ТОЧЕЧНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Осипов Владимир Владимирович
К.ф.-м.н., доцент. Сибирский федеральный университет
va-osipova@ya.ru
Осипова Вера Александровна
К.т.н., доцент, Сибирский федеральный университет
vv-osipov@ya.ru

Аннотация. В работе рассматривается метод точечных представлений (точечного моделирования) как метод математического моделирования дифференциальных и интегральных уравнений использующий, сплайновые ступенчатые модели, и точечное представление функций и операторов. Возникающие при этом конечномерные модели есть гомоморфные образы соответствующих объектов, имеющие максимально возможную степень адекватности, увеличивающуюся с ростом размерности до полной эквивалентности. Рассмотрены алгебраические структуры точечных представлений. Показано, что алгебра $AM(0,\ T)$ в пространстве всех кусочно-непрерывных ограниченных функций, определенных на конечном временном промежутке [0, T] с бинарной операцией обычного умножения естественным образом может быть положена в основу точечного моделирования линейных и нелинейных процессов, описываемых дифференциальными и интегральными уравнениями различного типа. Получены точечные представления для различных операций над функциями. Построена точечная модель однородного нелинейного дифференциального уравнения, доказана теорема о существовании его точечного решения.

Ключевые слова: Приближенно-аналитические операторные методы моделирования, метод точечных представлений, точечное моделирование дифференциальных уравнений, точечный изображающий вектор.

POINTWISE MODELING AND SOLVING CAUCHY PROBLEMS FOR NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

V. Osipov
V. Osipova

Summary. The method of pointwise representations (pointwise modeling) as a method of mathematical modeling of differential and integral equations using spline step models, and a pointwise representation of functions and operators is considered in the work. The finite-dimensional arising in this case models are homomorphic images of the corresponding objects, which have the highest possible degree of adequacy, which increases as soon as dimension increases until the complete equivalence. Algebraic structures of pointwise representations are considered. It is shown that the algebra AM (0, T) in the space of all piecewise continuous bounded functions defined on a finite time interval [0, T] with a binary operation of ordinary multiplication can naturally be used as the basis for pointwise modeling of linear and nonlinear processes described by differential and integral equations of various types. Pointwise representations for various operations on functions are obtained. A pointwise model of a homogeneous nonlinear differential equation is constructed, a theorem on the existence of its point solution is proved.

Keywords: Approximately operator methods and analytical modeling, the method of point representations, modeling point of differential equations, vector representing the point.

Математическими моделями динамических процессов и систем служат дифференциальные и интегральные уравнения различного типа. В общем случае нелинейные, аналитическое решение которых возможно лишь в редких случаях. Поэтому часто применяют численные методы, которые эффективны для некоторого класса задач, но лишены аналитичности. В связи с этим остается актуальным разработка и применение приближенно-аналитических операторных методов моделирования, основанные на алгеброизации дифференциальных и интегральных уравнений. К наиболее распространенным таким методам относятся метод точек [1], и операторные методы, предложенные учеными [2; 3], метод изображающих векторов [4] и другие. Все они имеют свои достоинства и свои недостатки. В данной работе речь пойдет о методе точечных представлений (точечного моделирования), использующем сплайновые ступенчатые модели и точечное представление функций и операторов.

1. Точечное представление функций

Определение 1. Точечным изображающим вектором функции $f(t) \in M(0, T)$ — пространству всех кусочно-непрерывных ограниченных функций, определенных на временном конечном промежутке [0, T] называется N-вектор

$$\overline{f}_T = Colon\left[f\left(t_1^{(N)}\right), \dots f\left(t_\nu^{(N)}\right), \dots f\left(t_N^{(N)}\right)\right] \xleftarrow{T_1} f(t), \qquad (1)$$

ассоциированный с чебышевской N-сеткой I рода

$$t_\nu^{(N)} = T\,\frac{2\nu-1}{2N}\left(\nu = \overline{1,N}\right). \qquad (2)$$

При этом условимся определять значение $f\left(t_k^{(N)}\right)$ в некоторой точке $t_k^{(N)}$ из этой сетки, являющейся точкой возможного конечного разрыва непрерывности функции, как среднее арифметическое ее значений слева и справа.

Определение 2. Инволютивным точечным изображением функции $f(t) \in M(0, T)$ или, просто, инволюцией называется диагональная матрица

$$f_T^* = Diag\left[f\left(t_1^{(N)}\right), \dots f\left(t_\nu^{(N)}\right), \dots f\left(t_N^{(N)}\right)\right](N \times N), \quad (3)$$

которая ставится в однозначное соответствие точечному изображающему N-вектору $\overline{f_T}$ составленная из тех же элементов с тем же порядком их следования.

2. Алгебраические структуры точечных представлений

Пусть $M(0, T)$ есть пространство всех кусочно-непрерывных ограниченных функций, определенных на временном конечном промежутке [0, T]. Сделаем его нормированным, вводя Sup-норму

$$\operatorname*{Sup}_{t\in[0,T]}|f(t)| = \|f\|; \quad f(t) \in M(0,T). \quad (4)$$

Тогда $C(0, T)$ — пространство всех непрерывных на [0, T] функций становится подпространством в $M(0, T)$, причем

$$\|\varphi\| = \operatorname*{Sup}_{t\in[0,T]}|\varphi(t)| = \operatorname*{Max}_{t\in[0,T]}|\varphi(t)|;$$

$$\forall\varphi(t) \in C(0,T) \subset M(0,T).$$

Пространства $M(0, T)$ и $C(0, T)$ относительно введенной нормы становятся полными, т.е. банаховыми [11]. Пространство $M(0, T)$ оказывается, вместе с тем, и гильбертовым пространством $L_2(0, T)$ с соответствующей нормой.

Поскольку произведение любых двух функций из $M(0, T)$ снова окажется функцией пространства $M(0, T)$, то оно становится замкнутым множеством относительно операции умножения со свойством нормы (4)

$$\|f \cdot \varphi\| \le \|f\| \cdot \|\varphi\|; \quad f(t), \varphi(t) \in M(0,T). \quad (5)$$

и окажется не только банаховым пространством, но образует коммутативную банахову алгебру с единицей ||1|| = 1. Обозначим ее символом $AM(0, T)$.

Очевидно, $AC(0, T)$ — банахова алгебра с единицей всех непрерывных на [0, T] функций будет подалгеброй алгебры $AM(0, T)$.

В функциональном пространстве $M(0, T)$ может быть введена и другая бинарная операция элементов — операция свертки, обобщающая операцию вольтеровского интегрирования, и определяя этим сверточную алгебру $ASM(0, T)$, которая, однако, не имеет единичного элемента. Она — подалгебра сверточной алгебры обобщенных функций с единичным элементом в виде δ-функции δ(t) — сингулярной обобщенной функции.

Такая более широкая нормированная (в смысле L_1-нормы) сверточная алгебра с единицей, обозначенная символом $ASL_1(0, T)$, лежит в основе точечного моделирования линейных динамических процессов, что подробно рассмотрено в работах [5; 6].

Алгебра $AM(0, T)$ с бинарной операцией элементов в виде обычного умножения естественным образом может быть положена в основу точечного моделирования линейных и нелинейных динамических процессов, описываемых дифференциальными и интегральными уравнениями различного типа.

Функциональное пространство $M(0, T)$ будет гомоморфно отображаться на N-мерное векторное пространство R_T^N –точечных изображающих векторов (1), в частности, с нормой

$$\|\bar{f}_T\| = \operatorname*{Sup}_{\nu}\left|f\left(t_\nu^{(N)}\right)\right| \le \|f\| = \operatorname*{Sup}_{t\in[0,T]}|f(t)| \quad (6)$$

Гомоморфизм T_N: $M(0, T) \xrightarrow{T_N} R_T^N$ означает, что точечный изображающий N-вектор $\bar{f}_T$ (1) является образом не одной функции $f(t) \in M(0, T)$, а целого множества функций, таких, что разность между любыми двумя представителями из этого множества есть функции вида

$$r_M(t) = \alpha_N(t)\cos N\pi\frac{t}{T}; \; \alpha_N(t) \in M(0,T) \quad (7)$$

с нулями в узлах N-сетки (2), поэтому их точечные преобразования имеют нулевой образ в R_T^N. Множество функций (7) образует ядро KerT_N гомоморфизма T_N:

$$\{\mathrm{Ker}\, T_N / T_N r_N(t) = 0\} \quad (8)$$

Всякая функция $f(t)$ из $M(0, T)$, доопределенная до четной периодической, имеет приближающую модель $M_N(f; t)$ в форме квадратурной N-суммы Фурье, построенной по отчетам $f\left(t_\nu^{(N)}\right)\left(\nu = \overline{1,N}\right)$ в узлах N-сетки (2). Поэтому точечные изображающие N-векторы $f(t) \in M(0, T)$ и ее модели $M_N(f; t) \in M(0, T)$ оказываются одинаковыми, т.е. преобразованием T_N они отображаются в один и тот же элемент $\overline{f}_T \in R_T^N$. Их разность принадлежит ядру (8) гомоморфизма T_N: $f(t) - M_N(f;t) = r_N(t) \in \mathrm{Ker}\, T_N$ и, следовательно $f(t) = M_N(f;t) + r_N(t)$

т.е. всякая функция из $M(0, T)$ представляется в виде суммы своей интерполяционной модели, построенной по узлам чебышевской N-сетки (2) и некоторого элемента из ядра KerT_N гомоморфизма T_N. Последний играет роль ошибки приближения интерполяционной модели. При $N \to \infty$ ошибка отождествляется с нулем в метрике L_2 (0, T) (в среднеквадратичном), т.к.

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^T\left[f(t)-M_N(f;t)\right]^2dt=\lim_{N\to\infty}\int_0^T\left[r_N(t)\right]^2dt=0$$

и, следовательно, сходимости

$$\lim_{N\to\infty}M_N(f;t)=f(t) \text{ и } \lim_{N\to\infty}r_N(t)=0 \qquad (9)$$

имеют место почти всюду на [0, T] (т. Карлесона)[8].

Множество S_N(0, T) интерполяционных моделей функций M_N(0, T) образует пространство, являющееся N-мерным подпространством в M (0, T). Отображение M (0, T) $\xrightarrow{P_N}$ S_N(0, T) есть описанный уже гомоморфизм T_N с ядром (8). Множества S_N(0, T) и R_T^N эквивалентны, т.к. между их элементами существует взаимно однозначное соответствие. Как пространства они изометрически изоморфны.

Отметим также, что пространство M (0, T) является одновременно коммутативной банаховой алгеброй AM (0, T) относительно бинарной операции обычного умножения. Пространство R_T^N точечных векторных изображений как гомоморфный образ пространства M (0, T), также обладает таким свойством.

Отсюда следует, что множество R_T^N точечных векторных изображений с введенной операцией покоординатного умножения образует относительно Sup-нормы (6) при любых N коммутативную банахову алгебру с единицей. Обозначим ее символом $A\,R_T^N$. Поскольку для любых f (t) и φ (t) из M (0, T) справедливо представление $T_N\left[f(t)\varphi(t)\right]=T_N\left[f(t)\right]\cdot T_N\left[\varphi(t)\right]=\overline{f}_T ⊠ \overline{\varphi}_T$, то точечное преобразование T_N при любых N реализует непрерывный гомоморфизм не только пространства M (0, T) на пространство R_T^N , но и соответствующих банаховых алгебр

Однако, отображение P_N: M (0, T) $\xrightarrow{P_N}$ S_N (0, T) уже таким свойством не обладает, поскольку S_N (0, T) — пространство N-мерных интерполяционных моделей функции из M (0, T), имеющих вид квадратурных сумм Фурье по системе косинусов, не является алгеброй относительно обычного умножения, как бинарной операции.

Множество сплайновых моделей

$$Sp_N^0\left(\overline{f}_T;t\right)=\sum_{\nu=1}^{N}f\left(t_\nu^{(N)}\right)\pi_N\left(t-t_\nu^{(N)}\right);\ f(t)\in M(0,T), \qquad (10)$$

ассоциированных с чебышевской N-сеткой (2) и с итерполяционными элементами

$$\pi_N\left(t-t_\nu^{(N)}\right)=\begin{cases}1 & t\in\left(t_\nu^{(N)}-\dfrac{T}{2N},\ t_\nu^{(N)}+\dfrac{T}{2N}\right)\\ 0 & t\notin\left(t_\nu^{(N)}-\dfrac{T}{2N},\ t_\nu^{(N)}+\dfrac{T}{2N}\right)\end{cases};\ \left(\nu=\overline{1,N}\right), \qquad (11)$$

имеющих вид прямоугольных импульсов единичной высоты [5,6,7,9], образуют не только Sup-нормированное пространство $Sp_N^0(0,T)$ ступенчатых интерполяционных форм, являющимся N-мерным подпространством в M (0, T), но и коммутативную банахову алгебру ASp_N^0 с единицей относительно операции обычного умножения, которая оказывается подалгеброй алгебры AM. Иначе говоря, пространство ASp_N^0, как множество ступенчатых интерполяционных форм, замкнуто относительно бинарной операции обычного умножения. Кроме того,

$$Sp_N^0\left(\overline{1}_T;t\right)=1\in M(0,T).$$

Таким образом, гомоморфное отображение π_N пространства M (0, T) на свое подпространство $Sp_N^0(0,T)$ сплайновых моделей переходит в гомоморфизм алгебры AM на алгебру ASp_N^0, причем последняя при любых N изометрически изоморфна алгебре AR_T^N .

При $N \to \infty$ последовательность $\left\{Sp_N^0\left(\overline{f}_T;\tau\right)\right\}$ ступенчатых интерполяционных форм сходится почти всюду (п.в.) к любой функции f (t) ∈ M (0, T), а если последняя непрерывна, то сходимость будет равномерной. При этом функции из M (0, T), составляющие ядро $KerT_N$ гомоморфизма T_N, сходятся почти всюду к нулю, а сами гомоморфизмы π_N и T_N становятся изометрическими изоморфизмами алгебр ASp_N^0 и AR_T^N .

Множество инволютивных изображений функции M (0, T), как диагональных матриц, снабженных Sup-нормой (6), образует линейное пространство $\left(R_T^N\right)^*$, эквивалентное пространству R_T^N .В нем, очевидным образом, определена и коммутативная операция произведения элементов.

Существует и инволютивная единица — единичная матрица E_N:

$$1_T^*=Diag\left[1,\ldots 1,\ldots 1\right]=E_N$$

со своим естественным свойством

$$E_N f_T^*=f_T^*\cdot E_N=f_T^*=\left(\overline{f}_T ⊠ \overline{1}_T\right)^*.$$

Таким образом, множество $\left(R_T^N\right)^*$ инволютивных точечных изображений не только линейное нормированное пространство, но и коммутативная алгебра $A\left(R_T^N\right)^*$ с единицей. При любом N она изометрически изоморфна алгебре AR_T^N точечных векторных изображений функций из алгебры AM.

3. Точечное представление операций

Для точечного изображения произведения двух функций из AM будут иметь место следующие представления

$$T_N\left[f(t)\varphi(t)\right]=\bar{f}_T \boxtimes \bar{\varphi}_T=f_T^*\cdot\bar{\varphi}_T=\varphi_T^*\cdot\bar{f}_T;$$

$$f(t),\varphi(t)\in AM, \tag{12}$$

т.е. при всяком N точечное изображение произведения двух функций из алгебры AM будет равно произведению инволютивного точечного изображения одной из них, как диагональной матрицы, на точечное векторное изображение другой.

Могут быть получены и точечные представления для различных алгебраических операций над функциями, как элементами алгебры AM.

Так пусть $x(t)$ — элемент алгебры AM. Тогда, его точечные представления $\bar{X}_T$ и X_T^* будут элементами изометрически изоморфных алгебр AR_T^N и $A\left(R_T^N\right)^*$

$$x(t)\begin{cases}\xrightarrow{T_N}\ \bar{X}_T=Colon\left[x\left(t_1^{(N)}\right),\dots x\left(t_\nu^{(N)}\right),\dots x\left(t_N^{(N)}\right)\right]\in AR_T^N; & a)\\ \xrightarrow{T_N^*}\ X_T^*=Diag\left[x\left(t_1^{(N)}\right),\dots x\left(t_\nu^{(N)}\right),\dots x\left(t_N^{(N)}\right)\right]\in A\left(R_T^N\right)^*. & б)\end{cases}$$

Для квадрата $x^2(t)$ получим, согласно (12), точечные представления:

$$T_N x^2(t)=\bar{X}_T\cdot\bar{X}_T=X_T^*\cdot\bar{X}_T=\bar{X}_T^{[2]}=\left(X_T^*\right)^2\cdot\bar{1}_T=$$

$$=Colon\left[x^2\left(t_1^{(N)}\right),\dots x^2\left(t_\nu^{(N)}\right),\dots x^2\left(t_N^{(N)}\right)\right]$$

И вообще, для всякой степени γ функции $x(t)\in AM$, будем иметь представления

$$\left[x(t)\right]^\gamma=x^\gamma(t)\xrightarrow{T_N}\left(X_T^*\right)^\gamma\cdot\bar{1}_T=\bar{X}_T^{[\gamma]}=$$

$$=Colon\left[x^\gamma\left(t_1^{(N)}\right),\dots x^\gamma\left(t_\nu^{(N)}\right),\dots x^\gamma\left(t_N^{(N)}\right)\right].$$

Очевидно представление

$$a_k(t)\left[x(t)\right]^k\xrightarrow{T_N}A_{kT}^*\bar{X}_T^{[k]}=$$

$$=Diag\left[a_k\left(t_1^{(N)}\right),\dots a_k\left(t_\nu^{(N)}\right),\dots a_k\left(t_N^{(N)}\right)\right]\bar{X}_T^{[k]}$$

при всех $a_k(t)$ из $M(0,T)$ и всяких целых k.

Оно обобщается на полиномы n-ой степени:

$$a_0(t)1+\sum_{k=1}^{n}a_k(t)\left[x(t)\right]^k\xrightarrow{T_N}A_{0T}^*\cdot\bar{1}_T+\sum_{k=1}^{n}A_{kT}^*\cdot\bar{X}_T^{[k]}=$$

$$=\bar{A}_{0T}+\sum_{k=1}^{n}A_{kT}^*\cdot\bar{X}_T^{[k]}.$$

В частности, для функционального бинома Ньютон будем иметь:

$$\left(x(t)+x_0\right)^n=\left[x(t)\right]^n+\sum_{k=1}^{n}C_n^{n-k}\left[x(t)\right]^{n-k}\cdot x_0^k\xrightarrow{T_N}$$

$$\xrightarrow{T_N}X_T^{[n]}+\sum_{k=1}^{n}C_n^{n-k}\bar{X}_T^{[n-k]}\cdot x_o^k,$$

где C_n^{n-k} есть биномиальные коэффициенты

$$C_n^{n-k}=C_n^k=\frac{n(n-1)\cdot\cdot(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!};\ (k=0,\ 1-n).$$

Укажем точечное представление более общего возможного варианта сложной функции $F(x(t);t)\in M(0,T)$:

$$F\left(x(t);t\right)\xrightarrow{T_N}T_N\left[F\left(x(t);t\right)\cdot 1\right]=F_T^*\left(\bar{X}\right)\cdot\bar{1}_T=$$

$$=Diag\left[F\left(x\left(t_1^{(N)}\right);t_1^{(N)}\right),\dots F\left(x\left(t_\nu^{(N)}\right);t_\nu^{(N)}\right),\dots\right.$$

$$\left.F\left(x\left(t_N^{(N)}\right);t_N^{(N)}\right)\right]\cdot\bar{1}_T=Colon\left[F\left(x\left(t_1^{(N)}\right);t_1^{(N)}\right),\dots\right.$$

$$\left.F\left(x\left(t_\nu^{(N)}\right);t_\nu^{(N)}\right),\dots F\left(x\left(t_N^{(N)}\right);t_N^{(N)}\right)\right]=\bar{F}_T\left(\bar{X}\right) \tag{13}$$

Рассмотрим точечное представление для функционального произведения $t\cdot x(t)$ из AM.

Согласно (12), будем иметь

$$t\cdot x(t)\xrightarrow{T_N}(t)_T^*\cdot\bar{X}_T=\theta\cdot\bar{X}_T,$$

где символом θ обозначена диагональная матрица — инволютивное точечное изображение множителя t, имеющая компонентами узлы чебышевской N-сетки (2):

$$(t)_T^*=\theta=Diag\left[t_1^{(N)},\dots t_\nu^{(N)},\dots t_N^{(N)}\right](N\times N). \tag{14}$$

Она играет роль точечного представления оператора умножения функции $x(t)\in M(0,T)$ на независимую переменную t.Узлы N-сетки (2) являются простыми и положительными собственными значениями тэта-матрицы (14). Их совокупность, т.е. сама чебышевская N-сетка (2), образует спектр этой матрицы. Всякая функция $x(t)$ из $M(0,T)$ определена, очевидно, на спектре матрицы θ при любом N, поэтому определена и $x(\theta)$ — функция матричного аргумента θ, причем окажется:

$$x(\theta)=Diag\left[x\left(t_1^{(N)}\right),\dots x\left(t_\nu^{(N)}\right),\dots x\left(t_N^{(N)}\right)\right]=X_T^*,$$

и, следовательно, точечно-векторное изображение $\bar{X}_T$ функции $x(t)\in M(0,T)$ может быть записана в виде $\bar{X}_T=T_N\left[x(t)\cdot 1\right]=X_T^*\cdot\bar{1}_T=x(\theta)\cdot\bar{1}_T$.

Для произвольного функционального произведенияx $(t)y$ (t) из AM будем иметь:

$$x(t)\,y(t)\xrightarrow{T_N} T_N\left[x(t)\,y(t)\right]=x(\theta)\,\overline{Y}_T=y(\theta)\,\overline{X}_T$$

и для всякой сложной функцииF $(x$ (t); $t)$ $\in M$ (0, T), указанной в (13), окажется

$$F\left(x(t);t\right)\xrightarrow{T_N}=T_N\left[F\left(x(t);t\right)\cdot 1\right]=F\left(x(\theta);\theta\right)\cdot\overline{1}_T=$$
$$=Colon\left[F\left(x\left(t_1^{(N)}\right);t_1^{(N)}\right),\ldots F\left(x\left(t_\nu^{(N)}\right);t_\nu^{(N)}\right),\ldots F\left(x\left(t_N^{(N)}\right);t_N^{(N)}\right)\right]=$$
$$=\overline{F}_T\left(\overline{X}\right). \qquad (15)$$

Это представление может быть обобщено на случай функций нескольких переменных.

4. Точечная модель однородного нелинейного дифференциального уравнения

Используя введенные точечные представления операций над функциями, в качестве иллюстрации найдем точечную модель задачи Коши для следующего однородного нелинейного дифференциального уравнения 1-го порядка:

$$\frac{dx(t)}{dt}+a(t)\,x(t)+\alpha\cdot F\left(x(t);t\right)=0;\; x(0)=x_0;\alpha\geq 0 \qquad (16)$$

на временном промежутке [0, T].

Или для эквивалентного ему интегрального уравнения:

$$x(t)+\int_0^t a(\eta)x(\eta)d\eta+\alpha\cdot\int_0^t F(x(\eta);\eta)d\eta=x_0;\; t\in[0,T]. \qquad (17)$$

Предполагая принадлежность указанных функций пространству M (0, T), введем их точечно-векторные представления, ассоциированные с чебышевской N-сеткой I-рода (2) и формульно определенные в предыдущем параграфе.

Можем написать:

$$x(t)\xrightarrow{T_N} T_N\left[x(t)\cdot 1\right]=x(\theta)\cdot\overline{1}_T=\overline{X}_T=$$
$$=Colon\left[x\left(t_1^{(N)}\right),\ldots x\left(t_\nu^{(N)}\right),\ldots x\left(t_N^{(N)}\right)\right];$$
$$a(t)\,x(t)\to T_N\left[a(t)\,x(t)\right]=a(\theta)\cdot\overline{X}_T=A_T^*\cdot\overline{X}_T=$$
$$=Diag\left[a\left(t_1^{(N)}\right),\ldots a\left(t_\nu^{(N)}\right),\ldots a\left(t_N^{(N)}\right)\right]\cdot\overline{X}_T,$$

а также, согласно (15), будем иметь:

$$F\left(x(t);t\right)\to F\left(x(\theta);\theta\right)\cdot\overline{1}_T=\overline{F}_T\left(\overline{X}_T\right)=$$
$$=Colon\left[F\left(x\left(t_1^{(N)}\right);t_1^{(N)}\right),\ldots F\left(x\left(t_\nu^{(N)}\right);t_\nu^{(N)}\right),\ldots F\left(x\left(t_N^{(N)}\right);t_N^{(N)}\right)\right].$$

Тогда точечное преобразование интегрального уравнения (17) дает следующее векторно-матричное равенство

$$\overline{X}_T+\lambda_0 J(Z)\cdot A_T^*\cdot\overline{X}_T+\alpha\cdot\lambda_0 J(Z)\cdot\overline{F}_T\left(\overline{X}_T\right)=x_0\cdot\overline{1}_T, \qquad (18)$$

где $\lambda_0 J$ (Z) $(N\times N)$ есть матрица интегрирования введенная в [5; 6, 10]:

$$\lambda_0 J(Z)=\lambda_0\left[E_N+2\sum_{k=1}^{N}Z^k\right]=$$
$$=\frac{T}{2N}\begin{bmatrix}1&&&&&&&\\2&1&&&&&&\\\vdots&&\ddots&\ddots&&&&\\2&2&\cdots&2&1&&&\\\vdots&&&&\ddots&\ddots&&\\2&2&\cdots&2&2&\cdots&2&1\end{bmatrix}(N\times N) \qquad (19)$$

Уравнение (18) есть точечная модель задачи Коши для уравнения (16).

Умножим обе стороны уравнения (18) на матрицуJ $(Z)^{-1}$, обратную матрице J (Z) в (19).

В результате получим иную точечную модель поставленной задачи (16), эквивалентную модели (18):

$$\left[J(Z)^{-1}+\lambda_0\cdot A_T^*\right]\overline{X}_T+\alpha\lambda_0\cdot\overline{F}_T\left(\overline{X}_T\right)=$$
$$=x_0\cdot J(Z)^{-1}\cdot\overline{1}_T=x_0\,\overline{1}_{TZ} \qquad (20)$$

Если иметь в виду следующее явное представление для матрицыJ $(Z)^{-1}$

$$J(Z)^{-1}=\left(\frac{E_N+Z}{E_N-Z}\right)^{-1}=\frac{E_N-Z}{E_N+Z}=J(-Z)=E_N+2\sum_{k=1}^{N}(-Z)^k=$$
$$=E_N-\frac{2Z}{E_N+Z}=,$$
$$=\begin{bmatrix}1&&&&&&&\\-2&1&&&&&&\\\vdots&\ddots&\ddots&&&&&\\(-1)^k 2&\cdots&-2&1&&&&\\\vdots&&&\ddots&\ddots&&&\\(-1)^N 2&\cdots&(-1)^k 2&\cdots&-2&1&&\end{bmatrix}(N\times N)$$

а также диагональную форму матрицы A_T^* и возникающее единичное зигзагообразное точечное векторное представление правой части в уравнении (20)

$$J(Z)^{-1}\cdot \bar{1}_T = Colon\left[1,-1,\cdot\cdot(-1)^k,\cdot\cdot(-1)^N\right] = \bar{1}_Z ,$$

то модель (20) запишется в виде

$$\left(E_N+\lambda_0 A_T^*\right)\bar{X}_T+\alpha\lambda_0\cdot \bar{F}_T\left(\bar{X}_T\right)=x_0\,\bar{1}_{TZ}+\frac{2Z}{E_N+Z}\cdot \bar{X}_T,$$

а в развернутой форме предстанет в виде следующей системы скалярных уравнений для отдельных компонент искомого N-вектора $\bar{X}_T$ — точечного вектора решения $x(t)$ $t\in[0, T]$ поставленной задачи (16):

$$\left.\begin{array}{l}(1+\lambda_0 a_1)x_1+\alpha\lambda_0 F_1=x_0;\\(1+\lambda_0 a_2)x_2+\alpha\lambda_0 F_2=-x_0+2x_1;\\(1+\lambda_0 a_3)x_3+\alpha\lambda_0 F_3=x_0-2x_1+2x_2;\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\(1+\lambda_0 a_k)x_k+\alpha\lambda_0 F_k=(-1)^{k-1}x_0+2\sum\limits_{m=1}^{k-1}(-1)^{k-1-m}\cdot x_m;\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\(1+\lambda_0 a_N)x_N+\alpha\lambda_0 F_N=(-1)^{N-1}x_0+2\sum\limits_{m=1}^{k-1}(-1)^{N-1-m}\cdot x_m.\end{array}\right\}\quad(21)$$

Здесь для кратности записи введены обозначения

$$\left.\begin{array}{ll}x_k=x\left(t_k^{(N)}\right); & а)\\F_k=F\left(x\left(t_k^{(N)}\right);\,t_k^{(N)}\right) & б)\end{array}\right\}\ \left(k=\overline{1,N}\right)$$

для компонент соответствующих точечных изображающих векторов, а символами a_k $\left(k=\overline{1,N}\right)$ обозначены элементы матрицы A_T^*, т.е. величины

$$a\left(t_k^{(N)}\right)=a_k\quad\left(k=\overline{1,N}\right).$$

Предполагая известными значения параметров α и

$$\lambda_0=\frac{T}{2N},$$

а также x_0, обозначим алгоритм решения системы (21).

Найдем вещественный корень первого нелинейного алгебраического уравнения в (21).Это будет первая координата $x_1=x\left(t_1^{(N)}\right)$ искомого N-вектора $\bar{X}_T$. Подставим его в правую часть второго уравнения и, решая его, найдем $x_2=x\left(t_2^{(N)}\right)$ — вторую координату вектора $\bar{X}_T$. Решая далее третье уравнение при известной уже его правой части, определим $x_3=x\left(t_3^{(N)}\right)$. Действуя подобным образом и далее, определим последовательно и все другие компоненты вектора $\bar{X}_T$ — точечного решения поставленной задачи Коши.

Таким образом, задача сводится к последовательному решению нелинейных алгебраических уравнений одного типа, но с разными правыми частям — последовательно определяемыми найденными решениями предыдущих уравнений. Естественно, предполагается наличие всех таких решений. Очевидно, условия их существования при всех N и T и будут условиями существования решения поставленной задачи (16).

Точечную векторно-матричную модель (20) нашей задачи и, следовательно, ее развернутую форму (21), представим в виде разрешенном относительно вектора $\bar{X}_T$:

$$\bar{X}_T=x_0\left[J(Z)^{-1}+\lambda_0 A_T^*\right]^{-1}\cdot\bar{1}_{TZ}-$$
$$-\alpha\lambda_0\left[J(Z)^{-1}+\lambda_0 A_T^*\right]^{-1}\cdot\bar{F}_T\left(\bar{X}_T\right)=\bar{X}_{0T}+\bar{X}_{FT}\qquad(22)$$

Введены понятия:

1. $$\bar{X}_{0T}=x_0\left[J(Z)^{-1}+\lambda_0 A_T^*\right]^{-1}\cdot\bar{1}_{TZ}\qquad(23)$$

— линейной части точечного решения рассматриваемой задачи, определяемая ненулевым начальным условием x_0 и характеристической матрицей модели (20)

$$A_T^*=Diag\left[a\left(t_1^{(N)}\right),\dots a\left(t_k^{(N)}\right),\dots a\left(t_N^{(N)}\right)\right]=Diag\left[a_1,\dots a_k,\dots a_N\right];$$

2. $$\bar{X}_{FT}=-\alpha\lambda_0\left[J(Z)^{-1}+\lambda_0 A_T^*\right]^{-1}\cdot\bar{F}_T\left(\bar{X}\right)\qquad(24)$$

— нелинейной части, определяемой, кроме матрицы A_T^*, точечным представлением $\bar{F}_T\left(\bar{X}\right)$ нелинейной функции $F(x(t);t)$ задачи (16) и значением параметра $\alpha\ge 0$.

Эти решения есть точечно-векторные изображения соответствующих временных составляющих:

$$x_0(t)\xrightarrow{T_N}\bar{X}_{0T}\ а)\ \text{и}\ x_F(t)\xrightarrow{T_N}\bar{X}_{F}\ б)$$

Они, очевидно существуют, если будут существовать точечные представления (23) и (24) при всех T и $N\ge\infty$. Последнее будет иметь место, если при этом окажется невырожденной матрица

$$\left[J(Z)^{-1}+\lambda_0 A_T^*\right]$$

и, следовательно, существование обратной матрицы в указанных точечных решениях, а также принадлежность N-вектора $\bar{F}_T\left(\bar{X}\right)$ нормированному векторному пространству R_T^N при всех T и N (и фиксированном значении параметра

$$\lambda_0=\frac{T}{2N}),$$

т.е. ограниченность функции $F(x(t);t)$ на $[0, T]$ при всех $T\ge\infty$.

При $\alpha=0$ будем иметь только линейную составляющую как возможный частный вариант решения задачи Коши для возникающего линейного уравнения

$$\frac{dx_0(t)}{dt}+a(t)x_0(t)=0;\quad x_0(0)=x_0,$$

точечная модель которого возникает из (24) при $\alpha=0$ и имеет вид

$$\left[J(Z)^{-1}+\lambda_0 A_T^*\right]^{-1}\cdot \overline{X}_{0T}=x_0\,\overline{1}_{TZ},$$

определяя точечное решение (23).

Как некоторый итоговый результат может быть доказано следующее утверждение:

Утверждение. Точечное решение $\overline{X}_T$ поставленной задачи (16), определяемое ее точечной моделью (20), существует при всех конечных T и всяких $N \le \infty$, если при этом будут выполняться условия положительности величин

$$(1+\lambda_0 a_k)=\left[1+\lambda_0 a(\lambda_0(2k-1))\right]>0;\; k=(\overline{1N}),$$

которые гарантирует существование матрицы

$$\left[J(Z)^{-1}+\lambda_0 A_T^*\right]^{-1}$$

в представлении (22) для $\overline{X}_T$, и конечность нелинейной функции $|F(x(t);t)|\; t\in[0,T]$, т.е. конечность Sup-нормы N-вектора $\overline{F}_T(\overline{X})$: $\left\|\overline{F}_T(\overline{X}_T)\right\|=\operatorname{Sup}_k\left[F\left(x\left(t_k^{(N)}\right);\,t_k^{(N)}\right)\right]<\infty$.

Точечное решение $\overline{X}_T$ из пространства R_T^N определится представлением (22) или эквивалентной ему системой нелинейных уравнений (21), которая может быть решена последовательным определением компонент $x_k=x\left(t_k^{(N)}\right)\;k=\left(\overline{1,N}\right)$ N-вектора $\overline{X}_T\in R_T^N$, по которым найдется сплайновая (ступенчатая) форма

$$Sp_N^0\left(\overline{X}_T;t\right)=\sum_{k=1}^{N}x\left(t_k^{(N)}\right)\pi_N\left(t-t_k^{(N)}\right);\; t\in[0,T] \tag{25}$$

как элемент пространства S_N (0, T) $\subset$ M (0, T), эквивалентного пространству R_T^N, являющаяся приближающей интерполяционной моделью решения $x(t)\in M$ (0, T) задачи (16).

Сплайновая модель (259) при этом становится точным представлением решения $x(t)$ $\in$ M (0, T) задачи (16), а ее точечный изображающий N-вектор $\overline{X}_T\in R_T^N$, определяемый при конечных N гомоморфной точечной моделью (20), становится ее предельным точным представлением.

Предложенный метод точечного моделирования, как приближенно-аналитический метод, основанный на алгеброизации дифференциальных и интегральных уравнений, расширяет возможности исследования реальных систем, позволяет достаточно просто преобразовывать и приближенно представлять в векторно-матричной форме дифференциальные уравнения, описывающие динамические системы на конечных временных промежутках. В результате задачи теории управления переводятся в задачи линейной алгебры и конечномерного функционального анализа, для решения которых эффективно используется вычислительные методы и компьютерные технологии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пухов Г. Е. Введение в теорию метода точек // Труды Таганрогского радиотехнического института.—1954.— Вып. 1.—С. 47–77.
2. Саух С. Е. Численные операторные методы, основанные на рядах Ньютона // Электронное моделирование.— 1996.— № 4.— С. 63–69.
3. Васильев, В. В. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. Научное издание / В. В. Васильев, Л. А. Симак.— Киев, НАН Украины, 2008.— 256 с.
4. Осипов, В. М. Основы метода изображающих векторов / В. М. Осипов. -Осипов, В. В. Точечное моделирование и преобразования Лапласа и Фурье / В. В. Осипов. / — Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2011.— 416 с.
5. Осипов В. В. Моделирование динамических процессов методом точечных представлений. Красноярск: СФУ, 2012.— 304 с.— ISBN978–5–7638–2538–1. Режим доступа: http//www.studentelibrary.ru/book/ISBN9785763825381.html.
6. Альберт ДЖ. Теория сплайнов и её приложения / Дж. Альберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш: пер. с англ.— М.: Мир, 1972,—-319с.
7. Курош А. Г. Курс высшей алгебры М: Наука,1965.— 431 с.
8. Завьялов Ю. С. Методы сплайн-функций / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко.— М.: Наука, 1980.— 353 с.
9. Ланкастер П. Теория матриц / 2-е изд.— М.: Наука, 1982,—272 с.
10. Тихомиров В. М. Банахова алгебра. Дополнение к кН. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. 7-у изд.— М.: Наука, 2004.-19 с.

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»