ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЯ УПРУГО-ПОЛЗУЧЕГО СТЕРЖНЯ, РАСТЯГИВАЕМОГО С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Панамарев В.А.,
к.ф.-м.н., доцент,
Сибирский государственный индустриальный университет, г. Новокузнецк
panamar2k@gmail.ru
Карпов Е.В.,
к.ф.-м.н., ст. научный сотрудник,
Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск
1karpov1@yandex.ru
Ларичкин А.Ю.,
мл. научный сотрудник,
Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск
laracroft2013@gmail.com
Журавлева М.И.,
ст. преподаватель,
Сибирский государственный индустриальный университет, г. Новокузнецк
craneoff@mail.ru

Материалы II международной научно-практической конференции “Современные тенденции и инновации в науке и производстве“, г. Междуреченск, 3-5 апреля 2013 г.

ABOUT ANALYTICAL DETERMINATION OF TENSION OF THE ELASTIC AND CREEPING CORE STRETCHED WITH A CONSTANT SPEED OF DEFORMATION

Panamarev V.A.,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, the associate professor,
the Siberian state industrial university, Novokuznetsk
Karpov E.V.,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior research officer, Hydrodynamics Institute of M.A.Lavrentyev,
the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Novosibirsk
Larichkin A.Yu.,
Junior research officer, Hydrodynamics Institute of M.A.Lavrentyev,
the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Novosibirsk
Zhuravleva M.I.,
senior lecturer, the Siberian state industrial university, Novokuznetsk

Materials of the Second international scientific and practical conference “Current Trends and Innovations in Science and Production”, Mezhdurechensk, 3-5 of April, 2013.

В механике деформируемого твёрдого тела общую деформацию высокотемпературного металлического стержня ε при фиксированной температуре представляют в виде суммы её составляющих деформаций упругости ε^e, пластичности ε^p и ползучести ε^c, то есть стержень считается упруго -пластически-ползучим:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p + \varepsilon^c. \qquad (1)$$

Каждая из этих составляющих деформации ε связана с напряжением стержня σ соответствующим законом упругости, пластичности или ползучести [1]. При напряжениях менее предела текучести материала стержня σ_s деформацией пластичности ε^p можно пренебречь в сравнении с деформациями упругости ε^e и ползучести ε^c. В этом случае стержень может считаться упруго-ползучим, его общая деформация примет вид:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^c. \tag{2}$$

Используя закон Гука $\varepsilon^e = \dfrac{\sigma}{E}$ и экспоненциальный закон установившейся ползучести вида $\xi^c = Ke^{\beta\sigma}$, где $\xi^c \equiv \dfrac{d\varepsilon^c}{dt}$ – скорости деформации ползучести, получим уравнение состояния рассматриваемого упруго-ползучего стержня

$$\xi = \frac{1}{E}\cdot\frac{d\sigma}{dt} + Ke^{\beta\sigma}, \tag{3}$$

где $\xi \equiv \dfrac{d\varepsilon}{dt}$ – скорость общей деформации стержня; E – модуль упругости; K и β – числовые характеристики ползучести материала стержня; t – время деформирования [1]. Если известен закон изменения напряжения во времени $\sigma = \sigma(t)$, то уравнение (3) непосредственно определяет скорость общей деформации стержня. Если же известен закон изменения скорости общей деформации $\xi = \xi(t)$, то для определения напряжения необходимо проинтегрировать дифференциальное уравнение (3) при известном начальном условии для напряжения, то есть решить соответствующую задачу Коши.

При постоянной скорости деформации стержня, когда $\xi(t) = \xi = const$ и начальном условии $\sigma(0) = \sigma_0 \geq 0$ явное аналитическое решение соответствующей задачи Коши получено в работе [2]. Но в некоторых технологических задачах обработки металлов давлением заранее известной является не скорость деформации, а скорость деформирования [3]. Например, при растяжении стержня под скоростью деформирования понимается скорость изменения его длины L : $\nu \equiv \dfrac{dL}{dt} > 0$, равная скорости движения захвата одного из его торцов. Если скорость деформирования постоянна: $\nu = const$, то длина стержня будет определяться линейным выражением $L = L_0 + \nu\cdot t$, где L_0 – его начальная длина в момент времени $t = 0$.

Логарифмическая деформация растягиваемого стержня определяется формулой

$$\varepsilon = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) = \ln\left(\frac{L_0 + \nu\cdot t}{L_0}\right), \tag{4}$$

а её скорость $\xi \equiv \dfrac{d\varepsilon}{dt}$ определяется выражением

$$\xi(t) = \frac{1}{L}\cdot\frac{dL}{dt} = \frac{\nu}{L_0 + \nu\cdot t}. \tag{5}$$

Из этого выражения следует, что при постоянной скорости деформирования $\nu = const > 0$ скорость деформации ξ со временем изменяется: в начальный момент времени она максимальна: $\xi(0) = \dfrac{\nu}{L_0}$, а с ростом времени монотонно уменьшается и стремится к нулю: $\lim\limits_{t\to\infty}\xi(t) = 0$.

Поставим задачу: аналитически определить изменение напряжения стержня во времениpи его растяжении с постоянной скоростью деформирования.

Согласно выражениям (3) и (5) напряжение стержня при постоянной скорости деформирования $\nu = const$ определится как решение задача Коши вида

$$\frac{d\sigma}{dt} = E\left(\frac{\nu}{L_0 + \nu\cdot t} - Ke^{\beta\sigma}\right),\ \sigma(0) = \sigma_0 \geq 0. \tag{6}$$

Условие $\sigma(0) = \sigma_0 \geq 0$ означает, что в начальный момент времени $t = 0$ стержень был разгружен или напряжён (растянут). Для определения общего решения дифференциального уравнения в задаче Коши (6) используем замену

$$z(t) = e^{\beta\sigma},\ \Rightarrow\ \sigma = \frac{1}{\beta}\ln z,\ \Rightarrow\ \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{dz}{dt}.$$

При этом получаем задачу Коши для функции $z = z(t)$ вида

$$\frac{dz}{dt} - \frac{\beta E\nu}{L_0 + \nu\cdot t}\cdot z = -\beta EK\cdot z^2,\ z(0) = e^{\beta\sigma_0}. \tag{7}$$

Дифференциальное уравнение в этой задаче является уравнением Бернулли, общее решение которого имеет вид

$$z(t) = \frac{\nu(\beta E + 1)(L_0 + \nu \cdot t)^{\beta E}}{\beta EK(L_0 + \nu \cdot t)^{\beta E+1} + (\beta E + 1) \cdot C}, \qquad (8)$$

где C – постоянная интегрирования, определяемая из начального условия $z(0) = e^{\beta\sigma_0}$:

$$C = \frac{L_0^{\beta E} \cdot \left[\nu(\beta E + 1) - \beta EKL_0 e^{\alpha\sigma_0}\right]}{(\beta E + 1)e^{\beta\sigma_0}}.$$

Переходя в выражении (8) от z к σ по формуле $\sigma = \frac{1}{\beta}\ln z$, получаем решение задачи Коши (6) в явном аналитическом виде

$$\sigma(t) = \frac{1}{\beta}\ln\left\{\frac{\nu(\beta E + 1)(L_0 + \nu \cdot t)^{\beta E} e^{\beta\sigma_0}}{\beta EK(L_0 + \nu \cdot t)^{\beta E+1} e^{\beta\sigma_0} + L_0^{\beta E}\left[\nu(\beta E + 1) - \beta EKL_0^{\beta\sigma_0}\right]}\right\}. \qquad (9)$$

При постоянной скорости деформирования $\nu = const > 0$ время можно выразить через деформацию из соотношения (4): $t = \frac{L_0}{\nu}(e^{\varepsilon} - 1)$. Подставляя это отношение в равенство (9), найдём соответствующую зависимость напряжения σ от деформации ε.

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{1}{\beta}\ln\left\{\frac{\nu(\beta E + 1)\left[L_0(e^{\varepsilon} + 2)\right]^{\beta E} e^{\beta\sigma_0}}{\beta EK\left[L_0(e^{\varepsilon} + 2)\right]^{\beta E+1} e^{\beta\sigma_0} + L_0^{\beta E}\left[\nu(\beta E + 1) - \beta EKL_0 e^{\beta\sigma_0}\right]}\right\}. \qquad (10)$$

Таким образом, в работе аналитически решена задача по определению напряжения упруго-ползучего стержня при его растяжении с постоянной скоростью деформирования. При этом напряжение определено и как функция времени, и как функция деформации.

Список литературы

1. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твёрдого тела – М.: Наука, 1979.
2. Панамарев В.А, Перетятько В.Н., Лактионов С.А Об аналитическом выражении напряжения упруго-ползучего стержня, деформируемого с заданной скоростью// Краевые задачи и математическое моделирование: сб. науч. ст. / НФИ КемГУ; под общ. ред. В.О. Каледина. – Новокузнецк, 2012. – С. 122–130.
3. Малинин Н.Н. Ползучесть в обработке металлов – М.: Машиностроение, 1986. - 222 с.

(Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 11-08-00845-а)