

# ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

**Егоров Михаил Валерьевич**

Инженер-расчетчик, ООО «ДАТАДВАНС»  
egorovmv89@mail.ru

## THE RAY METHOD FOR SOLVING THE DYNAMICS OF THE ELASTIC VISCIOUS-PLASTIC SHELLS

**M. Yegorov**

*Summary.* The work describes the ray method for solving systems of partial differential equations of hyperbolic type. This method consists in constructing the equations of discontinuity transfer along the propagation of perturbations on moving surfaces, as well as in representing the solution in the form of a Taylor power series in the variable distance behind the perturbation front while preserving a sufficient number of terms. The implementation of the method is shown by the example of a system of partial differential equations of hyperbolic type, which describe the process of dynamic deformation of thin cylindrical shells of revolution from elastoviscoplastic materials [5]. An algorithm for constructing a solution up to the required order is given.

*Keywords:* rotating shell, ray method, plasticity, dynamic deformation.

*Аннотация.* В работе представлено описание и демонстрация работы программного комплекса для математического моделирования динамического деформирования упруговязкопластических оболочек вращения. Математическая модель основана на систему уравнений в частных производных гиперболического типа. В качестве метода реализован лучевой метод прифронтных разложений, в также построение решение в виде степенного ряда Тейлора с третьим порядком точности. Сформулированы начальные условия в терминах разрывов, описывающие динамическую нагрузку по торцу оболочки. Представлены варианты граничных условий в терминах разрывов, отражающие условия жесткого защемления, или свободного от напряжений противоположного торца оболочки. Построен алгоритм расчета остаточной формы оболочки после снятия нагрузки.

*Ключевые слова:* лучевой метод, оболочка вращения, пластичность, граничные условия.

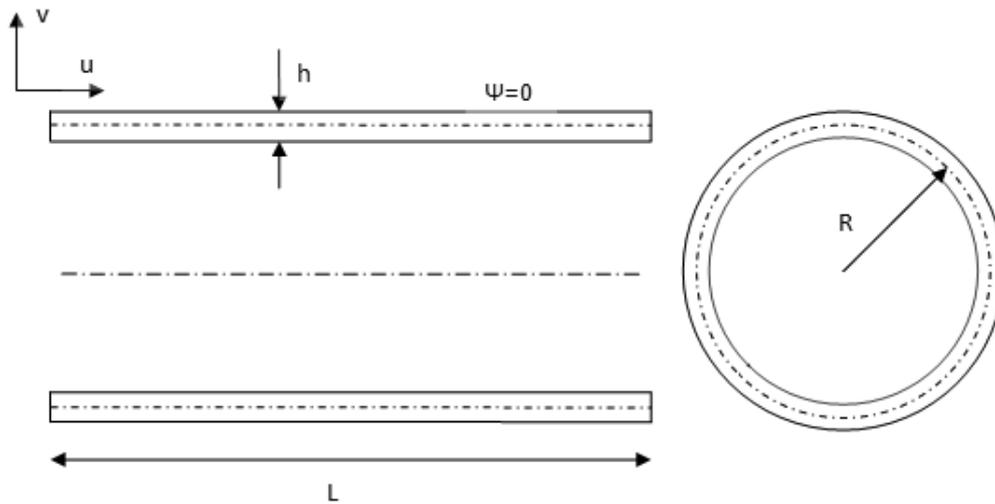


Рис. 1 Модельное представление оболочки

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + c_1^2 \frac{v}{R} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{c_1^2 v}{R^2} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{2\mu}{\rho} \frac{\partial e_{zz}^p}{\partial z}; \\
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= c_1^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{12c_2^2 k^2}{h^2} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{12c_2^2 k^2}{h^2} \psi - \frac{2c_1^2 v}{R^3} \frac{\partial v}{\partial z}; \\
 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c_2^2 k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + c_2^2 k^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{c_1^2}{R^2} v - \frac{c_1^2 v}{R} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{c_1^2 v}{2R} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \\
 &+ \frac{c_1^2 v}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{3c_2^2 k^2}{2R^3} v^2 - \frac{2\mu}{\rho} \frac{\partial e_{rz}^p}{\partial z}; \\
 \frac{de_{zz}^p}{dt} &= \frac{1}{\eta} \frac{I_2(\sigma') - K\sqrt{2}}{I_2(\sigma')} \sigma'_{zz}; \\
 \frac{de_{rz}^p}{dt} &= \frac{1}{\eta} \frac{I_2(\sigma') - K\sqrt{2}}{I_2(\sigma')} \sigma'_{rz},
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

**Р**ассмотрим математическую модель, описывающую динамическое деформирование тонкой оболочки вращения из упруговязкопластического материала, изложенную в [5] (рисунок 1, формула 1), где  $u, v$  — продольные, поперечные перемещения срединной поверхности оболочки,  $\psi$  — угол поворота срединной поверхности оболочки вращения,  $z$  — продольная координата оболочки,  $R$  — радиус срединной поверхности,  $h$  — толщина оболочки,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\mu$  — параметр Ляме,  $\rho$  — плотность материала оболочки,  $\eta$  — коэффициент динамической вязкости,  $e_{ij}^p$  — компоненты тензора пластических деформаций,  $K$  — предел пластичности,  $\sigma'_{ij}$  — компоненты девиатора тензора напряжений,  $I_2(\sigma'_{ij})$  — второй инвариант девиатора тензора напряжений,  $c_1, c_2$  — скорости распространения продольных и поперечных возмущений

в неограниченной среде,  $k$  — параметр поперечного сечения, характеризующий распределение касательных напряжений.

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3 \sum_{k=1}^3 \sigma_{kk} \delta_{ij},
 \tag{2}$$

$$I_2(\sigma') = \sqrt{\sigma'_{ij} \otimes \sigma'_{ij}},
 \tag{3}$$

$$c_1^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}, c_2^2 = \frac{E}{2\rho(1+\nu)}.
 \tag{4}$$

Запишем систему уравнений (1) в терминах разрывов на подвижной поверхности согласно выражениям [5] (формулы 5, 6, 7)

$$f^-(z, t) = f^+(z, t) - [f(z, t)], \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\delta}{\delta t} - c \frac{\partial}{\partial n}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 [u]}{\delta t^2} - 2c \frac{\delta [u_{,n}]}{\delta t} + c^2 [u_{,nn}] &= c_1^2 [u_{,nn}] + c_1^2 \frac{v}{R} [v_{,n}] - \frac{2\mu}{\rho} [e_{zz,n}^p]; \\ \frac{\delta^2 [\psi]}{\delta t^2} - 2c \frac{\delta [\psi_{,n}]}{\delta t} + c^2 [\psi_{,nn}] &= c_1^2 [\psi_{,nn}] - \frac{12c_2^2 k^2}{h^2} [v_{,n}] - \frac{12c_2^2 k^2}{h^2} [\psi]; \\ \frac{\delta^2 [v]}{\delta t^2} - 2c \frac{\delta [v_{,n}]}{\delta t} + c^2 [v_{,nn}] &= c_2^2 k^2 [v_{,nn}] + c_2^2 k^2 [\psi_{,n}] - \frac{c_1^2}{R^2} [v] - \frac{c_1^2 v}{R} [u_{,n}] - \frac{2\mu}{\rho} [e_{rz,n}^p]; \\ [e_{zz,n}^p] &= -\frac{1}{c\eta} \left( 1 - \frac{K\sqrt{2}}{\sqrt{2/3 (\lambda ([u_{,n}] + 1/R[v]) + 2\mu [u_{,n}]^2)^2 + 2\mu^2 [v_{,n}]^2}} \right) \cdot \\ &(\lambda ([u_{,n}] + 1/R[v]) + 2\mu [u_{,n}]); \\ [e_{rz,n}^p] &= -\frac{1}{c\eta} \left( 1 - \frac{K\sqrt{2}}{\sqrt{2/3 (\lambda ([u_{,n}] + 1/R[v]) + 2\mu [u_{,n}]^2)^2 + 2\mu^2 [v_{,n}]^2}} \right) \mu [v_{,n}]. \end{aligned} \quad (7)$$

В работе [4] показано существование двух изолированных волновых фронтов системы (7), на каждом из которых выполняются свои условия.

Волновой фронт  $\Sigma_1$ :

$$\tilde{n} = \tilde{n}_1, [u_{,n}] \neq 0, [\psi_{,n}] \neq 0, [v_{,n}] \equiv 0. \quad (8)$$

Волновой фронт  $\Sigma_2$ :

$$\tilde{n} = \tilde{n}_2 k, [u_{,n}] \equiv 0, [\psi_{,n}] \equiv 0, [v_{,n}] \neq 0. \quad (9)$$

Принимая во внимание условие сплошности  $[f] = 0$  и записывая систему уравнений (7) на соответствующей волновой поверхности  $\Sigma_1$ , или  $\Sigma_2$  получаем систему обыкновенных неоднородных уравнений первого порядка относительно  $[u_{,n}]$ ,  $[\psi_{,n}]$ ,  $[v_{,n}]$ . Дифференцируя систему (1) достаточное количество раз по продольной координате и записывая ее в терминах разрывов на подвижной поверхности по аналогии с системой (7) можно получить выражения для  $[u_{,nn}]$ ,  $[\psi_{,nn}]$ ,  $[v_{,nn}]$  и  $[u_{,nnn}]$ ,  $[\psi_{,nnn}]$ ,  $[v_{,nnn}]$ . Учитывая вышеизложенное, можно составить выражение

для решения за фронтом возмущения в виде степенного ряда Тейлора:

$$f^-(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\partial^k f^-(z, t)}{\partial n^k} \Big|_{z=0} \frac{n^k}{k!}, \quad (10)$$

где  $f^-(z, t)$  — значение функции за фронтом возмущения,  $n$  — расстояние от фронта возмущения.

Начальные условия для решения последовательно дифференцированной системы уравнений (7) могут быть записаны в следующем виде [6]:

$$[u_{,n}]_0 = \frac{[\sigma_{rz}]_0}{\lambda + 2\mu}; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} [u_{,nn}]_0 &= \frac{2\mu}{c_1 \eta} [u_{,n}]_0 - \frac{1}{\lambda c_1 + 2\mu c_1} \left[ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} \right]_0 - \\ & - \frac{2\sqrt{3}K}{\eta (\lambda c_1 + 2\mu c_1)}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$[u_{,nnn}]_0 = \frac{1}{c_1^2 (\lambda + 2\mu)} \left[ \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial t^2} \right]_0 + \frac{2\mu}{c_1 \eta} [u_{,nn}]_0; \quad (13)$$

$$[v_{,n}]_0 = \frac{[\sigma_{rz}]_0}{2\mu}; \tag{14}$$

$$[v_{,nn}]_0 = -\frac{1}{2\mu c_2 k} \left[ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial t} \right]_0 + \frac{\mu}{c_2 k \eta} [v_{,n}]_0 - \frac{K}{c_2 k \eta}; \tag{15}$$

$$[v_{,nnn}]_0 = \frac{1}{2\mu c_2^2 k^2} \left[ \frac{\partial^2 \sigma_{rz}}{\partial t^2} \right]_0 + \frac{\mu}{c_2 k \eta} [v_{,nn}]_0; \tag{16}$$

$$\sigma_{ij}|_{z=0} = -\sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{\partial^k \sigma_{ij}(z=0, t)}{\partial t^k} \right] \frac{t^k}{k!}, \tag{17}$$

где  $\sigma_{ij}|_{z=0}$  — динамическая нагрузка на торце, представленная в виде степенного ряда Тейлора.

Граничные условия для жестко заземленного торца оболочки можно записать в виде [6]:

$$\left[ \frac{\partial^k u}{\partial n^k} \right]_{ref} = - \left[ \frac{\partial^k u}{\partial n^k} \right]_{inc}, \tag{18}$$

$$\left[ \frac{\partial^k v}{\partial n^k} \right]_{ref} = - \left[ \frac{\partial^k v}{\partial n^k} \right]_{inc}. \tag{19}$$

Граничные условия для свободного от напряжений торца оболочки можно записать в виде [6]:

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{ref} = - \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{inc}, \tag{20}$$

$$\left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right]_{ref} = - \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right]_{inc}, \tag{21}$$

$$\left[ \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right]_{ref} = 2 \frac{1}{c} \frac{\delta}{\delta t} \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{inc}, \tag{22}$$

$$\left[ \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} \right]_{ref} = 2 \frac{1}{c} \frac{\delta}{\delta t} \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right]_{inc}, \tag{23}$$

$$\left[ \frac{\partial^3 u}{\partial n^3} \right]_{ref} = 4 \frac{1}{c^2} \frac{\delta^2}{\delta t^2} \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{inc}, \tag{24}$$

$$\left[ \frac{\partial^3 v}{\partial n^3} \right]_{ref} = 4 \frac{1}{c^2} \frac{\delta^2}{\delta t^2} \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right]_{inc}. \tag{25}$$

Запишем выражения для компонент скоростей пластического деформирования на фронтах  $\Sigma_1, \Sigma_2$  [6]:

$$\left[ \frac{\partial e_{zz}^p}{\partial t} \right]_{\Sigma_1} = [\varepsilon_{zz}^p]_{\Sigma_1} = -\frac{\lambda + 2\mu}{\eta} [u_{,n}] + \frac{\sqrt{3}K}{\eta}; \tag{26}$$

$$\left[ \frac{\partial e_{rz}^p}{\partial t} \right]_{\Sigma_1} = [\varepsilon_{rz}^p]_{\Sigma_1} = 0; \tag{27}$$

$$\left[ \frac{\partial e_{zz}^p}{\partial t} \right]_{\Sigma_2} = [\varepsilon_{zz}^p]_{\Sigma_2} = 0; \tag{28}$$

$$\left[ \frac{\partial e_{rz}^p}{\partial t} \right]_{\Sigma_2} = [\varepsilon_{rz}^p]_{\Sigma_2} = -\frac{\mu}{\eta} [v_{,n}] + \frac{K}{\eta}. \tag{29}$$

Распределение пластических деформаций можно представить в виде [6]:

$$e_{ij}^{-p} = [e_{ij,n}^p] (N-z) - [e_{ij,nn}^p] \frac{(N-z)^2}{2} + [e_{ij,nnn}^p] \frac{(N-z)^3}{6}; \tag{30}$$

$$[\varepsilon_{ij,n}^p] = \left[ \frac{\partial e_{ij,n}^p}{\partial t} \right] = \frac{\delta [e_{ij,n}^p]}{\delta t} - c [e_{ij,nn}^p]; \tag{31}$$

$$[e_{ij,nn}^p] = \frac{\delta [e_{ij,n}^p]}{\delta N} - \frac{1}{c} [\varepsilon_{ij,n}^p]; \tag{32}$$

$$[\varepsilon_{ij,nn}^p] = \left[ \frac{\partial e_{ij,nn}^p}{\partial t} \right] = \frac{\delta [e_{ij,nn}^p]}{\delta t} - c [e_{ij,nnn}^p]; \tag{33}$$

$$[e_{ij,nnn}^p] = \frac{\delta [e_{ij,nn}^p]}{\delta N} - \frac{1}{c} [\varepsilon_{ij,nn}^p]. \tag{34}$$

Остаточные пластические перемещения обусловлены наличием скорости пластической деформации на фронте. Выражения для остаточных перемещений оболочки могут быть получены путем разложения в ряд Тейлора по расстоянию за фронтом [6]:

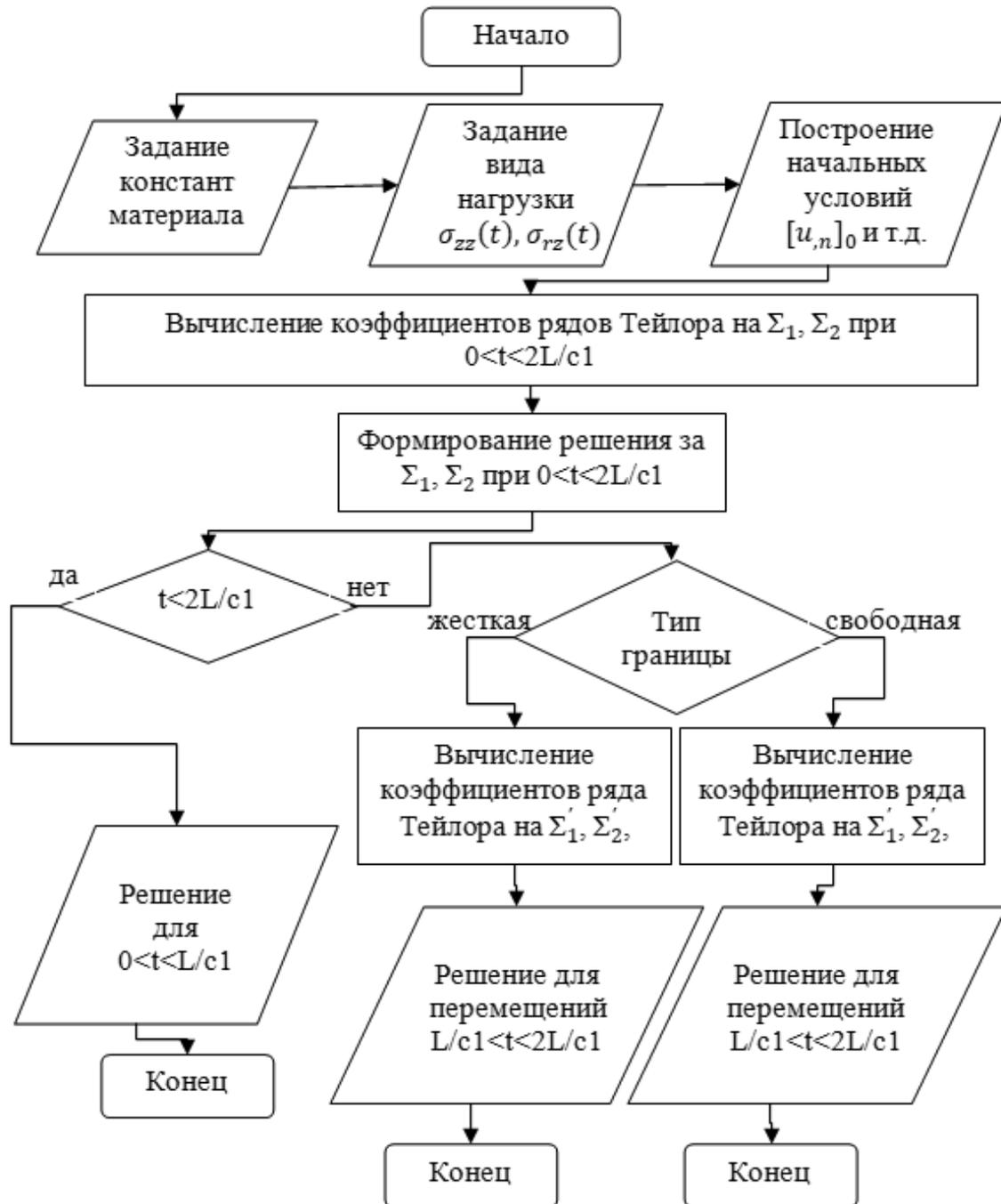


Рис. 2 Блок-схема работы программного комплекса

$$u(N, z) = e_{zz}^{-p} (N - z) - [e_{zz, n}^p] \frac{(N - z)^2}{2} + [e_{zz, nn}^p] \frac{(N - z)^3}{6}, \quad (35)$$

$$v(N, z) = e_{rz}^{-p} (N - z) - [e_{rz, n}^p] \frac{(N - z)^2}{2} +$$

$$+ [e_{rz, nn}^p] \frac{(N - z)^3}{6}, \quad (36)$$

где  $e_{zz}^{-p}$ ,  $e_{rz}^{-p}$  — остаточные пластические деформации за фронтом,  $n = N - z$  — расстояние за фронтом.

Программа для реализации метода была написана на языке FORTRAN90 в кроссплатформенной среде Code:: Blocks. Постпроцессинг для визуальной части был разработан в Mathcad 15.

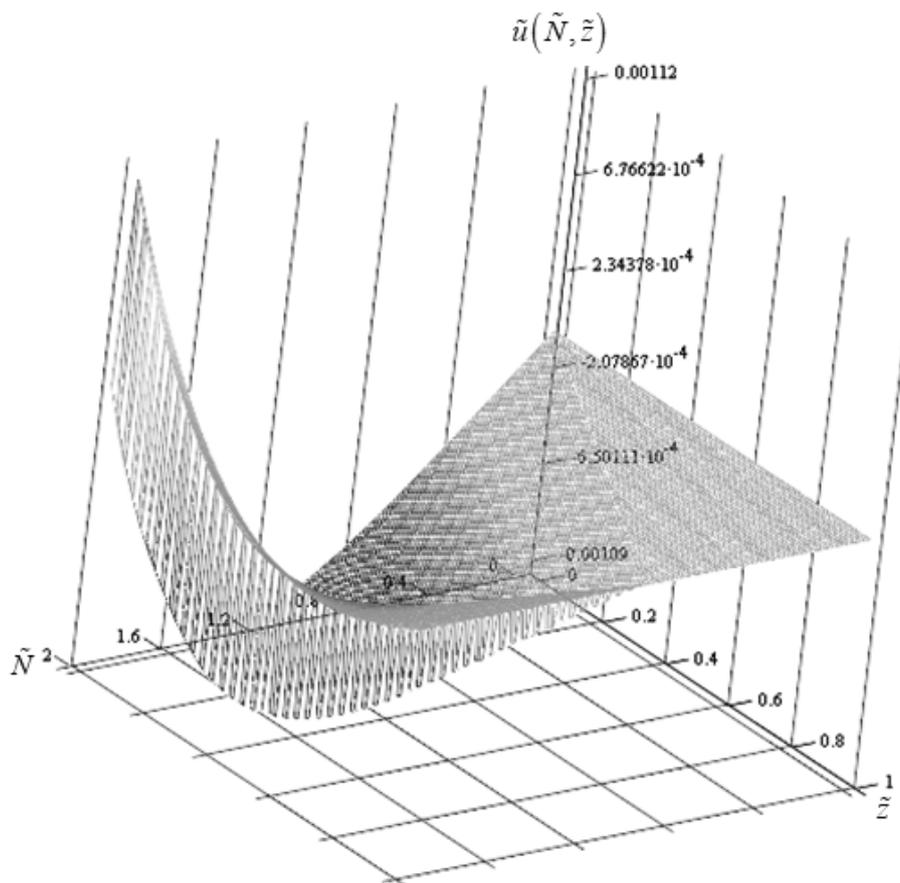


Рис. 3 Распределение продольных перемещений в случае жестко заземленной границы

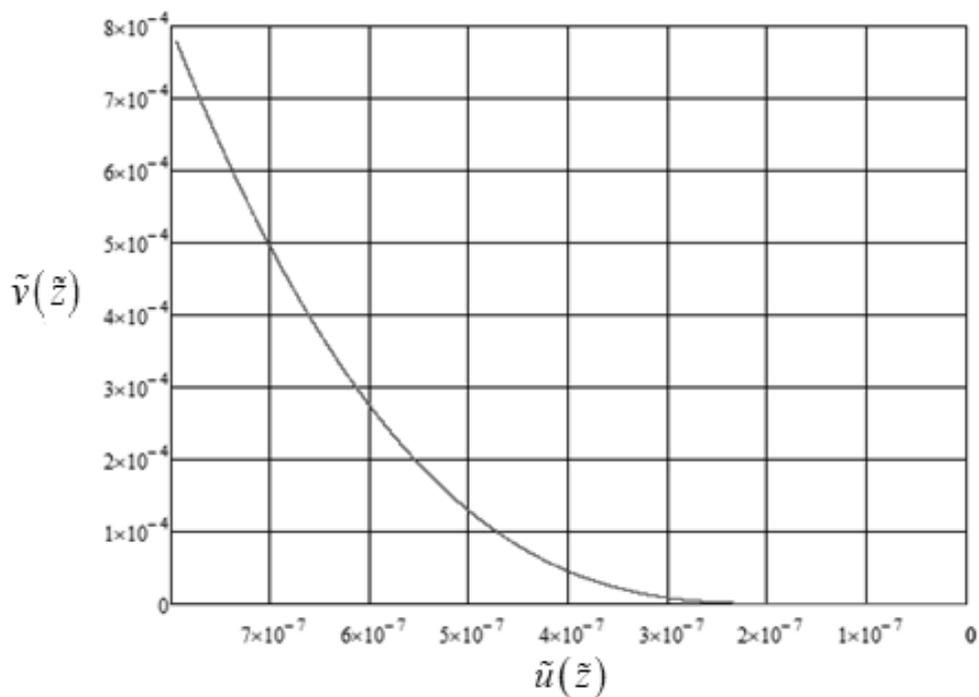


Рис. 4 Остаточная форма оболочки при снятии нагрузки в момент времени  $\tilde{N} = 1$

При расчетах были использованы следующие безразмерные комплексы:  $\tilde{u} = u/L$ ,  $\tilde{z} = z/L$ ,  $\tilde{N} = N/c_1 t$   
 $\tilde{v} = v/L$   $\tilde{u}(\tilde{N}, \tilde{z})$   $\tilde{v}(\tilde{N}, \tilde{z})$ .

Выводы: в работе представлено описание и демонстрация работы программного комплекса для матема-

тического моделирования динамического деформирования тонких оболочек вращения при двух вариантах задания граничных условия на противоположном торце оболочки (жестко защемленном и свободном от напряжений), а также построения остаточной формы оболочки после снятия нагрузки.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вервейко Н. Д. Лучевая теория упруговязкопластических волн и волн гидроудара / Н. Д. Вервейко. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1997. — 204 с.
2. Сагомоян А. Я. Волны напряжений в сплошных средах / А. Я. Сагомоян; МГУ — Москва: Изв-во МГУ, 1985. — 416 с.
3. Вервейко Н. Д. Лучевой метод расчета динамического напряженного состояния оболочки вращения / Н. Д. Вервейко, М. В. Егоров // Вестник ЧГПУ. Серия: Механика предельного состояния. — 2015. — № 3. — С. 120–131.
4. Вервейко Н. Д. Метод последовательных нагружений расчета динамического деформирования осесимметричной оболочки распространяющемся внутренним давлением / Н. Д. Вервейко, М. В. Егоров // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — Воронеж, 2015. — № 4 — С. 111–120.
5. Егоров М. В. Динамическое деформирование осесимметричной оболочки вращения из упруговязкопластического материала вблизи ударных волн / М. В. Егоров // Вестник ЧГПУ. Серия: Механика предельного состояния. — 2016. — № 2. — С. 144–162.
6. Вервейко Н. Д. Математическое моделирование динамического деформирования упруговязкопластических оболочек конечной длины лучевым методом / Н. Д. Вервейко, М. В. Егоров // Вестник СамГТУ. Серия: Физико-математические науки. — Самара, 2018. — № 2 — С. 325–343.
7. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ / Егоров М. В. // Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ. № 2017660609. 22.09.2017
8. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов. — М.: Наука, 1973. — 631 с.

© Егоров Михаил Валерьевич (egorovmv89@mail.ru).

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»