ОБ ИНВАРИАНТАХ ОДНОГО КЛАССА БИЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Осетинский Николай Иосифович
К.ф.-м.н., профессор, РГУ нефти и газа (НИУ) имени И. М. Губкина
avt1948@mail.ru

Аннотация. Исследуются свойства достижимости и наблюдаемости, канонические формы и инварианты билинейных управляемых систем, а также — нуль-формы в пространстве двумерных билинейных систем с одномерными входами и выходами при преобразованиях подобия, т.е. действии на пространство систем группы GLn, определяемое заменой координат в пространстве состояний системы.

Ключевые слова: билинейная управляемая система, подпространство, наблюдаемость, каноническая форма, инвариант.

ON THE INVARIANTS OF ONE CLASS OF BILINEAR CONTROL SYSTEMS

N. Osetinskiy

Summary. We investigate the properties of reachability and observability, canonical forms and invariants of bilinear control systems, as well null-forms in the space of two-dimensional bilinear systems with one-dimensional inputs and outputs under similarity transformations, i.e. action on the space of the systems of the group GLn, determined by the change of coordinates in the state space of the system.

Keywords: bilinear controlled system, subspace, observability, canonical form, invariant.

Пространства и канонические формы билинейных систем

Билинейной управляемой системой с m входами называется набор $B=(V,A_0,\dots,A_m)$, где V — конечномерное векторное пространство (над полем комплексных чисел C или вещественных чисел R) состояний системы и $A_0,\dots,A_m$ — линейные эндоморфизмы пространства V. Функционирование такой системы в непрерывном времени описывается дифференциальным уравнением

$$x'(t)=\left(A_0+\sum_{i=1}^{m}u_i(t)A_i\right)x(t).\ (1.1)$$

Входное воздействие (или управление) системы есть набор $u(t)=(u_1(t),\dots,u_m(t))$. Предположим, что вещественные функции $u_i(t)$ кусочно непрерывны на отрезке [0, T], $T>0$. Тогда для любого x_0 из V и $u(t)$ с указанными координатами существует единственное решение уравнения (1), определенное при всех $\le t\le T$ и удовлетворяющее начальному условию. $x(0)=x_0$. Пусть $\pi(B,u,t)x_0=x(t)$ в соответствии с обозначениями [1]. Тогда для системы B при фиксированных $u(t)$ и t определено линейное невырожденное отображение

$$\pi(B,u,t):\ V\to V,\ \pi(B,u,t):\ x_0\mapsto\pi(B,u,t)x_0.$$

Линейное подпространство $W\subset V$ называется B-инвариантным, если выполнено одно из двух эквивалентных условий:

(i) для любого w из W, любого входного воздействия $u(t)$ и любого t из [0, T] выполняется включение $\pi(B,u,t)w\in W$;

(ii) пространство W инвариантно относительно линейных отображений $A_0,\dots,A_m$.

Действительно, пусть выполнено условие (i). Рассмотрим входные воздействия $u^{+,i}$ и $u^{-,i}$, где $u_j^{+,i}=\delta_{ij}$, $u_j^{-,i}=-\delta_{ij}$, здесь δ_{ij} — символ Кронекера. Тогда при $x_0=w\in W$ решения уравнения (1) имеют следующий вид:

$$\pi(B,u^{\pm,i},t)=\exp((A_0\pm A_i)t)w,$$

в силу чего $\exp((A_0\pm A_i)t)w\in W$. Дифференцируя по t в точке $t=0$, получаем включение $(A_0\pm A_i)w\in W$. Следовательно, $A_0w\in W$ и $A_iw\in W$ для всех $1\le i\le m$. То, что из (ii) следует (i), очевидно.

Пусть $B=(V,A_0,\dots,A_m)$ и $B'=(V',A_0',\dots,A_m')$ — две билинейные системы с m входами. Тогда *морфизмом* системы B в систему $'$ называется линейное отображение $F:V\to V'$, для которого $FA_i=A_i'F$ для всех $0\le i\le m$. Морфизм F билинейных систем называется *изоморфизмом*, если F обратимо. Очевидно, если $F:V\to V'$ — морфизм, то выполняется равенство

$$F(\pi(B,u,t)x)=\pi(B',u,t)F(x)$$

при всех u, t и x. Обратное также верно. Очевидно, если $F:B\to B'$ — морфизм, то $\ker F\subset V$ и $\operatorname{Im}F\subset V'$ —

инвариантные подпространства в V и в V' соответственно.

Билинейной системой с m входами и p выходами называется набор $B=(V, A_0,...,A_m,\lambda_1,...,\lambda_p)$, где $B=(V, A_0,...,A_m)$ — билинейная система с m входами, а $\lambda_1,...,\lambda_p$ — линейные функционалы на пространстве V. При заданном входном воздействии $u(t)$ и начальном состоянии x выходной сигнал $y(t)=(y_1(t),...,y_p(t))$ системы B вычисляется по формуле

$$y_i(t)=\langle\lambda_i,\pi(B,u,t)x\rangle.$$

Очевидно, при заданных B, $u(t)$ и t отображение

$$\sigma(B,u,t):\ B\to R^p,\ \ \sigma(B,u,t):\ x\to y(t)$$

является линейным. Пусть Ω обозначает пространство входных функций (с кусочно-непрерывными координатами), а через Г-пространство дифференцируемых функций, определенных на [0, T], со значениями в R^p. Тогда система B для каждого начального состояния x определяет отображение вход-выход $\mathrm{IO}_{B,x}:\Omega\to\Gamma$.

Пусть $B=(V, A_0,...,A_m,\lambda_1,...,\lambda_p)$
и $B'=(V', A'_0,...,A'_m,\lambda'_1,...,\lambda'_p)$ — две билинейные системы с p выходами. Их *морфизмом* $F:B\to B'$ называется линейное отображение $F:V\to V'$ удовлетворяющее равенствам

$$A'_iF=FA_i,\ \lambda'_jF=\lambda_j,\ i=0,\dots,m;\ j=1,\dots,p.$$

Отметим, что множество морфизмов двух билинейных систем без выходных сигналов образует линейное пространство, а множество морфизмов двух билинейных систем с выходами образует аффинное пространство, т.е. если F и G — морфизмы из B в B', а α — некоторое число, то отображение $\alpha F+(1-\alpha)G$ также является морфизмом. Заметим также, что если $F:B\to B'$ — морфизм, то для любого $x\in V$ выполняется равенство $IO_{B',F(x)}=IO_{B,x}$. Состояния x и x' системы B называются неразличимыми, если $IO_{B,x}=IO_{B,x'}$. Система B называется *наблюдаемой*, если любые два различных состояния x и x' различимы, т.е. если $IO_{B,x}\neq IO_{B,x'}$. *Ненаблюдаемым ядром* системы B, обозначаемым через U_B, называется множество состояний, неразличимых с нулем в V. Из линейности отображений $\sigma(B,u,t)$ следует, что U_B — линейное подпространство в V и что x и x' неразличимы тогда и только тогда, когда $x-x'\in U_B$. Следовательно, система B наблюдаема тогда и только тогда, когда $U_B=0$. Справедливы также следующие результаты [1].

Предложение 1. Пусть $B=(V, A_0,\dots,A_m,\lambda_1,\dots,\lambda_p)$ — билинейная система. Тогда: (i) ненаблюдаемое ядро U_B является инвариантным подпространством в V; кроме того, U_B — наибольшее инвариантное подпространство в V, на котором все функционалы λ_i обращаются в нуль; (ii) следующие утверждения эквивалентны:

a) система B наблюдаема;

b) $U_B=0$;

c) для каждой билинейной системы B' с m входами и p выходами существует самое большее один морфизм $F:B'\to B$;

d) каждый морфизм из B в любую билинейную систему с m входами и p выходами инъективен.

Предложение 2. Пусть B и B' — две билинейные системы с m входами и p выходами и одинаковыми отображениями вход-выход, и пусть, кроме того, B наблюдаема. Тогда существует единственный морфизм $B\to B'$.

Следствие. Две наблюдаемые системы B и B' с m входами и p выходами и с одинаковым соответствием вход-выход изоморфны.

В теории линейных систем существует состояние, при выборе которого в качестве начального состояния почти все представляющие интерес в теории реализации отображения становятся линейными, а именно нулевое состояние. Наоборот, в теории билинейных систем нулевое начальное состояние абсолютно неинтересно, поскольку все отображения (и траектории) становятся нулевыми. Поэтому в билинейной системе нельзя выделить какое-либо «хорошее» состояние на роль начального состояния.

Пусть $B=(V, A_0,\dots,A_m,v_0^1,\dots,v_0^k)$
и $\tilde B=(V,\tilde A_0,\dots,\tilde A_m,\tilde v_0^1,\dots,\tilde v_0^k)$ — две билинейные системы с k фиксированными начальными состояниями. Тогда *морфизмом* $F:B\to\tilde B$ называется такое линейное отображение, что $\tilde A_iF=FA_i,\ 0\le i\le m,\ F(v_0^j)=\tilde v_0^j,\ 1\le j\le k.$

Предложение 3. Пусть B — билинейная система с m входами и k начальными состояниями. Тогда следующие условия эквиваленты:

(a) B — достижимая система;

(b) для каждой билинейной системы B' с m входами и k начальными состояниями существует самое большее один морфизм $F:B\to B'$;

(c) каждый морфизм из B' в B сюръективен.

Пусть $B=(V, A_0,\dots,A_m,v_0,\lambda_1,\dots,\lambda_p)$ — билинейная система с m входами, p выходами и начальным состоянием, т.е. здесь. Отображением вход-выход IO_B системы B называется отображение IO_{B,v_0}. Отметим, что для такой системы B можно ввести понятие достижимой оболочки и, следовательно, достижимости, поскольку в этой системе фиксировано начальное состояние.

Предложение 4. Если две достижимые и наблюдаемые билинейные системы $B=(V,A_0,\ldots,A_m,v_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$ и $\tilde{B}=(\tilde{V},\tilde{A}_0,\ldots,\tilde{A}_m,\tilde{v}_0,\tilde{\lambda}_1,\ldots,\tilde{\lambda}_p)$ имеют одинаковые отображения вход-выход, т.е. $IO_B=IO_{\tilde{B}}$, то системы B и $\tilde{B}$ изоморфны.

Это аналог теоремы единственности минимальной реализации для линейных систем.

Остановимся на результатах статьи [1] о канонических формах билинейных систем. Подчеркнем, что все пространства, преобразования и системы определены над полем вещественных чисел R и рассматривается обычная вещественная топология. Обозначения следуют статье [1]. Будем рассматривать билинейные системы с пространством состояний Rn, элементы из Rn записываем в виде столбцов, а линейные функционалы — в виде строк. Тогда билинейная система задается $m+1$ квадратными $n\times n$ матрицами $A_0,\ldots,A_m$. Пусть множество всех таких наборов матриц обозначено через $Bin(n,m)$. Для определения системы с k начальными состояниями надо задать еще k столбцов $x_0^1,\ldots,x_0^k$. Соответственно, задав p строк, получим систему с p выходами. Пусть символы $Bin(n,m)^k$, $Bin(n,m)_p$, $Bin(n,m)_p^k$ обозначают соответственно множества всех билинейных систем с k начальными состояниями, с p выходами, а также с k начальными состояниями и с p выходами. Очевидно, все они являются векторными пространствами размерностей $n^2(m+1)$, $n^2(m+1)+nk$, $n^2(m+1)+np$, $n^2(m+1)+n(k+p)$ соответственно.Пусть $RBin(n,m)^k$ — множество всех достижимых систем $B\in Bin(n,m)^k$, $OBin(n,m)_p$ — множество всех наблюдаемых систем $B\in Bin(n,m)_p$, а $ROBin(n,m)_p^k$ — множество всех достижимых и наблюдаемых систем $B\in Bin(n,m)_p^k$. Пусть $I=(i_1,\ldots,i_s)$ — произвольная последовательность индексов, где $0\le i_j\le m$, и A_I обозначает произведение $A_{i_1}\cdot\ldots\cdot A_{i_s}$. Как известно, система $B=(A_0,\ldots,A_m,x_0^1,\ldots,x_0^k)$ достижима тогда и только тогда, когда векторы вида $A_Ix_0^j$ (при всех I и j) порождают пространство R^n. Из этого следует, что $RBin(n,m)^k$ — открытое подмножество в $Bin(n,m)^k$. Нетрудно проверить, что $OBin(n,m)_p$ и $ROBin(n,m)_p^k$ также являются открытыми подмножествами в пространствах $Bin(n,m)_p$ и $Bin(n,m)_p^k$ соответственно. В терминах матриц две билинейные системы $B=(A_0,\ldots,A_m,x_0^1,\ldots,x_0^k)$ и $\tilde{B}=(\tilde{A}_0,\ldots,\tilde{A}_m,\tilde{x}_0^1,\ldots,\tilde{x}_0^k)$ изоморфны (или эквивалентны), если $MA_iM^{-1}=\tilde{A}_i$, $0\le i\le m$, $Mx_0^j=\tilde{x}_0^j$, $1\le j\le k$ для некоторой невырожденной $n\times n$ матрицы M. Очевидно, это задает действие группы GL_n на все введенные выше пространства и их открытые подмножества.

Предложение 5. Пусть $B,\tilde{B}\in RBin(n,m)^k$ эквивалентны. Тогда существует только одна матрица M, такая, что $M:B\to\tilde{B}$ изоморфизм.

Доказательство. Пусть $N:B\to\tilde{B}$ — еще один изоморфизм. Тогда $Nx_0^j=\tilde{x}_0^j=Mx_0^j$. Кроме того, $NA_i=\tilde{A}_iN$ для всех i $(0\le i\le m)$. Поэтому для всех мультииндексов I выполнены равенства $NA_I=\tilde{A}_IN$. Следовательно,

$$NA_Ix_0^j=\tilde{A}_INx_0^j=\tilde{A}_IMx_0^j=MA_Ix_0^j$$

для всех I и j. Но векторы $A_Ix_0^j$ порождают R^n, поэтому N=M.

Дадим определение канонической формы, например, для систем из $RBin(n,m)^k$. Для других случаев формулировка аналогична.

Определение. *Канонической формой* для систем из $RBin(n,m)^k$ называется отображение

$$F:RBin(n,m)^k\to RBin(n,m)^k$$

такое что, для любой системы $B\in RBin(n,m)^k$ система $F(B)$ эквивалентна системе B; если системы B_1 и B_2 из $RBin(n,m)^k$ эквивалентны, то $F(B_1)=F(B_2)$.

В [1] доказана теорема о непрерывных канонических формах вещественных достижимых билинейных систем, аналогичная теоремам Калмана — Хазевинкеля и Бирнса — Харта [2, 3] о канонических формах достижимых линейных систем над произвольным алгебраическим замкнутым полем.

Теорема. Для $n\ge 2$ непрерывна каноническая форма для систем из множества $RBin(n,m)^k$ не существует.

Дадим краткий набросок доказательства, следуя работе [1]. Прежде всего, заметим, что определенные выше действия являются аналитическими. Рассмотрим действия

$$\begin{aligned}&GL_n\times Bin(n,m)^k\to Bin(n,m)^k,\\&GL_n\times RBin(n,m)^k\to RBin(n,m)^k\end{aligned}\qquad(1.2)$$

Из предложения 5 следует, что действие (1.2) является точным: то есть для систем $B\in RBin(n,m)^k$ равенство MB=B выполняется только для единичной матрицы M, т.е. стабилизатор любой точки из $RBin(n,m)^k$ тривиален. Следующий результат существен для построения фактор-многообразия.

Лемма. Отношение эквивалентности, определяемое действием (1.2), замкнуто: если $\{B_s\}$ и $\{\tilde{B}_s\}$ — две последовательности из $RBin(n,m)^k$, причем B_s и $\tilde{B}_s$ изоморфны для каждого s, и $B_s\to\tilde{B}_\infty$, $\tilde{B}_s\to\tilde{B}_\infty$ при $s\to\infty$, где B_∞, $\tilde{B}_\infty\in RBin(n,m)^k$, то системы B_∞ и $\tilde{B}_\infty$ принадлежат одной орбите, то есть изоморфны.

Таблица

A_0	A_1	x	λ	Примечание
0	0	0	0	Орбита замкнута, размерность 0
0	0	$x=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	0	Орбита незамкнута, размерность 2
0	0	0	$\lambda=(0,1)$	Орбита незамкнута, размерность 2
0	0	$x=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$\lambda=(0,1)$	Орбита незамкнута, размерность 3
$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$	0	0	0	Орбита незамкнута, размерность 2
0	$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$	0	0	Орбита незамкнута, размерность 2
$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$	0	$x=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	0	Орбита незамкнута, размерность 3
$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$	0	$x=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	0	Орбита незамкнута, размерность 4
$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$	0	0	$\lambda=(0,1)$	Орбита незамкнута, размерность 4
$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$	0	0	$\lambda=(1,0)$	Орбита незамкнута, размерность 3
$\begin{pmatrix}0&a\\0&0\end{pmatrix},\ a\neq 0$	0	$x=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$\lambda=(0,1)$	Орбита незамкнута, размерность 3
$\begin{pmatrix}0&a\\0&0\end{pmatrix},\ a\neq 0$	$\begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix},\ b\neq 0$	$x=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$\lambda=(0,1)$	Орбита незамкнута, размерность 3

Простое доказательство этой леммы имеется в [1].

Из замкнутости отношения эквивалентности и точности действия (1.2) вытекает, что множество $ER(n,m)^k$ орбит этого действия можно наделить структурой аналитического многообразия, причем так, что каноническая проекция

$$\pi : RBin(n,m)^k \to ER(n,m)^k$$

будет субмерсией (т.е. π имеет в каждой точке максимальный ранг) и $RBin(n,m)^k$ окажется главным расслоением над $ER(n,m)^k$ со структурной группой GL_n. Тогда существование непрерывной канонической формы F эквивалентно существованию непрерывного сечения этого расслоения, т.е. его тривиальности. В действительности, построенное расслоение оказывается нетривиальным (см. доказательство в [1]), что и приводит к утверждению теоремы.

Инварианты и нуль-формы билинейных систем

Рассмотрим пространство $Bin(n,m)_p^k$ билинейных систем с k начальными стояниями и с p выходами. Нас будут интересовать полиномиальные инварианты таких систем относительно действия подобия. Билинейную управляемую систему $B \in Bin(n,m)_p^k$ можно рассматривать как набор из $m+1$ квадратных $n \times n$ матриц $A_i,\ 0 \le i \le m$, векторов $x_1,...,x_k$ размерности n, и p ковекторов $\lambda_1,...,\lambda_p$ размерности n. Тогда рассматриваемое действие группы GL_n на систему есть в точности действие GL_n на указанный набор (матрицы, векторы, ковекторы), индуцированное преобразованием базисов в n-мерном пространстве состояний

$$T \circ (A_0,...,A_m,x_1,...,x_k;\lambda_1,...,\lambda_p) = (TA_iT^{-1},...,TA_mT^{-1};Tx_1,...,Tx\ ;\lambda_1T\ \ ,...,\lambda\ T\ \ ),$$

$$Tx_1,...,Tx_k;\lambda_1T^{-1},...,\lambda_pT^{-1}),$$

где $T \in GL_n$. Следовательно, задача свелась к нахождению базиса совместных инвариантов набора $m+1$ квадратных $n \times n$ матриц и семейств k векторов и p ковекторов размерности n. Основываясь на результатах статьи [4], где рассматривалось аналогичное действие специальной линейной группы SL_n на то же самое пространство и был предъявлен базис соответствующей алгебры инвариантов $T_{m+1,k,p}$, можно найти элементы, порождающие алгебру $A_{m+1,k,p}$ полиномиальных инвариантов билинейных систем. Дальше рассматриваем случай, когда $n=2,\ m=1,\ k=p=1$, то есть пространство $Bin(2,1)_1^1,\ \dim Bin(2,1)_1^1 = 12$, соответственно — инварианты из алгебры $A_{2,1,1}$. Так как стабилизатор общей системы состоит только из единичной матрицы, то размерность общей орбиты равна 4 (размерность группы GL_2). Размерность алгебраического фактора будет тогда 12 – 4 = 8. Пусть $B=(A_0,A_1,x,\lambda) \in Bin(2,1)_1^1$. В этом случае образующими для алгебры $A_{2,1,1}$ будут, по крайней мере, следующие элементы:

$$TrA_0,\ \det A_0,\ TrA_1,\ \det A_1,\ Tr(A_0A_1),\ \lambda x,\ \lambda A_0x,$$
$$\lambda A_1x,\ \lambda A_0A_1x,\ \lambda A_1A_0x,\ \lambda A_0A_1A_0x,\ \lambda A_1A_0A_1x\quad .$$

Нуль-формы — это системы $B=(A_0,A_1,x,\lambda)$, для которых эти инварианты равны нулю. Понятие нуль-формы (точки нуль-слоя отображения факторизации), которое впервые ввел Д. Гильберт, является важным элементом в решении проблем классификации [5]. Так как $TrA_0 = \det A_0\ \ = \det A_0 = TrA_1 = \det A_1 = 0$, то матрицы A_0 и A_1 нильпотентны. Составим часть таблицы примеров простейших нуль-форм, в каждой строке которой будет содержаться представитель ровно одной орбиты билинейных систем для группы GL_n.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sussmann H. F. Minimal realizations and canonical forms for bilinear systems // J. Franklin Inst.— 1976.— 301, № 6. C. 593–604.
2. Hazewinkel M., Kalman R. E. On invariants, canonical forms and moduli for linear, finite dimensional dynamical systems // Lect. Notes Econ. and Math. Syst. Theory.— 1976.— 131.— C. 48–60.
3. Byrnes C.I., Hurt N. E. On the moduli of linear dynamical systems // Adv. in Math. Studies in Analysis.— 1979.— 4.— C. 83–122.
4. Procesi C. The invariant theory of n×n matrices // Adv. Math.— 1976.— 19, № 3.— C. 306–381.
5. Крафт Х. Геометрические методы в теории инвариантов. М., 1987. 308 с.

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»