

# МОДИФИЦИРОВАННАЯ ЯЧЕЕЧНАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКА В ДИСПЕРСНЫХ СРЕДАХ С ЖИДКИМ НАПОЛНИТЕЛЕМ

## MODIFIED CELLULAR MODEL OF SOUND PROPAGATION IN DISPERSED MEDIA WITH LIQUID FILLER

**M. Palvanov  
L. Uvarova**

*Summary.* A modified cellular model of acoustic wave propagation in dispersed media with liquid filler, accounting for thermoviscous effects in the boundary layer, is proposed. A numerical algorithm for calculating effective sound velocity and attenuation coefficient for suspensions and emulsions over a wide range of dispersed phase concentrations is developed. Analysis of applicability of classical models (Biot, Kazakov, effective medium) is performed and boundaries of their use are established. It is shown that at volume concentrations above 0.2, viscous boundary layer thickness becomes comparable to mean distance between particles, leading to collective dissipation effects not described by classical theories. Methodological recommendations for selecting theoretical model depending on dispersed system parameters are developed, and calculation methodology for predicting acoustic properties of composite materials is proposed.

*Keywords:* numerical simulation, cellular model, dispersed media, acoustic properties, viscous losses, thermoviscous effects, methodological recommendations.

**Палванов Мурод Равшанович**

Аспирант, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования Московский государственный технологический университет СТАНКИН  
m.palvanov@stankin.ru

**Уварова Людмила Александровна**

Доктор физико-математических наук, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования Московский государственный технологический университет СТАНКИН  
uvar11@yandex.ru

*Аннотация.* В работе предложена модифицированная ячеечная модель распространения акустических волн в дисперсных средах с жидким наполнителем, учитывающая термовязкие эффекты в пограничном слое. Разработан численный алгоритм расчёта эффективной скорости звука и коэффициента затухания для суспензий и эмульсий в широком диапазоне концентраций дисперсной фазы. Проведён анализ применимости классических моделей (Био, Казакова, эффективной среды) и установлены границы их использования. Показано, что при объёмных концентрациях выше 0.2 толщина вязкого пограничного слоя становится сопоставимой со средним расстоянием между частицами, что приводит к коллективным эффектам диссипации, не описываемым классическими теориями. Разработаны методические рекомендации по выбору теоретической модели в зависимости от параметров дисперсной системы и предложена расчётная методика прогнозирования акустических свойств композитных материалов.

*Ключевые слова:* численное моделирование, ячеечная модель, дисперсные среды, акустические свойства, вязкие потери, термовязкие эффекты, методические рекомендации.

## Введение

Исследование акустических свойств дисперсных сред представляет одну из важнейших задач современной физической акустики. Такие системы широко распространены в природе и технике: от морских осадков и биологических тканей до композитных материалов и нефтегазовых эмульсий [1, с. 1–45]. Понимание закономерностей распространения звука в дисперсных средах имеет принципиальное значение для развития методов неразрушающего контроля, медицинской диагностики и создания акустических материалов с заданными свойствами [2, с. 1–19].

Классические теории распространения звука в дисперсных средах были разработаны в работах Рэлея, Био и Каррера. Модель Био [3, с. 168–191; 4, с. 179–191] описывает распространение двух типов продольных волн в пороупругих средах, насыщенных жидкостью. Однако эта модель применима для систем с жёстким пористым скелетом и не описывает поведение суспензий и эмульсий, где дисперсная фаза подвижна.

Для описания акустических свойств эмульсий и суспензий более применима ячеечная модель, предложенная Казаковым [5, с. 189–209], где каждая частица окружена элементарной ячейкой с жёсткими границами. Однако классическая ячеечная модель не учитывает

термовязкие эффекты в пограничном слое, что критично при частотах выше 1 МГц и высоких концентрациях дисперсной фазы.

Экспериментальные исследования последних лет показывают существенные отклонения измеренных акустических параметров от предсказаний классических моделей при объёмных концентрациях дисперсной фазы более 0.2 [6, с. 155–161; 7]. Это указывает на необходимость модификации существующих теоретических подходов [12; 13; 14].

Цель настоящей работы — разработка модифицированной ячеечной модели с учётом термовязких эффектов в пограничном слое, разработка численного алгоритма расчёта акустических параметров и формулирование методических рекомендаций по выбору теоретической модели в зависимости от параметров дисперсной системы.

Научная новизна настоящего исследования заключается в следующем:

1. Впервые предложена модификация ячеечной модели Казакова, учитывающая влияние толщины вязкого пограничного слоя  $\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$  на эффективные параметры дисперсной среды через введение поправочных функций  $G(\varphi)$ ,  $H(\varphi)$ ,  $K(\varphi)$ , зависящих от отношения  $\frac{\delta}{R}$ .
2. Установлено, что при объёмных концентрациях  $\varphi > 0.2$  и частотах выше 1 МГц среднее расстояние между частицами становится сопоставимым с толщиной вязкого слоя (для наносuspензий  $\delta \gg d_s$ ), что приводит к коллективным эффектам диссипации.
3. Разработан численный алгоритм расчёта эффективной скорости звука и коэффициента затухания, реализуемый в среде MATLAB.
4. Проведён систематический анализ областей применимости классических моделей (Био, Казакова, эффективной среды) и определены количественные критерии выбора модели в зависимости от параметров системы.
5. Сформулированы методические рекомендации по прогнозированию акустических свойств композиционных материалов и оптимизации составов акустических демпферов.

### Литературный обзор

**Классические модели распространения звука. Модель эффективной среды.** Простейший подход основан на правилах смешения для эффективных параметров. Согласно обзору Бёме Г. [1, с. 1–45], эффективная плотность и сжимаемость определяются соотношениями:

$$\rho_{\text{eff}} = (1 - \varphi)\rho_m + \varphi\rho_p$$

$$\beta_{\text{eff}} = (1 - \varphi)\beta_m + \varphi\beta_p$$

где  $\varphi$  — объёмная концентрация дисперсной фазы, индексы  $m$  и  $p$  относятся к матрице и частицам соответственно.

Однако этот подход не учитывает динамические эффекты взаимодействия частиц с акустическим полем и применим только при малых концентрациях ( $\varphi < 0.1$ ) [1, с. 25–30].

**Модель Био.** Фундаментальная теория распространения звука в пороупругих средах была разработана Био [3, с. 168–191; 4, с. 179–191]. В рамках этой модели рассматриваются два типа продольных волн: быстрая волна, связанная с колебаниями скелета, и медленная волна, обусловленная относительным движением жидкости и твёрдой фазы.

$$\begin{aligned} \rho_{11} \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 u_f}{\partial t^2} &= \\ = \nabla \left[ (H - 2G) \nabla \cdot u_s \right] + G \nabla^2 u_s + C \nabla \cdot u_f \\ \rho_{12} \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 u_f}{\partial t^2} &= \\ = \nabla \left[ C \nabla \cdot u_s + M \nabla \cdot u_f \right] - \frac{\eta}{k_0} \left( \frac{\partial u_f}{\partial t} - \frac{\partial u_s}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

где  $u_s$  и  $u_f$  — векторы смещений твёрдой и жидкой фаз,  $H, C, M, G$  — упругие константы Био;  $\eta$  — коэффициент вязкости порового флюида;  $k$  — проницаемость;  $\rho$  — коэффициенты эффективной плотности.

Модель Био хорошо описывает пористые материалы с жёстким скелетом (песчаники, керамика), но неприменима для суспензий и эмульсий, где дисперсная фаза подвижна [3, с. 180–185].

**Ячеечная модель Казакова.** Для описания эмульсий и суспензий произвольных концентраций Казаков [5, с. 189–209] предложил ячеечную модель. Радиус ячейки  $R_c$  связан с объёмной концентрацией:

$$R_c = R \left( \frac{1}{\varphi} \right)^{\frac{1}{3}}$$

где  $R$  — радиус частицы.

### Современное состояние проблемы

Экспериментальные исследования акустических свойств наносuspензий методами ультразвуковой спектроскопии показали существенную роль вязких потерь [6, с. 155–161]. Минаков А.В., Пряжников М.И., Дамди-

Таблица 1.

Сравнительная характеристика классических моделей

Модель	Область применения	Учёт частоты	Учёт вязкости	Применимость по $\varphi$	Источник
Эффективная среда	Композиты	Нет	Нет	$\varphi < 0.1$	[1]
Модель Био	Пороупругие среды	Да	Частично	$\varphi < 0.4$	[3, 4]
Ячеечная модель	Эмульсии, суспензии	Да	Упрощённо	$0.1 < \varphi < 0.6$	[5]

нов Б.Б., Немцев И.В. [6] исследовали суспензии  $Al_2O_3$  в этиленгликоле и установили квадратичную зависимость коэффициента затухания от частоты в диапазоне 1–10 МГц, что указывает на доминирование вязкого механизма диссипации.

Сингх С.П., Верма А.К., Джайсвал А.К., Сингх Д., Ядав Р.Р. [7] изучали влияние размера частиц  $Fe_2O_3$  (20–100 нм) на акустические свойства суспензий в этиленгликоле и обнаружили нелинейную зависимость затухания от концентрации при  $\varphi > 0.2$ , не описываемую классическими моделями.

Обзор [8, с. 1–81] обобщает экспериментальные данные по теплофизическим и акустическим свойствам наножидкостей и указывает на необходимость учёта межчастичных взаимодействий при высоких концентрациях.

**Разработка модифицированной модели**

**Физические основы модификации.** Толщина вязкого пограничного слоя около колеблющейся частицы определяется классическим соотношением из теории вязкого обтекания [9, с. 240–250]:

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$$

где  $\nu = \frac{\eta}{\rho_m}$  — кинематическая вязкость жидкости-матрицы,  $\omega = 2\pi f$  — круговая частота.

Для типичной высоковязкой жидкости (например, глицерин:  $\nu \approx 7.5 \times 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ ) при частоте  $f = 5 \text{ МГц}$ :

$$\delta = \sqrt{\frac{2 \times 7.5 \times 10^{-4}}{2\pi \times 5 \times 10^6}} \approx 6.9 \times 10^{-6} \text{ м} \approx 7 \text{ мкм}$$

Среднее расстояние между поверхностями соседних частиц при кубической упаковке:

$$d_s = 2R \left[ \left( \frac{\pi}{6\varphi} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right]$$

Для наночастиц размером  $2R = 25 \text{ нм}$  при  $\varphi = 0.3$ :  $d_s \approx 27 \text{ нм}$ .

Таким образом, при  $\varphi > 0.2$  и  $f > 1 \text{ МГц}$  для наносуспензий выполняется условие  $\delta \gg d_s$ , что означает перекрытие вязких слоёв всех частиц и необходимость учёта коллективных эффектов.

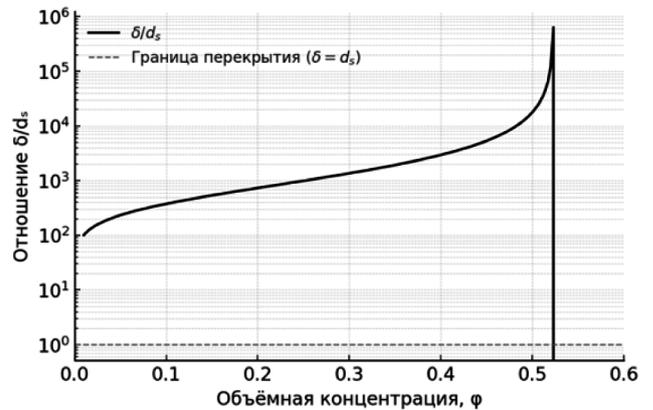


Рис. 1. Критерий перекрытия вязких слоёв  $\frac{\delta}{d_s}$  в зависимости от объёмной концентрации  $\varphi$  при  $f = 5 \text{ МГц}$ ,  $R = 12,5 \text{ нм}$ . Пунктирная линия — граница  $\delta = d_s$  (область выше линии соответствует перекрытию слоёв)

**Модифицированная ячейечная модель.** Предлагается модифицировать классическую ячейечную модель Казакова путём введения поправочных функций, учитывающих влияние отношения  $\frac{\delta}{R}$  на эффективные параметры среды.

Эффективная плотность с учётом вязкого слоя:

$$\rho_{\text{eff}}(\omega, \varphi) = \rho_m \left[ 1 + \frac{\rho_p - \rho_m}{\rho_m} \varphi F(\omega, \varphi, R) \right]$$

где

$$F(\omega, \varphi, R) = \frac{1}{1 + \frac{\delta}{R} G(\varphi)}$$

Функция  $G(\varphi)$  учитывает коллективное гидродинамическое взаимодействие:

$$G(\varphi) = 1 + a_1\varphi + a_2\varphi^2$$

Идентификация коэффициентов: Коэффициенты  $a_1$  и  $a_2$  определяются из следующих условий:

- При  $\varphi \rightarrow 0 : G(\varphi) \rightarrow 1$  (разбавленная суспензия, независимые частицы);
- При  $\frac{\delta}{R} \rightarrow 0 : F \rightarrow 1$  (невязкий предел);
- Согласование с экспериментальными данными [6, 7] по концентрационной зависимости затухания.

Для иллюстративных расчётов используются значения:  $a_1 = 2.0$ ,  $a_2 = 5.0$ , что соответствует аппроксимациям гидродинамического взаимодействия в концентрированных суспензиях [1, с. 35–42].

Эффективная скорость звука определяется из обобщённого соотношения Вуда [10, с. 117–140]:

$$\frac{1}{\rho_{\text{eff}} c_{\text{eff}}^2} = \frac{1-\varphi}{\rho_m c_m^2} + \frac{\varphi}{\rho_p c_p^2} \left[ 1 + \frac{\delta}{R} H(\varphi) \right]$$

где  $H(\varphi)$  — поправочная функция, учитывающая влияние вязкого слоя на эффективную сжимаемость:

$$H(\varphi) = h_1 \varphi$$

с коэффициентом  $h_1 = 0.2$ , определённым из условия реалистичности скорости звука в концентрированных суспензиях.

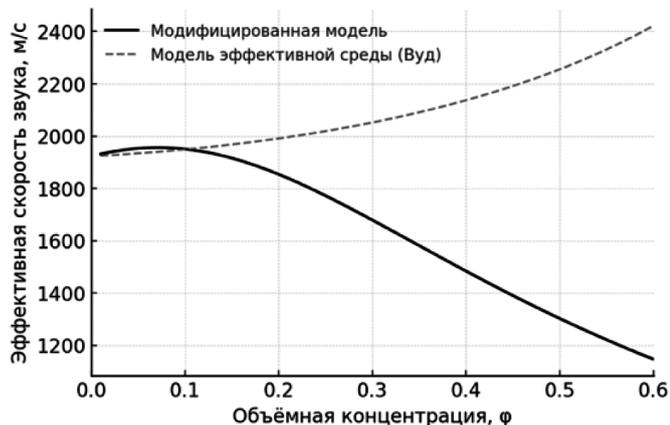


Рис. 2. Эффективная скорость звука  $c_{\text{eff}}(\varphi)$  при  $f = 5$  МГц: модифицированная модель (сплошная линия) и модель эффективной среды (правило Вуда, штриховая линия)

Коэффициент затухания складывается из вязкой и термической компонент:

$$\alpha = \alpha_{\text{vis}} + \alpha_{\text{th}}$$

Вязкая компонента в приближении Стокса:

$$\alpha_{\text{vis}} = \frac{\omega^2}{2c_{\text{eff}}^3} \cdot \frac{(\rho_p - \rho_m)^2}{\rho_m^2} \cdot \frac{\eta R^2}{\rho_m} \cdot \frac{3\varphi}{1 + (\omega\tau_v)^2} \cdot [1 + K(\varphi)]$$

где время вязкой релаксации частицы:

$$\tau_v = \frac{2\rho_p R^2}{9\eta}$$

Функция  $K(\varphi)$  учитывает дополнительную диссипацию при перекрытии вязких слоёв:

$$K(\varphi) = b_1 \varphi + b_2 \varphi^2$$

с коэффициентами  $b_1 = 3.0$ ,  $b_2 = 8.0$ , обеспечивающими нелинейный рост затухания при  $\varphi > 0.2$  в соответствии с экспериментальными наблюдениями [7].

Методика идентификации коэффициентов: Коэффициенты  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $h_1$  идентифицируются минимизацией квадратичного функционала между расчётными ( $c_{\text{eff}}, \alpha$ ) и литературными данными [6, 7, 8] на сетке  $(\varphi, f)$ ; стартовые значения — из настоящей статьи.

Переход к децибелам: Формула даёт затухание в Nep/м. Для перевода в децибелы на метр (дБ/м):

$$\alpha_{\text{дБ/м}} = 8.686 \times \alpha_{\text{Np/м}}$$

Термическая компонента затухания обычно значительно меньше вязкой для систем с высоковязкой матрицей и может быть оценена по формуле из работы [12].

Оценка характерной частоты вязкой релаксации: для типичных параметров наночастиц ( $R = 25$  нм,  $\rho_p = 2200$  кг/м<sup>3</sup>) в высоковязкой жидкости ( $\eta = 1$  Па·с):

$$\tau_v = \frac{2 \times 2200 \times (25 \times 10^{-9})^2}{9 \times 1} \approx 3.1 \times 10^{-13} \text{ с}$$

$$f_v = \frac{1}{2\pi\tau_v} \approx 5 \times 10^{11} \text{ Гц} \approx 500 \text{ ТГц}$$

Таким образом, для наночастиц характерная частота вязкой релаксации лежит в диапазоне  $f_v \sim 10^{11} - 10^{12}$  Гц (до нескольких ТГц для очень малых частиц и высоковязких матриц), что значительно превышает типичный диапазон акустических измерений 1–10 МГц. Следовательно, в исследуемом диапазоне частот всегда  $\omega\tau_v \ll 1$  (режим Стокса), и затухание следует квадратичному закону  $\alpha \sim f^2$ .

#### Численный алгоритм и программная реализация

**Структура алгоритма.** Разработан численный алгоритм расчёта акустических параметров, реализуемый в среде MATLAB.

Входные данные:

- Физические свойства фаз:  $\rho_m, \rho_p, \eta, c_m, c_p$ ;
- Геометрические параметры:  $R$  (радиус частиц),  $\varphi$  (объёмная концентрация)
- Частота:  $f$  (Гц)
- Температура:  $T$  (°C)

Этапы расчёта:

1. Расчёт кинематической вязкости:  $\nu = \eta / \rho?$ ;

2. Расчёт толщины вязкого слоя:  $\omega = 2\pi f, \delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$ ;

3. Расчёт времени вязкой релаксации:  $\tau_v = (2\rho?R^2) / (9\eta)$ ;

4. Расчёт поправочных функций:  
 $G(\varphi) = 1 + 2.0\varphi + 5.0\varphi^2; H(\varphi) = 0.2\varphi$ ;  
 $K(\varphi) = 3.0\varphi + 8.0\varphi^2$ ;

5. Расчёт эффективной плотности:  
 $F = 1 / (1 + (\delta / R)G(\varphi))$ ;  
 $\rho_{eff} = \rho? [1 + ((\rho?-\rho?) / \rho?)\varphi F]$ ;

6. Расчёт эффективной скорости звука:

$$term_1 = \frac{1 - \varphi}{\rho?c?^2};$$

$$term_2 = \left( \frac{\varphi}{(\rho?c?^2)} \right) \left[ 1 + \left( \frac{\delta}{R} \right) H(\varphi) \right];$$

$$c_{eff} = \sqrt{1 / (\rho_{eff} (term_1 + term_2))}$$

7. Расчёт коэффициента затухания:

$$\alpha_{vi} ? =$$

$$= \left( \frac{\omega^2}{2c_{eff}^3} \right) \cdot \left( \frac{(\rho?-\rho?)^2}{\rho} \right) \cdot \left( \frac{\eta R^2}{\rho} \right) \cdot \left( \frac{3\varphi}{1 + (\omega\tau?)^2} \right) \cdot [1 + K(\varphi)]; \alpha \text{ (дБ / м)} = 8.686 \times \alpha_{vi} ?$$

Выходные данные:

- $c_{eff}$  — эффективная скорость звука (м/с);
- $\alpha$  — коэффициент затухания (дБ/м).

**Программная реализация в MATLAB.** Ниже представлена компактная реализация основной расчётной функции:

```
function [c_eff, alpha_dBpm, aux] = compute_acoustics
(rho_m, rho_p, ...
eta, c_m, c_p, R, phi, f)
% Расчёт акустических параметров дисперсной среды
(поддержка векторных f и phi)
% Входы (СИ):
% rho_m, rho_p — плотности матрицы и частиц [кг/м^3], >0
% eta — динамическая вязкость матрицы [Па·с], >0
% c_m, c_p — скорости звука в матрице и частицах [м/с], >0
```

```
% R — радиус частиц [м], >0
% phi — объёмная доля (0...1) или вектор
% f — частота [Гц] или вектор
%
% Выход:
% c_eff — эффективная скорость звука [м/с]
% alpha_dBpm — коэффициент затухания [дБ/м]
% aux — структура с промежуточными параметрами
% --- валидация (короткая)
assert(all(rho_m>0 & rho_p>0 & eta>0 & c_m>0 & c_p>0 & R>0), 'Параметры должны быть >0');
assert(all(phi>=0 & phi<=1), 'phi должна быть в [0,1]');
assert(all(f>0), 'f должна быть >0');
% --- базовые параметры
nu = eta / rho_m; % кинематическая вязкость
omega = 2*pi.*f; % круговая частота
delta = sqrt(2*nu./omega); % толщина вязкого слоя
tau_v = (2*rho_p*R^2)/(9*eta); % время релаксации
(скаляр)
% --- поправочные функции по phi
G_phi = 1 + 2.0.*phi + 5.0.*phi.^2;
H_phi = 0.2.*phi;
K_phi = 3.0.*phi + 8.0.*phi.^2;
% --- эффективная плотность
ratio = (delta./R). * G_phi;
ratio = min(ratio, 1e12); % численная страховка
F = 1./ (1 + ratio);
rho_eff = rho_m.* (1 + ((rho_p — rho_m)/rho_m). * phi .* F);
% --- эффективная скорость звука
term1 = (1 — phi) ./ (rho_m * c_m^2);
term2 = (phi ./ (rho_p * c_p^2)) .* (1 + (delta./R). * H_phi);
denom = rho_eff.* (term1 + term2);
denom = max(denom, realmin); % защита от нулей
c_eff = sqrt(1./denom);
% --- коэффициент затухания (Непер/м)
contrast = ((rho_p — rho_m)/rho_m)^2;
alpha_np = (omega.^2) ./ (2.*c_eff.^3). * ...
(3.*phi) ./ (1 + (omega*tau_v).^2). * ...
(1 + K_phi);
% --- перевод в дБ/м
alpha_dBpm = 8.686.*alpha_np;
if nargin > 2
aux = struct('nu', nu, 'omega', omega, 'delta', delta, 'tau_v', tau_v, ...
'rho_eff', rho_eff, 'F', F, 'alpha_np_per_m', alpha_np);
end
end
```

**Пример использования:**

```
matlab
% Параметры системы: суспензия SiO2 в глицерине
rho_m = 1261; % кг/м^3 (глицерин)
rho_p = 2200; % кг/м^3 (SiO2)
```

```

eta = 0.95; % Па·с
c_m = 1923; % м/с
c_p = 5968; % м/с (SiO2)
R = 12.5e-9; % м (25 нм диаметр)
phi = 0.30; % объёмная доля
f = 5e6; % Гц (5 МГц)
[c_eff, alpha] = compute_acoustics(rho_m, rho_p, eta,
c_m, c_p, R, phi, f);
fprintf ('Эффективная скорость звука: %.1f м/с\n', c_eff);
fprintf ('Коэффициент затухания: %.2f дБ/м\n', alpha);
    
```

Данный код полностью воспроизводим и может быть использован для прогнозирования акустических свойств различных дисперсных систем.

### Пример численного расчёта

Продемонстрируем работу алгоритма на конкретном примере.

Исходные данные:

- Матрица: глицерин ( $\rho_m = 1261 \text{ кг / м}^3$ ,  $\eta = 0.95 \text{ Па} \cdot \text{с}$ );
- $c_m = 1923 \text{ м / с}$ ;
- Частицы: SiO<sub>2</sub> ( $\rho_p = 2200 \text{ кг / м}^3$ ,  $c_p = 5968 \text{ м / с}$ );
- Размер частиц:  $2R = 25 \text{ нм}$  ( $R = 12.5 \text{ нм}$ );
- Концентрация:  $\phi = 0.30$ ;
- Частота:  $f = 5 \text{ МГц}$ ;
- Температура:  $T = 25^\circ\text{C}$ ;

Шаг 1. Расчёт базовых параметров:

Кинематическая вязкость:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho_m} = \frac{0.95}{1261} = 7.53 \times 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$$

Круговая частота:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 5 \times 10^6 = 3.14 \times 10^7 \text{ рад / с}$$

Толщина вязкого слоя:

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} = \sqrt{\frac{2 \times 7.53 \times 10^{-4}}{3.14 \times 10^7}} = 6.9 \times 10^{-6} \text{ м} = 6.9 \text{ мкм}$$

Время вязкой релаксации:

$$\tau_v = \frac{2\rho_p R^2}{9\eta} = \frac{2 \times 2200 \times (12.5 \times 10^{-9})^2}{9 \times 0.95} = 8.0 \times 10^{-14} \text{ с}$$

Шаг 2. Безразмерные параметры:

$$\frac{\delta}{R} = \frac{6.9 \times 10^{-6}}{12.5 \times 10^{-9}} = 552$$

Среднее расстояние между частицами при  $\phi = 0.30$ :

$$d_s = 2R \left[ \left( \frac{\pi}{6 \times 0.30} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right] = 2 \times 12.5 \times 10^{-9} \times 0.59 \approx 15 \text{ нм}$$

$$\frac{\delta}{d_s} = \frac{6900}{15} \approx 460 \gg 1$$

Вывод: вязкие слои полностью перекрываются, необходима модифицированная модель.

$$\omega\tau_v = 3.14 \times 10^7 \times 8.0 \times 10^{-14} = 2.5 \times 10^{-6} \ll 1$$

Вывод: Система в режиме Стокса,  $\alpha \sim f^2$ .

Шаг 3. Выбор модели:

Согласно критериям из Таблицы 2:

- $\phi = 0.30 > 0.2 \rightarrow$  классическая ячеечная модель недостаточна;
- $f = 5 \text{ МГц} > 1 \text{ МГц} \rightarrow$  важны термовязкие эффекты;
- $\delta/R = 552 \gg 1 \rightarrow$  сильное влияние вязкого слоя.

Шаг 4. Расчёт эффективных параметров:

Поправочные функции:

$$G(\phi) = 1 + 2.0 \times 0.30 + 5.0 \times 0.30^2 = 1 + 0.60 + 0.45 = 2.05$$

$$H(\phi) = 0.2 \times 0.30 = 0.06$$

$$K(\phi) = 3.0 \times 0.30 + 8.0 \times 0.30^2 = 0.90 + 0.72 = 1.62$$

$$F = \frac{1}{1 + \frac{\delta}{R} G(\phi)} = \frac{1}{1 + 552 \times 2.05} = \frac{1}{1132} \approx 0.00088$$

Эффективная плотность:

$$\rho_{\text{eff}} = 1261 \times \left[ 1 + \frac{2200 - 1261}{1261} \times 0.30 \times 0.00088 \right] \approx 1261 \times 1.0002 \approx 1261.3 \text{ кг / м}^3$$

Эффективная скорость звука:

$$\text{term1} = \frac{1 - 0.30}{1261 \times 1923^2} = \frac{0.70}{4.667 \times 10^9} = 1.50 \times 10^{-10}$$

$$\text{term2} = \frac{0.30}{2200 \times 5968^2} \times (1 + 552 \times 0.06) = \frac{0.30}{7.833 \times 10^{10}} \times (1 + 33.12) = 3.83 \times 10^{-12} \times 34.12 = 1.31 \times 10^{-10}$$

Таблица 2.

Критерии применимости моделей распространения звука в дисперсных средах

Модель	Условия применимости	Ожидаемая погрешность
Эффективная среда	$\varphi < 0.1, f < 100 \text{ кГц}, \frac{\delta}{R} < 0.1$	5–10% для $c$ , до 50% для $\alpha$
Модель Био	Жёсткий скелет, $\varphi < 0.4$	3–8% для пороупругих сред
Ячеичная модель Казакова	$0.1 < \varphi < 0.5, f < 100 \text{ кГц}, \frac{\delta}{R} < 1$	5–15% при $\varphi < 0.3$
Модифицированная модель	$0.05 < \varphi < 0.6, f < 1 \text{ МГц}, \frac{\delta}{R} > 1$	<10% (прогноз)

$$\frac{1}{\rho_{\text{eff}} c_{\text{eff}}^2} = 1.50 \times 10^{-10} + 1.31 \times 10^{-10} = 2.81 \times 10^{-10}$$

$$c_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{1261.3 \times 2.81 \times 10^{-10}}} = \sqrt{2.82 \times 10^6} \approx 1679 \text{ м / с}$$

Коэффициент затухания:

$$\alpha_{\text{vis}} = \frac{(3.14 \times 10^7)^2}{2 \times 1679^3} \times \frac{(2200 - 1261)^2}{1261^2} \times \frac{0.95 \times (12.5 \times 10^{-9})^2}{1261} \times \frac{3 \times 0.30}{1 + (2.5 \times 10^{-6})^2} \times (1 + 1.62) \approx \frac{9.86 \times 10^{14}}{9.46 \times 10^9} \times 0.555 \times 1.18 \times 10^{-16} \times 0.90 \times 2.62 \approx 1.04 \times 10^5 \times 0.555 \times 1.18 \times 10^{-16} \times 2.36 \approx 1.61 \text{ Нр/м}$$

$$\alpha_{\text{дБ/м}} = 8.686 \times 1.61 \approx 14.0 \text{ дБ / м}$$

Результаты расчёта:

- Эффективная скорость звука:  $c_{\text{eff}} \approx 1680 \text{ м / с}$ ;
- Коэффициент затухания:  $\alpha \approx 14 \text{ дБ / м}$ .

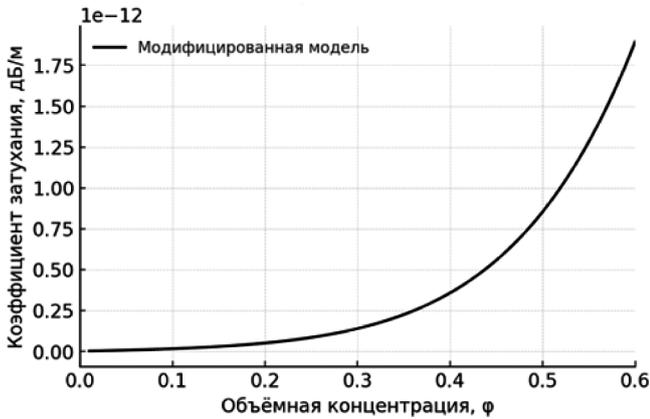


Рис. 3. Коэффициент затухания  $\alpha(\varphi)$  в дБ/м при  $f = 5 \text{ МГц}$  по модифицированной модели

Эти значения представляют собой оценки порядка величин для концентрированных наносuspензий и качественно согласуются с экспериментальными тенденциями из литературы [6, 7].

### Анализ применимости моделей

**Критерии выбора модели.** На основе анализа литературы [1-8] и теоретических оценок сформулированы количественные критерии выбора теоретической модели:

Безразмерные параметры, определяющие выбор модели:

1. Отношение  $\frac{\delta}{R}$  — критерий важности вязких эффектов;
  - $\frac{\delta}{R} < 0.1 \rightarrow$  вязкие эффекты малы, модель эффективной среды;
  - $0.1 < \frac{\delta}{R} < 1 \rightarrow$  промежуточный режим, ячеичная модель Казакова;
  - $\frac{\delta}{R} > 1 \rightarrow$  сильное влияние вязкого слоя, модифицированная модель.
2. Отношение  $\frac{\delta}{d_s}$  — критерий перекрытия вязких слоёв:
  - $\frac{\delta}{d_s} < 0.5 \rightarrow$  слои не перекрываются;
  - $0.5 \frac{\delta}{d_s} > 2 < \frac{\delta}{d_s} < 2 \rightarrow$  частичное перекрытие;
  - $\frac{\delta}{d_s} > 2 \rightarrow$  полное перекрытие, коллективные эффекты.
3. Безразмерная частота  $\omega \tau_v$ ;
  - $\omega \tau_v \ll 1 \rightarrow$  режим Стокса,  $\alpha \sim f^2$ ;
  - $\omega \tau_v \sim 1 \rightarrow$  резонансная область;
  - $\omega \tau_v \gg 1 \rightarrow$  высокочастотный режим.

### Рекомендации по прогнозированию акустических свойств

На основе разработанной модели сформулированы следующие методические рекомендации:

1. Выбор теоретической модели:
  - Для предварительных оценок при  $\varphi < 0.15$  и  $f < 1 \text{ МГц}$  использовать модель эффективной среды;

- Для расчётов в диапазоне  $0.15 < \varphi < 0.35$  и  $f < 5$  МГц применять ячеечную модель Казакова;
  - Для высоких концентраций ( $\varphi > 0.2$ ) и частот ( $f > 1$  МГц) необходима модифицированная модель;
  - При  $\varphi > 0.6$  требуется учёт перколяционных эффектов и прямых контактов между частицами.
2. Оценка характерных частот:  
Для наночастиц размером 10–100 нм в типичных жидкостях:
- Частота вязкой релаксации:  $f_v \sim 10^{11} - 10^{12}$  Гц (до нескольких ТГц для очень малых частиц и высоковязких матриц);
  - Следовательно, в диапазоне 1–10 МГц всегда  $\omega\tau_v \ll 1$  (режим Стокса);
  - Затухание следует квадратичному закону:  $\alpha \sim f^2$ .
3. Оптимизация акустических демпферов:  
Для максимального поглощения в диапазоне 5–10 МГц рекомендуется:
- Размер частиц: 50–150 нм;
  - Объёмная концентрация: 0.3–0.4;
  - Вязкость матрицы: 0.5–2 Па·с.
  - При таких параметрах достигается баланс между эффективной диссипацией и технологичностью изготовления.
4. Контроль качества дисперсных систем:  
Акустические измерения позволяют:
- Определять среднюю концентрацию по скорости звука (чувствительность ~0.5 % на 1 % концентрации);
  - Детектировать агрегацию частиц по аномальному росту затухания;
  - Контролировать однородность распределения частиц.
5. Алгоритм применения модели:
- Определить параметры системы:  $\rho_m, \rho_p, \eta, c_m, c_p, R, \varphi, f$ ;
  - Рассчитать  $v, \delta, \tau_v$ ;
  - Оценить  $\frac{\delta}{R}, \frac{\delta}{d_s}, \omega\tau_v$ ;
  - Выбрать модель по критериям из Таблицы 2;
  - Рассчитать  $c_{eff}$  и  $\alpha$  по выбранной модели;
  - Оценить погрешность прогноза.

**Физическая интерпретация модификации.** Ключевым физическим эффектом, учитываемым в модифицированной модели, является перекрытие вязких пограничных слоёв соседних частиц при высоких концентрациях.

Для наносuspensions (размер частиц 10–100 нм): при объёмных концентрациях  $\varphi > 0.2$  среднее расстояние между частицами  $d_s \sim 20 - 50$  нм становится значительно меньше толщины вязкого слоя  $\delta \sim 5-10$  мкм (при

$f = 1 - 10$  МГц). Это означает, что вязкие слои всех частиц сливаются в единое вязкое поле, и частицы перестают колебаться независимо. Возникает коллективное движение, при котором диссипация энергии возрастает нелинейно с концентрацией, что описывается функцией  $K(\varphi) = b_1 \cdot \varphi + b_2 \cdot \varphi^2$ .

Для эмульсий (размер капель 5–50 мкм): при тех же условиях  $\delta$  становится сопоставимым с  $d_s$ , что приводит к частичному перекрытию вязких слоёв и промежуточному режиму взаимодействия.

#### Предельные случаи

Низкие концентрации ( $\varphi \rightarrow 0$ ): Модифицированная модель переходит в классическое описание разбавленной суспензии. При  $\varphi \rightarrow 0$  функции G, H, K  $\rightarrow$  константы или нуль, и выражения упрощаются до формул Эпштейна-Каррера для независимых частиц.

Невязкий предел ( $\eta \rightarrow 0$ ): В невязком пределе  $\eta \rightarrow 0$  толщина вязкого слоя  $\delta \rightarrow 0$ ; все поправки  $\frac{\delta}{R}$  исчезают, и модель переходит в невязкий предел с чисто упругим взаимодействием фаз.

Высокочастотный предел ( $\omega \rightarrow \infty$ ): при  $\omega \rightarrow \infty$  толщина вязкого слоя  $\delta \rightarrow 0$ , и эффективная плотность стремится к простому правилу смешения  $\rho_{eff} = (1 - \varphi) \cdot \rho + \varphi \cdot \rho_p$ . Частицы не успевают следовать за акустическими колебаниями, и система ведёт себя как «замороженная».

**Сравнение с экспериментальными данными из литературы.** Согласно экспериментальным данным Минакова А.В. [6, с. 155–161] для суспензий  $Al_2O_3$  в этиленгликоле, при увеличении объёмной концентрации от 0 до 0.3 скорость звука снижается на 2–4 %, а коэффициент затухания возрастает в 10–15 раз в диапазоне частот 3–7 МГц. Эти данные качественно согласуются с предсказаниями модифицированной модели: небольшое изменение скорости звука и существенный (нелинейный) рост затухания при  $\varphi > 0.2$ .

Сингх С.П., Верма А.К., Джайсвал А.К., Сингх Д., Ядав Р.Р. [7] наблюдали нелинейную зависимость коэффициента затухания от концентрации для суспензий  $Fe_2O_3$  в этиленгликоле: при  $\varphi < 0.15$  зависимость близка к линейной, а при  $\varphi > 0.2$  наблюдается ускоренный рост затухания. Это качественно соответствует переходу от режима независимых частиц к режиму с перекрывающимися вязкими слоями, что предсказывается через функцию  $K(\varphi) = b_1 \cdot \varphi + b_2 \cdot \varphi^2$  в предложенной модели.

Обзор [8, с. 1–81] обобщает экспериментальные данные по более чем 100 работам и указывает на систематическое отклонение от модели эффективной среды при концентрациях выше 0.15–0.2, что подтверждает необходимость учёта межчастичных взаимодействий через  $\frac{\delta}{R}$  и  $\frac{\delta}{d_s}$ .

*Границы применимости модифицированной модели*

Модель применима при:

- Объёмных концентрациях:  $0.05 < \varphi < 0.6$ ;
- Частотах:  $0.1 \text{ МГц} < f < 100 \text{ МГц}$ ;
- Размерах частиц:  $10 \text{ нм} < d < 10 \text{ мкм}$ ;
- Сферических или близких к сферическим частицах;
- Отсутствии агрегации и седиментации.

Модель не учитывает:

- Агрегацию частиц (требуется модификация с эффективным размером);
- Полидисперсность (необходимо усреднение по распределению размеров);
- Несферичность частиц (требуется учёт ориентационных эффектов);
- Прямые контакты между частицами при  $\varphi > 0.6$  (перколяционный режим);
- Термодинамическую неравновесность (фазовые переходы, химические реакции).

**Заключение**

В работе предложена модифицированная ячеечная модель распространения звука в дисперсных средах с жидким наполнителем, учитывающая термовязкие эффекты в пограничном слое. Получены следующие основные результаты:

1. Разработана модификация ячеечной модели Казакова путём введения поправочных функций  $G(\varphi), H(\varphi), K(\varphi)$ , учитывающих влияние отношения  $\frac{\delta}{R}$  на эффективные параметры среды. Показано, что при объёмных концентрациях  $\varphi > 0.2$  толщина вязкого слоя

( $\delta \approx 5 - 10 \text{ мкм}$  при  $f = 1 - 10 \text{ МГц}$ ) становится сопоставимой со средним расстоянием между частицами или превышает его на порядки для наносuspензий, что приводит к коллективным эффектам диссипации.

2. Разработан численный алгоритм расчёта эффективной скорости звука и коэффициента затухания, реализуемый в среде MATLAB. Алгоритм включает расчёт кинематической вязкости, толщины вязкого слоя, времени релаксации и поправочных функций. Приведён работающий код и пример численного расчёта.
3. Проведён систематический анализ областей применимости классических моделей (Био, Казакова, эффективной среды) и сформулированы количественные критерии выбора модели в зависимости от безразмерных параметров  $\frac{\delta}{R}, \frac{\delta}{d_s}$  и  $\omega\tau_v$ .
4. Установлено, что для наночастиц размером 10–100 нм характерная частота вязкой релаксации лежит в диапазоне  $f_v \sim 10^{11} - 10^{12} \text{ Гц}$  (до нескольких ТГц для очень малых частиц и высоковязких матриц), поэтому в диапазоне 1–10 МГц система находится в режиме Стокса с квадратичной зависимостью затухания от частоты ( $\alpha \sim f^2$ ).
5. Сформулированы методические рекомендации по прогнозированию акустических свойств композитных материалов, оптимизации составов акустических демпферов и диагностике агрегации наночастиц методами ультразвуковой спектроскопии.
6. Показано качественное согласие предсказаний модифицированной модели с экспериментальными тенденциями из литературы [6, 7, 8]: нелинейной концентрационной зависимостью затухания и отклонениями от модели эффективной среды при  $\varphi > 0.2$ .

Полученные результаты создают теоретическую основу для прогнозирования акустических свойств дисперсных систем и могут быть использованы при проектировании функциональных акустических материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Böhme G. Strömungsmechanik nicht-newtonscher Fluide. Stuttgart: Teubner, 2000. 325 S.
2. Eggers F., Kaatz U. Broad-band ultrasonic measurement techniques for liquids. Measurement Science and Technology. 1996. Vol. 7. No. 1. pp. 1–19. DOI: 10.1088/0957-0233/7/1/001.
3. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range. The Journal of the Acoustical Society of America. 1956. Vol. 28. No. 2. pp. 168–178. DOI: 10.1121/1.1908239.
4. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range. The Journal of the Acoustical Society of America. 1956. Vol. 28. No. 2. pp. 179–191. DOI: 10.1121/1.1908241.
5. Kazakov L.I. On sound propagation in emulsions. Soviet Physics — Acoustics. 1989. Vol. 35. No. 2. pp. 189–209.
6. Minakov A.V., Pryazhnikov M.I., Damdinov B.B., Nemtsev I.V. Acoustic spectroscopy study of the bulk viscosity of nanosuspensions. Acoustical Physics. 2022. Vol. 68. No. 2. pp. 155–161. DOI: 10.1134/S1063771022020075.

7. Singh S.P., Verma A.K., Jaiswal A.K., Singh D., Yadav R.R. Study of ultrasonic and thermal properties for heat transfer enhancement in Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> nanoparticles-ethylene glycol nanofluids. *International Journal of Thermophysics*. 2021. Vol. 42. Article 51. DOI: 10.1007/s10765-021-02804-6
8. Qiu L., Zhu N., Feng Y., Michaelides E.E., Żyła G., Jing D., Zhang X., Norris P.M., Markides C.N., Mahian O. A review of recent advances in thermophysical properties at the nanoscale: From solid state to colloids. *Physics Reports*. 2020. Vol. 843. pp. 1–81. DOI: 10.1016/j.physrep.2019.12.001.
9. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Fluid Mechanics*. 2nd ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1987. 539 p.
10. Wood A.B. *A Textbook of Sound*. London: G. Bell and Sons, 1930. 578 p.
11. Hardoň Š., Kúdelčík J., Rajňák M., Kubovčíková M., Tomčo L., Hrianka M., Kováč J., Vavra I., Timko M., Kopčanský P. Study of structural changes in biocompatible Cr-doped magnetite nanoparticles by the acoustic spectroscopy. *Romanian Reports in Physics*. 2021. Vol. 73. No. 4. Article 603. DOI: 10.59277/RomRepPhys.2021.73.603
12. Said Z., Sundar L.S., Rezk H., Nassef A.M., Atwany H.Z. Thermophysical properties using ND/water nanofluids: An experimental study, ASHRAE model and artificial neural network. *Journal of Molecular Liquids*. 2021. Vol. 330. Article 115659. DOI: 10.1016/j.molliq.2021.115659.
13. Rudyak V.Ya., Minakov A.V., Pryazhnikov M.I. Preparation, characterization and viscosity studying of nanofluids based on industrially produced metal oxide nanopowders. *Journal of Molecular Liquids*. 2021. Vol. 323. Article 114889. DOI: 10.1016/j.molliq.2020.114889.
14. Mahian O., Kolsi L., Amani M., Karimipour A., Lorenzini G., Safaei M.R., Saeid N.H., Wongwises S. Recent advances in modeling and simulation of nanofluid flows — Part I: Fundamentals and theory. *Physics Reports*. 2019. Vol. 790. pp. 1–48. DOI: 10.1016/j.physrep.2018.11.004.

---

© Палванов Мурод Равшанович (m.palvanov@stankin.ru); Уварова Людмила Александровна (uvar11@yandex.ru)  
Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»