

## ВЛИЯНИЕ ЗАКРУТКИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЙ В КАНАЛАХ

## INFLUENCE OF SWIRLING ON FLOW STABILITY IN CHANNELS

V. Akhmetov

*Summary.* The problem of hydrodynamic stability of a swirling flow of a viscous incompressible fluid in a channel with rigid walls is considered. The solution is determined by numerical integration of sixth-order ordinary differential equations system. The amplification coefficients and phase velocities of the most unstable disturbances are calculated for various flow profiles.

*Keywords:* hydrodynamic stability, swirling flow, viscous fluid, amplification coefficients.

Ахметов Вадим Каюмович

Д.т.н., профессор, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет»  
vadim.akhmetov@gmail.com

*Аннотация.* Рассматривается задача гидродинамической устойчивости закрученного потока вязкой несжимаемой жидкости в канале с жесткими стенками. Решение определяется численным интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка. Рассчитаны коэффициенты усиления и фазовые скорости наиболее неустойчивых возмущений для различных профилей течения.

*Ключевые слова:* гидродинамическая устойчивость, закрученный поток, вязкая жидкость, коэффициенты усиления.

**З**акрученные течения жидкости или газа продолжительное время являются объектом теоретического и экспериментального исследования. Это обусловлено целым рядом свойств, которые поток приобретает благодаря воздействию центробежной силы, вызванной его вращением. Области применения закрученных потоков обширны и разнообразны. В качестве некоторых примеров можно отметить следующие направления: стабилизация процессов горения за счет образования рециркуляционной зоны, очистка воздуха от пыли и мелкодисперсных примесей, разделение потока по фракциям, температурное разделение в трубах Ранка-Хилша, аэрирование потока с помощью контрвихревых аэраторов, гашение энергии в гидротехнических сооружениях за счет взаимодействия двух коаксиально закрученных в противоположные стороны потоков, смешение дымовых газов при сжигании топлива, интенсификации процессов теплообмена [1–6]. В связи с этим особенно актуальным является исследование устойчивости закрученных течений, так как именно за счет этого обеспечивается работа технических устройств в расчетном режиме.

Основным инструментом математического моделирования в этом случае служит гидродинамическая теория устойчивости [7–11]. Суть этого подхода заключается в том, что на основное (считающееся известным) течение накладываются некоторые малые возмущения и исследуется процесс нарастания этих возмущений по времени или пространству. Если они затухают, то течение считается устойчивым, если растут — то неустойчивым.

Базовой системой уравнений гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости является система Навье-Стокса, используя которую можно рассчитать основное течение, а затем исследовать его устойчивость. Можно также рассматривать некоторые модельные течения в качестве основного с заданным распределением скоростей.

## 1. Постановка задачи и метод решения

Будем считать, что основное течение вязкой несжимаемой жидкости является осесимметричным и в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  описывается полем скоростей

$$V_z = U(r), \quad V_\varphi = W(r), \quad V_r = 0. \quad (1)$$

Здесь ось  $z$  направлена вдоль движения потока. В классической теории устойчивости на основное течение накладываются возмущения в виде бегущей волны

$$\{V'_z, V'_r, V'_\varphi, p'\} = \{F, iS, H, P\} \exp[i(\alpha z + n\varphi - \alpha ct)], \quad (2)$$

Комплексные функции  $F(r), S(r), H(r), P(r)$  задают амплитуду волны длиной  $\lambda$  с волновым числом  $\alpha = 2\pi/\lambda$ , модой возмущения  $n$  ( $n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$ ) и скоростью распространения  $c$ . Для неизвестных амплитудных функций после процедуры подстановки возмущений (1) в уравнения Навье-Стокса и ее дальнейшей линеаризации можно получить систему следующих уравнений

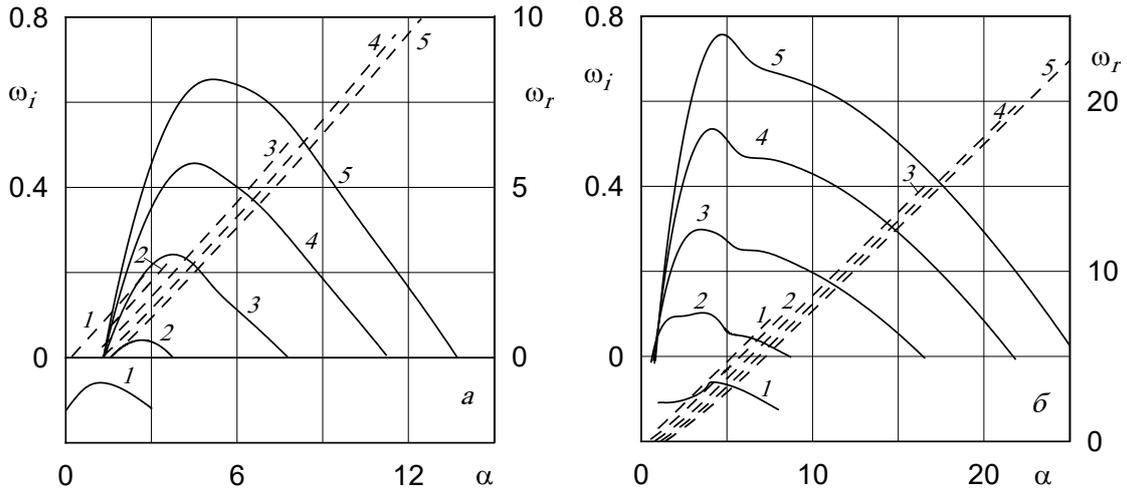


Рис.1. Зависимости коэффициентов усиления (сплошные линии) и частот колебаний (штриховые линии) от волнового числа при : а — Re=300, б — Re=1000, 0,1, 0,3, 0,56, 0,8, 1 (кривые 1-5)

$$r^2\gamma F + \alpha r^2 P + r^2 S U' = \frac{1}{i \text{Re}} [r(rF')' - (\alpha^2 r^2 + n^2 F)], \quad (3)$$

$$r^2\gamma S + 2rHW - r^2 P' = \frac{1}{i \text{Re}} [r(rG')' - (\alpha^2 r^2 + n^2 + 1)S - 2nH], \quad (4)$$

$$r^2\gamma H + r^2 S \left( W' + \frac{W}{r} \right) + rnP = \frac{1}{i \text{Re}} [r(rH')' - (\alpha^2 r^2 + n^2 + 1)H - 2nS], \quad (5)$$

$$\alpha r F + (rS)' + nH = 0, \quad (6)$$

где  $\gamma = \alpha(U - c) + nW/r$ . Граничными условиями для системы (3)-(6) служат выражения:

$$S(0) = H(0) = 0, \quad F(0), P(0) \text{ — ограничены при } n = 0; \quad (7)$$

$$S(0) \pm H(0) = 0, \quad F(0) = P(0) = 0 \text{ — где } n = \pm 1; \quad (8)$$

$$S(0) = H(0) = F(0) = P(0) = 0 \text{ — где } |n| > 1; \quad (9)$$

$$S(r_k) = H(r_k) = F(r_k) = 0. \quad (10)$$

Будем исследовать, так называемую, временную устойчивость течения (1). При этом волновое число  $\alpha$  действительное, а скорость  $c = c_r + ic_i$  комплексная ( $c_r$  — фазовая скорость,  $c_i$  — скорость роста возмущения по времени). Очевидно, что при  $c_i < 0$  возмущения затухают (течение устойчиво), а при  $c_i > 0$  — растут (течение неустойчиво).

Сформулированная постановка является задачей на собственные значения, которая решается численно интегрированием системы (3)-(6) с условиями (7)-(10) методом Рунге-Кутты с использованием ортогонализационной процедуры Грамма-Шмидта. Метод решения изложен в [11] и применялся при исследовании широкого круга задач.

### 3. Результаты вычислений

Рассмотрим результаты исследования устойчивости на примерах течений вида (1) с разными распределениями скорости. В первом случае будем считать, что ядро закрученного потока представляет собой вихрь Бюргерса:

$$U(r) = U_1(r)/U_0, \quad W(r) = W_1(r)/U_0, \quad U_0 = U_{1\text{max}},$$

$$U_1(r) = U_2 \{1 - \exp[\tau(r-1)]\} + \varepsilon [\exp(-\sigma r^2) - \exp(-\sigma)],$$

$$W_1(r) = W_2 \{ \exp(-\tau) - \exp[\tau(r-1)] \} + \frac{\beta}{r} [1 - \exp(-\sigma r^2)], \quad (11)$$

$$U_2 = \frac{\tau^2 \sigma - \varepsilon [1 - (1 + \sigma) \exp(-\sigma)]}{\sigma \tau^2 + 2[1 - \sigma - \exp(-\sigma)]}, \quad W_2 = \beta \frac{1 - \exp(-\sigma)}{1 - \exp(-\tau)}.$$

Здесь параметр  $\tau$  определяет толщину пограничного слоя,  $\varepsilon$  задает форму профиля ( $\varepsilon > 0$  — струйное течение,  $\varepsilon < 0$  — спутное,  $\varepsilon = 0$  — равномерный поток).

Выборочные результаты устойчивости течения (11) при  $\varepsilon = 0, \tau = 12, \sigma = 18, n = -1$  представлены на рис. 1. Небольшая закрутка ( $\beta = 0.1$ ) не оказывает существенного воздействия на поток и он остается устойчивым (кри-

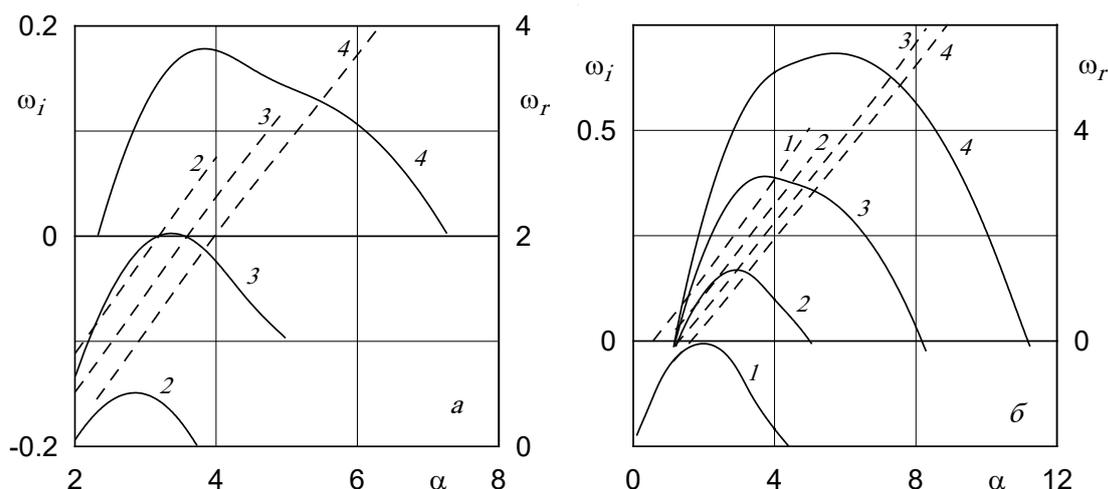


Рис. 2. Зависимости коэффициентов усиления (сплошные линии) и частот колебаний (штриховые линии) от волнового числа при: а —  $Re=100$ , б —  $300$ ,  $G=0.7, 1.2, 1.7, 2.2$  (кривые 1-4)

вая 1). При увеличении закрутки ( $\beta=0.3$ ) устойчивость потока нарушается, а в дальнейшем — усиливается. Длина волны, которая соответствует наиболее неустойчивым возмущениям, примерно равна диаметру канала и незначительно уменьшается с увеличением закрутки. Данный профиль скорости неустойчив к более коротким возмущениям по сравнению с течением Пуазейля во вращающейся трубе. Рассмотренные моды неустойчивости имеют невязкий характер и с ростом значения числа Рейнольдса неустойчивость сохраняется.

Во втором случае рассмотрим течение с полем скоростей вида:

$$\begin{aligned} V_{z0}(r) &= D_0 + D_1 \exp(-B_1 r^2), \\ V_{\varphi 0}(r) &= G \frac{A}{r} (1 - \exp(-B_2 r^2)), \quad 0 \leq r \leq r_0, \\ V_{z0}(r) &= a_0 + a_1 r + a_2 r^2, \quad V_{\varphi 0}(r) = G(b_0 + b_1 r + b_2 r^2), \\ r_0 &\leq r \leq 1. \end{aligned} \quad (12)$$

В данном исследовании примем

$$\begin{aligned} D_0 &= 1, \quad D_1 = 0, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = 14, \quad A = 0.419, \\ r_0 &= 0.75, \quad a_0 = -8, \quad a_1 = 24, \quad a_2 = -16, \\ b_0 &= -5.363, \quad b_1 = 19.627, \quad b_2 = -14.260. \end{aligned} \quad (13)$$

Дисперсионные зависимости, характеризующие устойчивость течения (12) при  $Re = 100, 300$  представлены на рис. 2. В этом случае малая закрутка  $G=0.7, 1.2$  также не приводит к нарушению устойчивости потока, а при усилении закрутки  $G=1.7, 2.2$  поток становится неустойчивым. Такая же картина наблюдается при больших значениях чисел Рейнольдса. Как и в предыдущем случае, длина волны для наиболее неустойчивых возмущений имеет значение порядка длины канала.

#### 4. Заключение.

Для течений во вращающемся канале с постоянной угловой скоростью  $q$  при превышении критического числа Рейнольдса нарушение устойчивости наблюдается при чрезвычайно малых значениях  $q \approx 0.01$ . Представленные вычисления течений с закруткой, распределенной по радиусу, показывают существование некоторой критической закрутки. Определяя параметр закрутки  $G$  отношением максимальных значений азимутальной компоненты скорости к осевой, для представленных вычислений в диапазоне умеренных чисел Рейнольдса критическое значение закрутки составляет  $G_{кр} \approx 0.7-1.7$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 18-01-00762).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гупта А., Лилли Д., Сайред Н. Закрученные потоки. М.: Мир, 1987. 588 с.
2. Карелин В.Я., Кривченко Г.И., Мордасов А.П., Волшаник В.В., Зуйков А.Л., Ахметов В.К. Физическое и математическое моделирование систем гашения энергии в вихревых водосбросах // Физическое и математическое моделирование гидравлических процессов при исследовании гидроузлов комплексного назначения. Тез. научно-техн. совещания (г. Дивногорск, 24–26 мая 1989). Л.: ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева, 1989. С. 11–12.

3. Rukes L., Sieber M., Paschereit C., Oberleithner K. The impact of heating the breakdown bubble on the global mode of a swirling jet: experiments and linear stability analysis // *Physics of Fluids*. 2016. Vol. 28. 104102.
4. Ахметов В.К., Волшаник В.В. Исследование распространения аэрированной затопленной струи // *Гидротехническое строительство*. 1994. № 10. С. 24–26.
5. Ахметов В.К., Шкадов В.Я., Шкадова В.П. Смешение нагретых газов в осесимметричном канале с предварительной закруткой потока // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2006. № 3. С. 19–29.
6. Ахметов В.К., Шкадов В.Я. Распыление порошка закрученным потоком с зоной рециркуляции // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2000. № 6. С. 3–15.
7. Ахметов В.К., Шкадов В.Я. К вопросу об устойчивости свободного вихря // *Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика*. 1987. № 2. С. 35–40.
8. Chan S.; Ault J.T., Haward S.J., Meiburg E., Shen A.Q. Coupling of vortex breakdown and stability in a swirling flow // *Physical review fluids*. 2019. V. 4. № 8. 084701.
9. Blanco-Rodríguez F.J., Rodríguez-García J.O., Parras L., del Pino C. Optimal response of Batchelor vortex // *Physics of Fluids*. 2017. Vol. 29. 064108.
10. Yadav N.K., Samanta A. The stability of compressible swirling pipe flows with density stratification // *Journal of Fluid Mechanics*. 2017. Vol. 823. Pp. 689–715.
11. Ахметов В.К. Гидродинамическая устойчивость контрвихревых течений // *Гидротехническое строительство*. 2018. № 2. С. 13–18.

© Ахметов Вадим Каюмович ( [vadim.akhmetov@gmail.com](mailto:vadim.akhmetov@gmail.com) ).

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»



Московский государственный строительный университет