

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ МЕТОДОЛОГИЙ ОБРАБОТКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

RESEARCH OF OPTIMAL LINEAR METHODOLOGIES FOR PROCESSING MEASUREMENT INFORMATION

Yu. Ivanov
N. Krasnenkov

Summary. This article studies the optimal linear methods of processing measurement information for accuracy, robustness, and noise immunity. The purpose of the study is to determine the features and advantages of each of the presented methods, as well as to determine the most rational methodology for signal processing in the context of the selected measurement model.

Keywords: finite-time processing, spectral-finite processing, Kalman filter, feedback, accuracy, robustness, noise immunity.

Иванов Юрий Павлович

Кандидат технических наук, доцент
Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения

Красненков Никита Сергеевич

Аспирант, Санкт-Петербургский государственный
университет аэрокосмического приборостроения
nikita.krasnenkov@gmail.com

Аннотация. В данной статье проводится исследование оптимальных линейных методов обработки измерительной информации на точность, робастность и помехозащищенность. Цель проведенного исследования сводится к определению особенностей и достоинств каждого из представленного метода, а также для определения наиболее рациональной методологии обработки сигналов в контексте выбранной модели измерения.

Ключевые слова: финитно-временная обработка, спектрально-финитная обработка, фильтр Калмана, обратная связь, точность, робастность, помехозащищенность.

Введение

В современном мире фильтрация сигналов на основе фильтра Калмана пользуется широкой популярностью. Это обусловлено его традиционным признанием как наиболее эффективного метода благодаря таким достоинствам, как линейность и оптимальность по среднеквадратичной ошибке оценки [13, 10, 2].

Фильтрация Калмана представляет собой рекуррентный метод обработки сигналов. Данный фильтр характеризуется экономичностью использования памяти вычислительных устройств и обеспечивает наивысшую точность оценки в ситуации, когда модель измерения является линейной и гауссовской с аддитивной погрешностью измерений [5, 3].

Несмотря на вышеперечисленные достоинства Калмановской фильтрации, данный метод не идеален и имеет ряд недостатков [5]. Обозначим недостатки метода фильтрации Калмана:

1. необходимость наличия у полезного сигнала свойства марковости сужает область применения метода, снижая его универсальность;
2. наличие обратной связи в алгоритме приводит к его неустойчивой работе при изменении входных данных. Это влечет за собой низкую робастность и помехозащищенность системы;
3. ограниченная универсальность наблюдается при использовании модели помехи в виде белого шума или коррелированного случайного процесса;

4. необходимость в большом объеме входных данных, содержащих информацию о модели сигнала, о моментах распределений сигнала и помех измерения, является существенным ограничением;
5. обязательное решение нелинейного уравнения Риккати для корректной работы алгоритма фильтрации Калмана представляет собой вычислительно сложную задачу.

Существуют и другие методологии обработки измерительной информации, нивелирующие недостатки фильтра Калмана. В рамках данной статьи будут также рассмотрены следующие методы обработки: финитно-временная обработка без обратной связи, финитно-временная обработка с обратной связью и спектрально-финитная обработка без обратной связи.

Все вышеперечисленные методы линейны, оптимальны, и обладают своими особенностями. вследствие чего возникает необходимость проведения исследования методов на точность, робастность и помехозащищенность, для установления наиболее рационального метода обработки относительно заданной модели измерения.

Математическое описание финитно-временного метода фильтрации без обратной связи

Представим краткое математическое описание финитно-временного метода без обратной связи. Финитно-временная обработка без обратной связи характеризу-

ется устойчивостью в силу отсутствия обратной связи и универсальностью по отношению к коррелированности или некоррелированности погрешностей измерительных моделей. Данный метод обработки является оптимальным по следу матрицы корреляционных моментов ошибок, прост в реализации алгоритмов, и не требует представления сигналов в пространстве состояний [4, 12, 1].

Результат измерения задается векторным случайным временным рядом на заданном отрезке времени:

$$Y_{1_i} = X_{1_i} + H_{1_i}, i = k, k + 1, \dots, N, \quad (1)$$

где $Y_{1_i}^T = |Y_{0_i}, Y_{0_{i-1}}, \dots, Y_{0_{i-k+1}}|$ — вектор размерности $n \cdot k \times 1$;

$X_{1_i}^T = |X_i, X_{i-1}, \dots, X_{i-k+1}|$, $H_{1_i}^T = |H_{0_i}, H_{0_{i-1}}, \dots, H_{0_{i-k+1}}|$ — векторы размерности $m \cdot k \times 1$ и $n \cdot k \times 1$ соответственно.

Оптимальная линейная несмещенная оценка $\hat{X}_{1_i}^*$ сигнала X_{1_i} по наблюдениям Y_{1_i} в i -ый момент времени:

$$\hat{X}_{1_i}^* = A_i^* * Y_{1_i} + X_{H1_i}, i = k, k + 1, \dots, N, \quad (2)$$

где A_i^* — матрица оптимальной оценки в i -ый момент времени, размерности $b \times b$; X_{H1_i} — вектор несмещенных оценок, размерности $b \times 1$.

На основании следствия теоремы ортогонального проецирования оптимальная матрица A_i^* определяется в виде:

$$A_i^* = Kx_{1_i} y_{1_i} * K y_{1_i}^{-1}, i = k, k + 1, \dots, N, \quad (3)$$

где матрица корреляционных моментов взвешенных результатов измерений Ky_{1_i} , размерности $b \times b$, с учетом некоррелированности сигнала и помех измерения.

Математическое описание финитно-временного метода фильтрации с обратной связью

Представим краткое математическое описание финитно-временного метода с обратной связью. Оптимальная финитно-временная обработка с обратной связью является универсальной относительно коррелированности или не коррелированности погрешностей моделей измерения. Этот метод обеспечивает оптимальную оценку по среднеквадратичной ошибки на заданном временном интервале. Он характеризуется простотой реализации алгоритмов и не требует представления сигналов в пространстве состояний [8, 3].

Пусть используется следующая модель измерения, которая подается на вход фильтра финитно-временной обработки с обратной связью:

$$Y_i = X_i + H_i, i = 0, 1, \dots, n, \quad (4)$$

где Y_i — результат измерений в момент времени i является скалярным случайным произвольным временным рядом; X_i — оцениваемый сигнал является случайной, произвольной, в общем случае нестационарным и не гауссовским случайным процессом; H_i — аддитивная помеха измерений является нестационарным, гауссовским, коррелированным или не коррелированным случайным процессом.

Вектор оценки полезного сигнала:

$$Z_{1_i} = \left| Y_i, \hat{X}_{i-1}^*, \dots, \hat{X}_{i-r+1}^* \right|^T, \quad (5)$$

где Y_i — текущий результат измерений; \hat{X}_p^* , $p = i-1, i-2, \dots, i-r+1$ — оптимальные оценки сигнала, полученные в $r-1$ моменты времени.

Оптимальная по критерию среднеквадратической ошибки оценки матрица A_i^* размерностью $r \times r$ преобразующая вектор результатов измерения в вектор оценок $\hat{X}_{1_i}^*$:

$$A_i^* = Kx_{1_i} z_{1_i} \times Kz_{1_i}^{-1}, \quad (6)$$

где $Kx_{1_i} z_{1_i}$ — матрица взаимных корреляционных моментов для векторных сигналов X_{1_i} и выходного сигнала Z_{1_i} размерности $r \times r$; Kz_{1_i} — матрица корреляционных моментов входного сигнала Z_{1_i} , размерности $r \times r$.

Спектрально-финитный метод фильтрации без обратной связи

Представим краткое математическое описание спектрально-финитного метода с обратной связью. Спектрально-финитная линейная оптимальная фильтрация дискретных сигналов характеризуется своей универсальностью, поскольку она применима к широкому классу сигналов, включая как стационарные, так и нестационарные, марковские и немарковские сигналы [6]. Кроме того, данный метод не зависит от наличия или отсутствия коррелированной помехи измерения [7, 8]. Алгоритм обладает повышенной устойчивостью благодаря отсутствию обратной связи и простотой реализации.

Спектральное представление наблюдаемого сигнала сигнал Y_{1_i} в спектральном виде на i -ом интервале, размерности $d_i \times 1$, учитывая величину значения спектральных компонент d_i :

$$CY_{1_i} d_i = BB_{1_i}^T * Y_{1_i}, i = k, k + 1, \dots, N, \quad (7)$$

где BB_{1_i} — матрица собственных векторов матрицы Kx_{1_i} , на i -ом шаге оценки сигнала.

Корреляционная матрица $Kx1y1_i$ векторов $X1_i$ и $Y1_i$ в спектральном представлении, размерности $d_i \times d_i$, которая учитывает величину значения спектральных компонент d_i :

$$CKx1y1d_i = BB1_i^T * Kx1y1_i * BB1_i, \quad (8)$$

Матрица оптимальных коэффициентов полезного сигнала $X1_i$ в i -ый момент времени, размерности $d_i \times d_i$, при спектральном представлении имеет следующий вид:

$$CA d_i^* = CKx1y1d_i \times CKy1d_i^{-1}, \quad (9)$$

Исследование рассматриваемых методов обработки сигналов

Исследование будем производить путем моделирования рассматриваемых методов фильтрации в компьютерном математическом пакете MathCad [11], и последующим сравнении их между собой по характеристикам точности, робастности и помехозащищенности.

В качестве исходных данных для моделирования и последующего сравнительного анализа будем использовать следующие параметры:

1. $Y_i = X_i + H_i$ — линейная, дискретная модель измерения со стационарным, гауссовским, эргодическим, центрированным, в общем случае не Марковским случайным процессом и аддитивной погрешностью измерения;

$$KX(\tau) = \sigma X^2 * e^{-\alpha X|\tau|} *$$

2. $\left(\cos(\beta X|\tau|) + \frac{\alpha}{\beta} * \sin(\beta X|\tau|) \right)$ — корреляционная функция второго порядка Марковости;

3. $KH(\tau) = \sigma H^2 * \delta_{i,j}$ — некоррелированная погрешность измерений в виде белого стационарного гауссовского шума;

4. $SIG0 = SIG1 = SIG00 = SIG11 = 1 \frac{1}{c}$ — СКО помехи и полезного сигнала для расчета характеристик робастности и помехозащищенности соответственно;

5. $\alpha = \alpha 1 = \beta = \beta 1 = 0,01 \frac{1}{c}$ — коэффициенты корреляции для робастности и помехозащищенности;

6. $r = 4$ — используемая память фильтров;

7. $d = 4c$ — величина дискретизации, определяемая по теореме Котельникова;

8. $N = 2000$ — объем выборки.

Сравнительный анализ по точности

Сравнение на точность будем проводить по величине выборки случайного процесса — N , и объему памяти фильтра — r . Где $Dwef$ — финитно-временная обработка без обратной связи; $Dwef s T$ — спектрально-финитная обработка без обратной связи; $Dwef 00$ — финитно-временная обработка с обратной связью; $Dwef k$ — фильтр Калмана.

Определим точность и время переходных процессов исследуемых методов обработки путем анализирования статистических оценок дисперсий, после завершения всех переходных процессов. Где ФВОсОС — финитно-временная обработка с обратной связью, ФВО — финитно-временная обработка без обратной связи, СФО — спектрально-финитная обработка, ФК — фильтр Калмана.

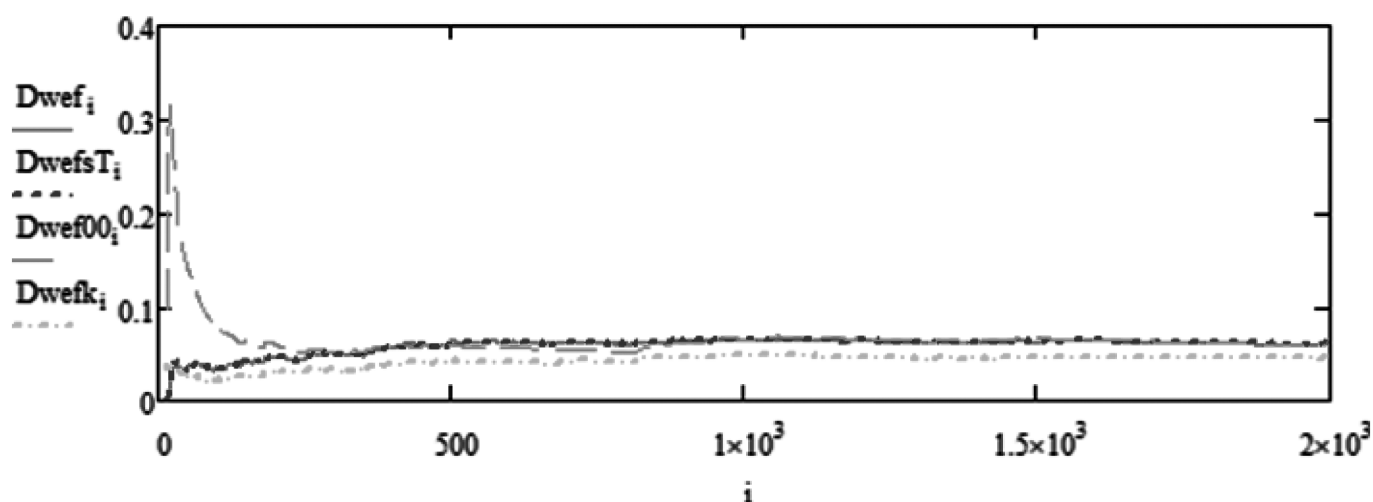


Рис. 1. График зависимости дисперсий ошибок оценок исследуемых методов обработки полезного сигнала от выборки N

Источник: анализ автора

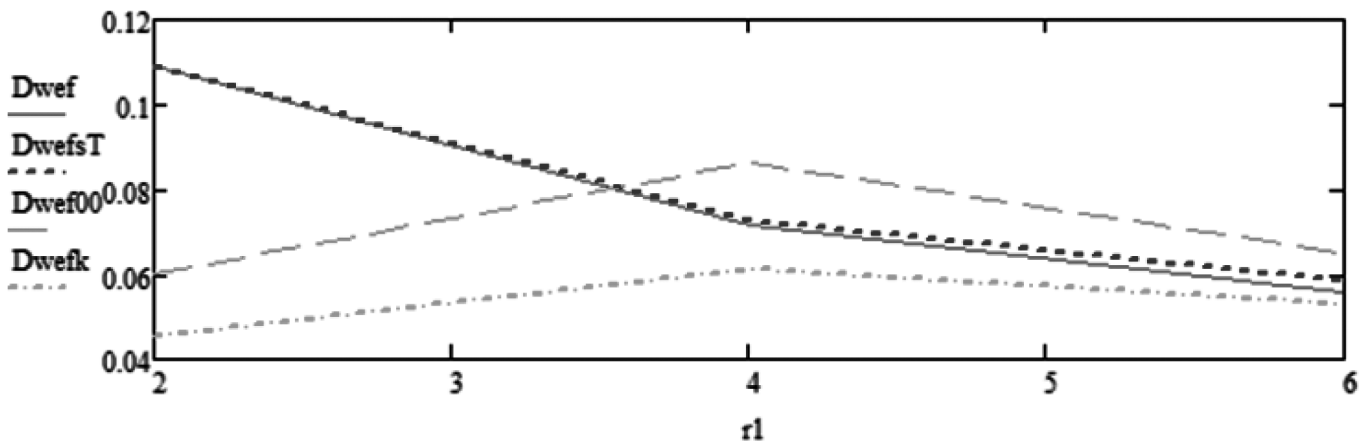


Рис. 2. График зависимости дисперсий ошибок оценок исследуемых методов обработки полезного сигнала от изменения памяти фильтра r

Источник: анализ автора

Таблица 1.

Значения точности и времени переходного процесса исследуемых методов обработки от выборки

| | ФВОсОС | ФВО | СФ0 | ФК |
|-------------|--------|-------|-------|-------|
| Точность | 0,06 | 0,061 | 0,061 | 0,046 |
| Время ПП, с | 1494 | 382 | 388 | 695 |

Источник: анализ автора

Сравнительный анализ по робастности

Сравнение на робастность будем проводить по следующим параметрам: $r, d, \alpha, \beta, SIG0, SIG1$. Ниже представим числовые данные робастности при отклонении заданного параметра робастности на $\pm 10\%$. Будем называть систему робастной, когда хотя бы один коэффициент робастности окажется меньше определенного значения, равного 0,3 [9].

Таблица 2.

Числовые значения коэффициентов робастности исследуемых методов при изменении параметров робастности

| | | ФВОсОС | ФВО | СФ0 | ФК |
|----------|--------|--------|-------|-------|-------|
| r | Rob(+) | 0,56 | 0,34 | 0,238 | 0,184 |
| | Rob(-) | 0,169 | 1,634 | 1,618 | 0,005 |
| d | Rob(+) | 0,42 | 0,388 | 0,426 | 0,608 |
| | Rob(-) | 0,138 | 0,006 | 0,028 | 0,646 |
| α | Rob(+) | 0,701 | 0,419 | 0,126 | 0,216 |
| | Rob(-) | 0,104 | 0,117 | 0,336 | 0,634 |
| β | Rob(+) | 0,573 | 0,359 | 0,035 | 0,151 |
| | Rob(-) | 0,375 | 0,15 | 0,103 | 0,132 |
| SIG0 | Rob(+) | 0,075 | 0,034 | 0,036 | 0,01 |
| | Rob(-) | 1,271 | 1,387 | 1,389 | 1,493 |

| | | ФВОсОС | ФВО | СФ0 | ФК |
|------|--------|--------|-------|-------|-------|
| SIG1 | Rob(+) | 0,352 | 0,332 | 0,168 | 0,167 |
| | Rob(-) | 0,673 | 0,539 | 0,06 | 0,013 |

Источник: анализ автора

Сравнительный анализ по помехозащищенности

Сравнение на помехозащищенность будем проводить по следующим параметрам: $\alpha1, \beta1, SIG00, SIG11$. Ниже представим числовые данные робастности при отклонении заданного параметра помехи на $\pm 10\%$. Будем называть систему помехозащищенной, когда хотя бы один коэффициент помехозащищенности окажется меньше определенного значения, равного 0,3 [9].

Таблица 3.

Числовые значения коэффициентов помехозащищенности исследуемых методов при изменении параметров помехозащиты

| | | ФВОсОС | ФВО | СФ0 | ФК |
|-----------|--------|--------|-------|-------|-------|
| $\alpha1$ | Rob(+) | 0,297 | 0,755 | 0,802 | 0,434 |
| | Rob(-) | 1,033 | 0,744 | 0,785 | 0,779 |
| $\beta1$ | Rob(+) | 2,696 | 1,415 | 1,447 | 2,205 |
| | Rob(-) | 1,309 | 0,146 | 0,159 | 0,273 |
| SIG00 | Rob(+) | 2,493 | 2,496 | 2,496 | 2,468 |
| | Rob(-) | 1,44 | 1,467 | 1,467 | 1,449 |
| SIG11 | Rob(+) | 3,103 | 2,838 | 2,811 | 1,817 |
| | Rob(-) | 1,496 | 1,418 | 1,419 | 1,043 |

Источник: анализ автора

Заключение

В данной работе был проведен сравнительный анализ линейных оптимальных методов фильтрации: финитно-временного метода с обратной связью, финитно-временного метода без обратной связи, спектрально-финитного метода без обратной связи, и фильтра Калмана по показателям точности, робастности и помехозащищенности.

По показателю точности все фильтры показали приблизительно один результат, однако Калмановская фильтрация оказалась точнее других методов при увеличении выборки измерений, а также при увеличении памяти фильтра. При этом время ее переходного процесса уступает времени переходного процесса финитно-временной обработки без обратной связи.

По показателю робастности финитно-временная обработка с обратной связью робастна по параметрам: r , d , α , SIG0. Финитно-временная обработка без обратной связи обладает робастностью по параметрам: d , α , β , SIG0. Спектрально-финитная фильтрация без обратной связи обладает робастностью по параметрам: r , d , α , β , SIG0, SIG1. Калмановская фильтрация обладает робастностью по параметрам: r , α , β , SIG0, SIG1.

По показателю помехозащищенности финитно-временная обработка с обратной связью помехозащищена по параметру: α_1 . Финитно-временная обработка без обратной связи обладает помехозащищенностью по параметру: β_1 . Спектрально-финитная фильтрация без обратной связи обладает помехозащищенностью по параметру: β_1 . Калмановская фильтрация помехозащищена по параметру: β_1 .

На основании проведенного исследования можно сделать вывод, что из перечисленных методов обработки сигналов, для заданной модели полезного сигнала и погрешности измерений, наиболее точным оказался фильтр Калмана. Наиболее устойчивым к возмущениям оказалась спектрально-финитная обработка без обратной связи. К воздействию помехи все фильтры оказались в равной степени устойчивы.

Таким образом, можно говорить о рациональности использования фильтрации Калмана в системах, требующих повышенной точности, и об использовании спектрально-финитной обработки без обратной связи в системах, чувствительных к различного рода выбросам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ivanov Y.P. Universal Algorithm of Adaptive Optimal-Invariant Signal Filtering / Y.P. Ivanov // IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine. — 2011. — Vol. 26. — PP. 31–33. — ISSN 0885-08985
2. Иванов Ю.П. Информационно-статистическая теория измерений. Методы оптимального синтеза информационно-измерительных систем, критерии оптимизации и свойства оценок: учебное пособие / Ю.П. Иванов, В.Г. Никитин; под редакцией Б.И. Марченко. — СПб.: ГУАП (университет), 2011. — 104 с.: ил. — ISBN 978-5-8088-0625-2. — Текст: непосредственный.
3. Иванов Ю.П. Исследование финитно-временного оптимального метода оценки сигналов с обратной связью / Ю.П. Иванов, А.А. Кузнецов. — Текст: электронный // Аэрокосмическое приборостроение и эксплуатационные технологии. — Сборник докладов Первой Международной научной конференции. Санкт-Петербург, 2020. — С. 42–47.
4. Иванов Ю.П. Комплексование информационно-измерительных устройств летательных аппаратов: учебное пособие / Ю.П. Иванов, А.Н. Синяков, И.В. Филатов; под редакцией В.А. Боднера. — Ленинград: Машиностроение: Ленинградское отделение, 1984. — 208 с.: ил.: 21 см. — Текст: непосредственный.
5. Иванов Ю.П. Рекуррентный оптимальный метод фильтрации произвольных дискретных сигналов на фоне коррелированных помех измерения. Моделирование и ситуационное управление качеством сложных систем // Сборник докладов Третьей Всероссийской научной конференции. Санкт-Петербург. 2022. С. 27–32
6. Иванов Ю.П. Спектрально-финитный метод оптимальной линейной фильтрации сигналов / Ю.П. Иванов. — Текст: электронный // Аэрокосмическое приборостроение и эксплуатационные технологии. — Сборник докладов Первой Международной научной конференции. — Санкт-Петербург, 2020. — С. 35–41.
7. Иванов Ю.П. Спектрально-финитный метод оптимальной линейной фильтрации сигналов / Ю.П. Иванов. — Текст: электронный // Аэрокосмическое приборостроение и эксплуатационные технологии. — Сборник докладов Первой Международной научной конференции. — Санкт-Петербург, 2020. — С. 35–41.
8. Иванов Ю.П. Финитно-временной и спектрально-финитный методы оптимальной фильтрации дискретных сигналов / Ю.П. Иванов. — Текст: электронный // Морские интеллектуальные технологии. — 2021. — № 3–1 (53). — С. 154–160.
9. Иванов Ю.П., Никитин В.Г. Информационно-статистическая теория измерений. Методы оптимального синтеза информационно-измерительных, критерии оптимизации и свойства оценок. Учебное пособие. СПГУАП, С П. 2011. 102 с.
10. Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление. М. 1973, Энергия, 440 с.
11. Новиковский Е.А. Учебное пособие «Работа в системе MathCAD» [Текст] / Е.А. Новиковский. — Барнаул: Типография АлтГТУ, 2013. — 114 с.
12. Френкс Л. Теория сигналов [Текст] / Пер. с англ. М.Р. Краевской и Р.М. Седлецкого; Под ред. Д. Е. Вакмана. — Москва: Сов. радио, 1974. — 343 с.: черт.; 22 см.
13. Э. Сейдж, Дж. Мелс. Теория оценивания и ее применение в связи и управления. Связь. М. 1976, 495 с.

© Иванов Юрий Павлович; Красненков Никита Сергеевич (nikita.krasnenkov@gmail.com)

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»