1,0)	1	$\frac{1}{2}$	(1,1,1,0)	(1,0,2,0)	1	$\frac{3}{8}$
(1,1,0,0)	(0,1,1,1)	$\frac{2}{3}$	$\frac{35}{48}$	(1,1,1,0)	(1,1,2,0)	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{96}$

Таблица 4.

(Диаграмма  $\tilde{A}_3$ ).

x	y	A	S	x	y	A	S
(1,1,0,0)	(0,2,0,0)	1	$\frac{3}{8}$	(1,1,1,0)	(0,1,1,1)	1	$\frac{3}{8}$
(1,1,0,0)	(0,1,2,0)	$\frac{2}{3}$	$\frac{17}{16}$	(1,1,1,0)	(0,2,0,0)	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$
(1,1,0,0)	(0,1,1,2)	$\frac{1}{2}$	$\frac{19}{16}$	(1,1,1,0)	(0,1,2,0)	1	$\frac{1}{2}$
(1,1,0,0)	(0,1,2,1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	(1,1,1,0)	(0,1,0,2)	1	1
(1,1,0,0)	(0,0,1,1)	1	1	(1,1,1,0)	(0,1,1,2)	$\frac{3}{4}$	$\frac{83}{96}$
(1,0,0,0)	(0,1,2,1)	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	(1,1,0,0)	(2,0,0,1)	$\frac{2}{3}$	$\frac{9}{16}$
(1,1,0,0)	(0,0,2,0)	1	$\frac{11}{8}$	(1,1,1,0)	(0,1,2,1)	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{12}$
(1,1,0,0)	(0,0,1,2)	$\frac{2}{3}$	$\frac{25}{16}$	(1,1,1,0)	(1,0,1,1)	1	$\frac{1}{2}$
(1,1,0,0)	(2,0,1,0)	$\frac{2}{3}$	$\frac{19}{48}$	(1,1,1,0)	(0,0,1,2)	1	$\frac{11}{8}$
(1,1,0,0)	(2,0,1,1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{16}$	(1,1,1,0)	(2,0,1,1)	$\frac{3}{4}$	$\frac{59}{96}$
(1,1,1,0)	(1,2,1,0)	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{12}$	(1,2,0,0)	(0,1,1,2)	$\frac{3}{4}$	$\frac{57}{32}$
(1,1,1,0)	(1,0,1,2)	$\frac{3}{4}$	$\frac{13}{12}$	(1,2,0,0)	(0,1,2,1)	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{4}$
(1,1,1,0)	(0,0,0,2)	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	(1,2,0,0)	(0,0,1,2)	1	$\frac{5}{2}$
(1,1,1,0)	(2,0,0,1)	1	1	(1,2,0,0)	(2,0,1,0)	1	1
(1,1,1,0)	(0,2,0,1)	1	$\frac{1}{2}$	(1,2,0,0)	(2,0,1,1)	$\frac{3}{4}$	$\frac{49}{32}$
(1,1,1,0)	(1,2,0,1)	$\frac{3}{4}$	$\frac{35}{96}$	(1,2,0,0)	(1,0,1,2)	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{4}$

x	y	A	S	x	y	A	S
(2,0,0,0)	(0,2,0,0)	1	$\frac{3}{2}$	(1,2,0,0)	(0,2,0,1)	1	$\frac{3}{8}$
(2,0,0,0)	(0,1,2,0)	$\frac{2}{3}$	$\frac{9}{4}$	(1,2,0,0)	(1,2,0,1)	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{32}$
(2,0,0,0)	(0,1,0,2)	$\frac{2}{3}$	$\frac{19}{12}$	(1,2,0,0)	(2,1,0,1)	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
(2,0,0,0)	(0,1,1,2)	$\frac{1}{2}$	$\frac{35}{16}$	(1,2,0,0)	(1,0,0,2)	1	2
(2,0,0,0)	(0,1,2,1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	(1,0,2,0)	(1,1,2,0)	$\frac{3}{4}$	$\frac{19}{96}$
(2,0,0,0)	(0,0,2,0)	1	2	(1,0,2,0)	(1,2,1,0)	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{12}$
(2,0,0,0)	(0,0,1,2)	$\frac{2}{3}$	2	(1,0,2,0)	(0,1,0,2)	1	$\frac{11}{8}$
(2,0,0,0)	(2,0,1,0)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	(1,0,2,0)	(0,1,1,2)	$\frac{3}{4}$	$\frac{91}{96}$
(2,0,0,0)	(2,0,1,1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{16}$	(1,0,2,0)	(0,1,2,1)	$\frac{3}{4}$	$\frac{17}{12}$
(2,0,0,0)	(1,2,0,0)	$\frac{2}{3}$	1	(1,0,2,0)	(2,0,1,0)	1	$\frac{1}{2}$

Таблица 5.

(Диаграмма  $\tilde{A}_3$ ).

x	y	A	S	x	y	A	S
(2,0,0,0)	(1,0,2,0)	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	(1,0,2,0)	(2,0,1,1)	$\frac{3}{4}$	$\frac{67}{96}$
(2,0,0,0)	(1,1,2,0)	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{16}$	(1,0,2,0)	(1,2,0,1)	$\frac{3}{4}$	$\frac{139}{96}$
(2,0,0,0)	(1,2,1,0)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	(1,0,2,0)	(2,1,0,1)	$\frac{3}{4}$	$\frac{29}{12}$
(2,0,0,0)	(2,0,0,1)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	(1,1,2,0)	(1,2,1,0)	1	$\frac{3}{8}$
(2,0,0,0)	(1,2,0,1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{19}{16}$	(1,1,2,0)	(0,1,1,2)	1	1
(2,0,0,0)	(2,1,0,1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	(1,1,2,0)	(0,1,2,1)	1	$\frac{3}{8}$
(1,2,0,0)	(1,0,2,0)	1	$\frac{3}{2}$	(1,1,2,0)	(2,0,1,1)	1	1
(1,2,0,0)	(1,1,2,0)	$\frac{3}{4}$	$\frac{33}{32}$	(1,1,2,0)	(1,0,1,2)	1	$\frac{11}{8}$

x	y	A	S	x	y	A	S
(1,2,0,0)	(1,2,1,0)	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	(1,1,2,0)	(2,1,0,1)	1	$\frac{11}{8}$
(1,2,0,0)	(0,1,2,0)	1	$\frac{11}{8}$	(1,2,1,0)	(0,1,2,1)	1	1
(1,2,0,0)	(0,1,0,2)	1	$\frac{11}{8}$	(1,2,1,0)	(1,0,1,2)	1	2

4. Доказательство теоремы 0.1

$n = 3$ . Возможны параболические диаграммы  $\tilde{A}_2$  и  $\tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_1$ .

а)  $\tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_1$ . Как видно из 3.1,  $S_1 \leq 1, S_2 \leq 1$ , имеется единственная возможность  $xu = -A - \frac{1}{A} + S_1 + S_2 = 0$ , соответствующая единственной (с точностью до перенумерации вершин схемы) допустимой паре  $x = (0,2,0,2), y = (2,0,2,0)$ , изображённой на рис. 3. Приведённая диаграмма является диаграммой искомого многогранника по теореме 1.1.

Из комбинаторных соображений легко перечисляют все искомые пирамиды, их схемы изображены в верхней половине рис. 1.

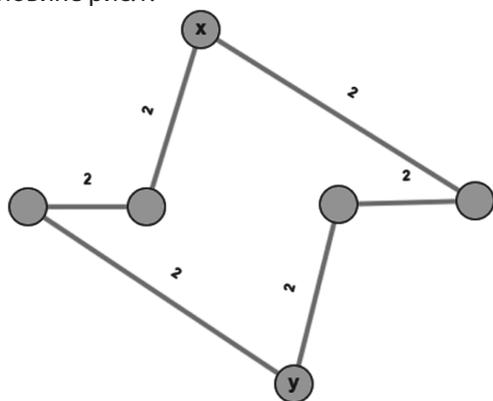


Рис. 3. Допустимая пара  $x = (0,2,0,2), y = (2,0,2,0)$

б)  $\tilde{A}_2$ . Из таблицы 3.2 следует, что  $S \leq \frac{14}{9}$  для  $\tilde{A}_2$ . Так как  $-A - \frac{1}{A} \leq -2$ , допустимых пар нет.

Имеются три пирамиды, их схемы изображены в нижней половине рис. 1.

$n = 4$ . Возможны параболические диаграммы  $\tilde{A}_3, \tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2$  и  $\tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_1$ .

а)  $\tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_1$ . Из таблицы 3.1 следует, что допустимые пары возможны при  $A = 1, S_1 = 1, S_2 = 1, S_3 = 1$  и

$S_3 = 0$  (при этом  $xu = 1$  и  $xu = 0$ , соответственно, т.к.  $xu = -1 - 1 + 1 + 1 + S_3$ ). Получается шесть допустимых пар:

- $x = (0,1,0,2,0,2), y = (0,1,2,0,2,0), xu = 0,$
- $x = (0,2,0,2,0,2), y = (0,2,2,0,2,0), xu = 0,$
- $x = (0,2,0,2,0,2), y = (2,0,2,0,2,0), xu = 1,$
- $x = (1,1,0,2,0,2), y = (1,1,2,0,2,0), xu = 0,$
- $x = (1,2,0,2,0,2), y = (1,2,2,0,2,0), xu = 0,$
- $x = (2,2,0,2,0,2), y = (2,2,2,0,2,0), xu = 0;$

соответствующие диаграммы изображены на рис. 4. Во всех этих случаях приведённые диаграммы не являются схемами искомого многогранника по теореме 1.1. Максимальное допустимое множество  $x_1, x_2, \dots, x_m$  такое, что для любых  $i, j, x_i, x_j$  является допустимой парой, — это  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , где  $x_1 = (2,0,2,0,0,2), x_2 = (2,0,0,2,2,0), x_3 = (0,2,0,2,0,2), x_4 = (0,2,2,0,2,0)$ . Диаграмма для этого множества изображена на рис. 5. Применяя теорему 1.1, убеждаемся, что соответствующий многогранник имеет конечный объём.

Имеются четыре пирамиды. Их схемы приведены на рис. 2.

б)  $\tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2$ . Как показывает анализ таблиц 3.1 и 3.2, имеется две возможности для  $x, y$ , когда  $A = \frac{x * c}{y * c} = 1, S_1 = 1, S_2 = 1, xu = -2 + 1 + 1 = 0$ . Это случаи  $x = (0,2,0,0,2), y = (2,0,1,1,0)$  и  $x = (0,2,0,1,2), y = (2,0,1,2,0)$ , соответствующие диаграммы изображены на рис. 6. Используя теорему 1.1, убеждаемся, что приведённые диаграммы не являются схемами искомого многогранника.

Имеются две пирамиды. Их схемы приведены на рис. 2.

в)  $\tilde{A}_3$ . Таблицы 3.3, 3.4, 3.5 дают четыре допустимые пары:

- $x = (2,0,0,0), y = (0,0,2,0), xu = 0,$
- $x = (2,0,0,0), y = (0,1,2,1), xu = 0,$
- $x = (1,2,0,0), y = (1,0,0,2), xu = 0,$
- $x = (1,2,1,0), y = (1,0,1,2), xu = 0;$

соответствующие диаграммы изображены на рис. 7.

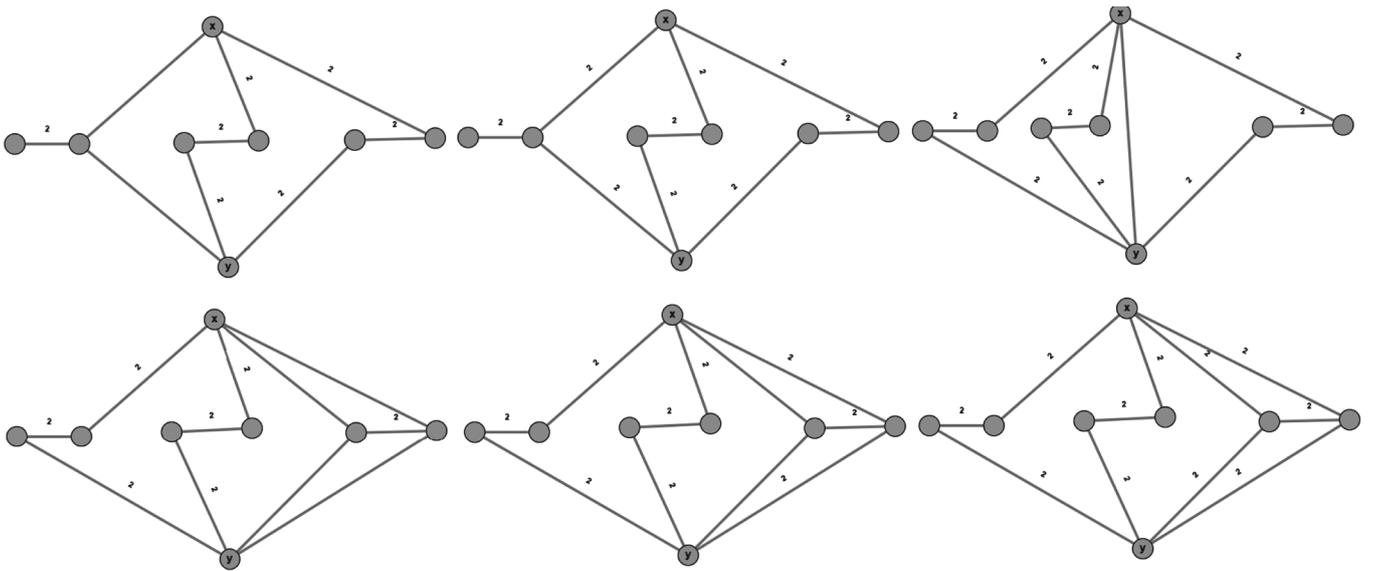


Рис. 4. Допустимые пары для  $\tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_1$

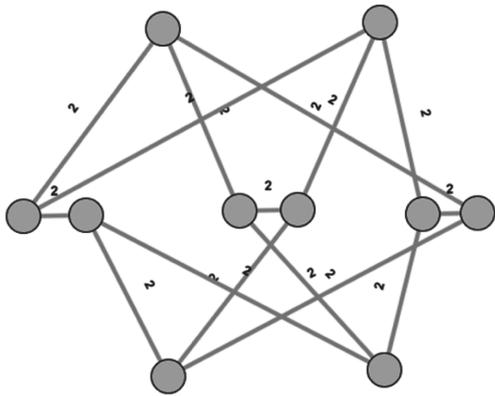


Рис. 5. Максимальное множество для  $\tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_1$

Но в каждом из этих случаев  $\bar{H}_x$  и  $\bar{H}_y$  не пересекают всех рёбер, выходящих из вершины типа  $\tilde{A}_3$ .

Имеются две пирамиды. Их схемы приведены на рис. 2. На этом доказательство теоремы 0.1. завершено.

В [4] Никулин В.В. показывает, что интересующие нас решётки существуют при  $n \leq 18$ , из чего следует, что применение описанного алгоритма в размерностях вплоть до 18 позволит получить все кристаллографические группы отражений с указанными свойствами.

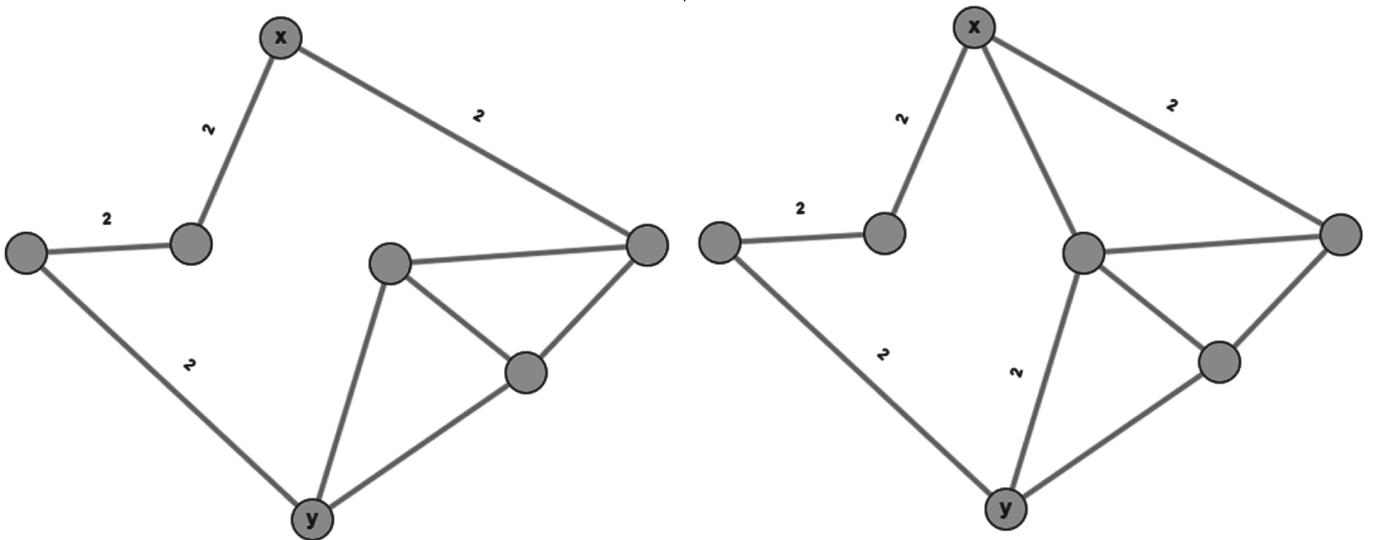


Рис. 6. Допустимые пары для  $\tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2$

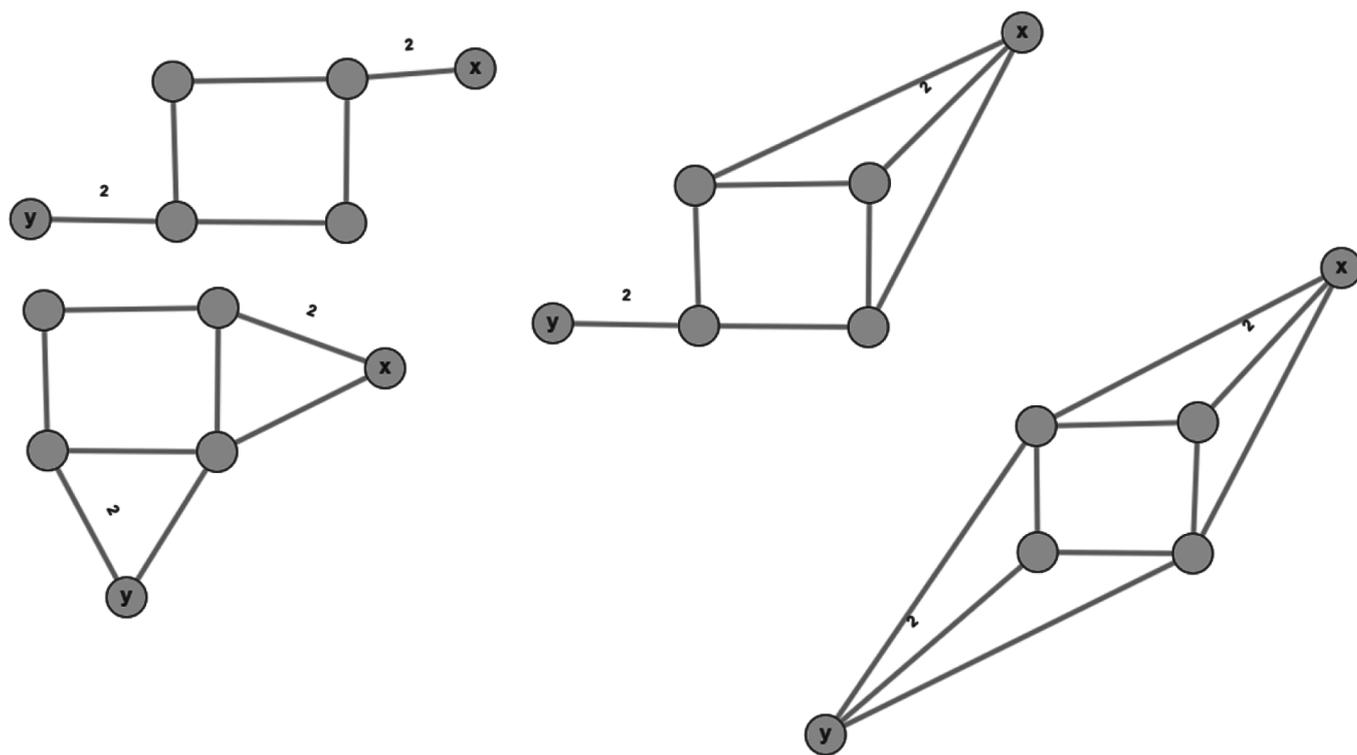


Рис. 7. Допустимые пары для  $\tilde{A}_3$

ЛИТЕРАТУРА

1. Прохоров М.Н. О многогранниках конечного объёма в пространстве Лобачевского с двугранными углами  $\frac{\pi}{2}$  и  $\frac{\pi}{3}$ . — Доклады по математике и её приложения, том 2, №2, 1988, с. 151–187.
2. Винберг Э.Б. Гиперболические группы отражений. — Успехи мат. наук, 1985, т.40, вып.1, с.29–64.
3. Винберг Э.Б. Дискретные группы, порождённые отражениями в пространстве Лобачевского. — Матем. сб., 1967, т.72, с.471–488.
4. Никулин В.В. О факторгруппах групп автоморфизмов гиперболических форм по подгруппам, порождённым 2-отражениями. Алгебро-геометрические приложения. — В кн.: Современные проблемы математики. М.: ВИНТИ, 1981, т.18, с.3–114.

© Музыка Александр Андреевич (vispoftheblayor@gmail.com)  
 Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»