DOI 10.37882/2223–2966.2023.01.10

РАЗРАБОТКА КАЛЬКУЛЯТОРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Георгиева Марьяна Альбековна
Ст. преподаватель, КБГУ им. Х. М. Бербекова
г. Нальчик
maryana.g@list.ru
Ксенофонтов Александр Семенович
КБГУ им. Х. М. Бербекова, г. Нальчик
a_ksenofontov@mail.ru
Блиева Оксана Зауровна
Диспетчер дирекции ИИЭиР, КБГУ им. Х. М. Бербекова,
г. Нальчик
roksy_85@mail.ru
Дзамихова Фатимат Хасеновна
Преподаватель, КБГУ им. Х. М. Бербекова (г. Нальчик)
taft80@mail.ru
Езаова Бэлла Заурбиевна
Магистрант, КБГУ им. Х. М. Бербекова, г. Нальчик
alena_ezaova@mail.ru
Тлепшева Диана Ануаровна
КБГУ им. Х. М. Бербекова, г. Нальчик
tliepshieva@list.ru

DEVELOPMENT OF A CALCULATOR FOR SOLVING SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS

M. Georgieva
A. Ksenofontov
O. Blieva
F. Dzamikhova
B. Ezaova
D. Tlepsheva

Summary. Solving systems of linear algebraic equations is one of the main problems of linear algebra. This work is very important for solving scientific and technical problems, in addition, it is auxiliary in the implementation of many algorithms of computational mathematics, mathematical physics, and processing of experimental results.

That is why the development of a program that solves SLAE is an important step in solving this problem. The use of this program in solving problems will not only increase the accuracy of calculations, but also significantly reduce their time.

Keywords: linear analysis, dynamical systems, algebraic equations, calculator

Аннотация. Решение систем линейных алгебраических уравнений является одной из основных задач линейной алгебры. Эта работа очень важна для решения научно-технических задач, кроме того, она является вспомогательной при реализации многих алгоритмов вычислительной математики, математической физики, обработке экспериментальных результатов.

Именно поэтому разработка программы, выполняющей решение СЛАУ, является важным шагом для решения данной проблемы. Применение данной программы при решении задач не только повысит точность вычислений, но и значительно сократит их время.

Ключевые слова: линейный анализ, динамические системы, алгебраические уравнения, калькулятор.

Целью данной работы являлась разработка прикладной программы, обеспечивающей вычисления СЛАУ методом Гаусса, Крамера или методом прогонки.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи [1–5]:

- изучить математическую составляющую вопроса, проанализировать формулы и законы, рассмотреть частные случаи;
- разработать оптимальную схему взаимодействия «пользователь — система», разработать способы ввода данных и отображения результатов вычислений;
- построить примерную блок-схему программы;
- реализовать программное обеспечение приложения;
- получить и проанализировать результаты проделанной работы.

Главное меню программы (рис. 1) содержит 3 активные кнопки:

- Начать — запускается основная часть программы;

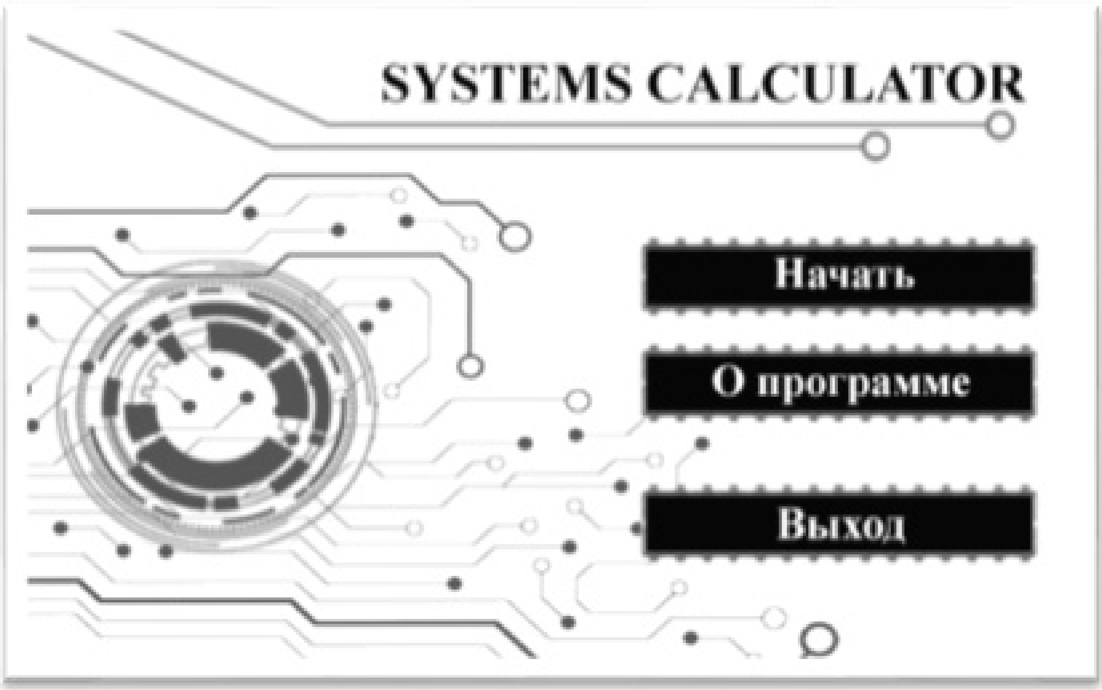

Рис. .1 Главное меню

Рис. 2. О программе

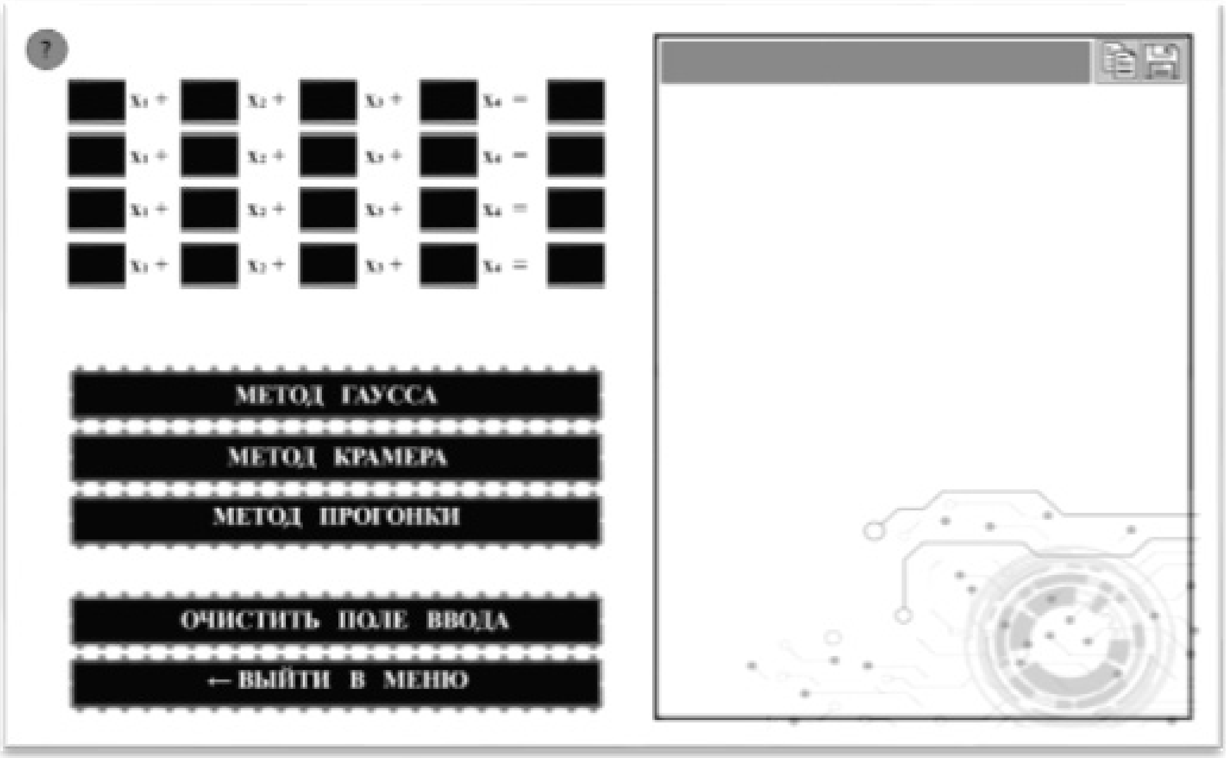

Рис. 3. Основной экран

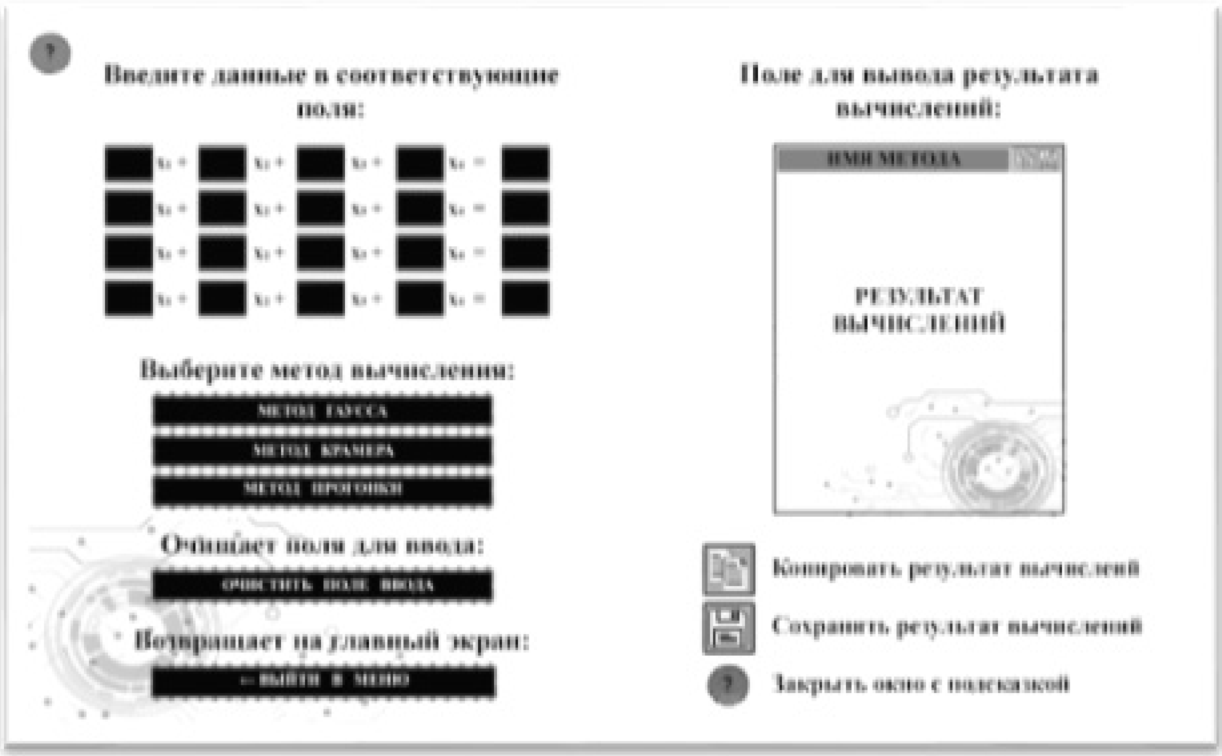

Рис. 4. Подсказка

- О программе — открывает раздел с описанием данной программы;
- Выход — завершает работу программы.

В разделе «О программе» имеется информация об авторе проекта, а также описание самой программы (рис. 2).

Решение систем линейных алгебраических уравнений осуществляется методом Гаусса, Крамера или методом прогонки.

Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) называется объединение n линейных уравнений, каждое из которых содержит k переменных:

Все прямые методы основаны на том, что исходная система приводится к эквивалентной, но имеющей более простую форму системе, которую легче решать.

В отличие от прямых методов, итерационные методы могут давать точное решение системы лишь как результат единообразного процесса итераций. Методы порождают последовательность приближенных решений ( ), и исходная матрица участвует лишь в матрично–векторном умножениях. При оценке качества итерационного процесса самым важным вопросом является сходимость полученной последовательности векторов к решению системы и скорость этой сходимости. Не лишним здесь будет и свойство самоисправляемости таких методов. Это свойство делает их менее чувствительными по сравнению с точными методами к отдельным ошибкам, допущенным при вычислениях.

На рисунке 3 представлен основной экран программы. На нем расположены:

- поля для ввода данных, необходимых при вычислении;
- кнопки для выбора метода вычисления, очистки полей ввода, возвращения на экран главного меню;
- поле для вывода результата вычислений с двумя активными кнопками (копировать и сохранить);
- значок для отображения подсказки;

На рисунке 4 изображена вкладка с подсказкой:

1. Метод Гаусса

Алгоритм метода Гаусса состоит из двух этапов. Первый этап называется **прямым ходом** метода и заключается в приведении матрицы системы к треугольному виду по формулам:

$k = 1, 2, \ldots, n - 1$

$$a_{ij} := a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} a_{kj},\ \mathrm{j} = \mathrm{k}, \mathrm{k}+1, \ldots, \mathrm{n};$$

$$b_i := b_i - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} b_k,\ \mathrm{i} = \mathrm{k}+1, \mathrm{k}+2, \ldots, \mathrm{n};$$

Таким образом, выполнив (n–1) шаг, мы получим систему с верхней треугольной матрицей, причем эта система эквивалентна исходной, а элемент a_{kk}, на который происходит деление, называется **ведущим элементом** на k-м шаге.

Решение системы с треугольной матрицей выписывается явно и называется обратным ходом метода Гаусса:

$$x_k := \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j}{a_{kk}}, k = n, n-1, \ldots, 1$$

Эти формулы имеют смысл, если только все ведущие элементы отличны от нуля: $a_{kk} \neq 0$. Но эти ограничения обременительны, поэтому применяется метод Гаусса с выбором главного элемента.

На первом шаге среди всех элементов первого столбца находим максимальный по модулю элемент:

$$|a_{k1}| = \max_{1<i<n} |a_{i1}|$$

Далее k-ю строку меняем с первой строкой местами, при этом найденный максимальный элемент станет ведущим элементом, и он отличен от нуля. Выполняем первый шаг метода Гаусса, то есть обнуляем все элементы первого столбца под ведущим элементом. Далее ищем максимальный по модулю элемент среди a_{i2}, где $2 \leq i \leq n$.

Следующие шаги делаются аналогично, и всегда максимальный по модулю элемент будет отличен от нуля. Если $\det A \neq 0$, то все ведущие элементы, полученные методом Гаусса с выбором главного элемента, будут отличны от нуля. Поэтому ни на каком шаге деления на нуль не будет. И наоборот, если на каком-то шаге найденный максимальный по модулю элемент окажется равным нулю, то это указывает, что определитель исходной матрицы был равен нулю. Точность результатов будет определяться точностью выполнения арифметических операций при преобразовании элементов матрицы.

Замечание. Вместо максимального по модулю элемента можно использовать любой ненулевой элемент. Но поскольку происходит деление на этот элемент, то лучше всего использовать максимальный, что даст минимальную погрешность.

На рисунке 5 показан результат работы программы при выборе метода Гаусса:

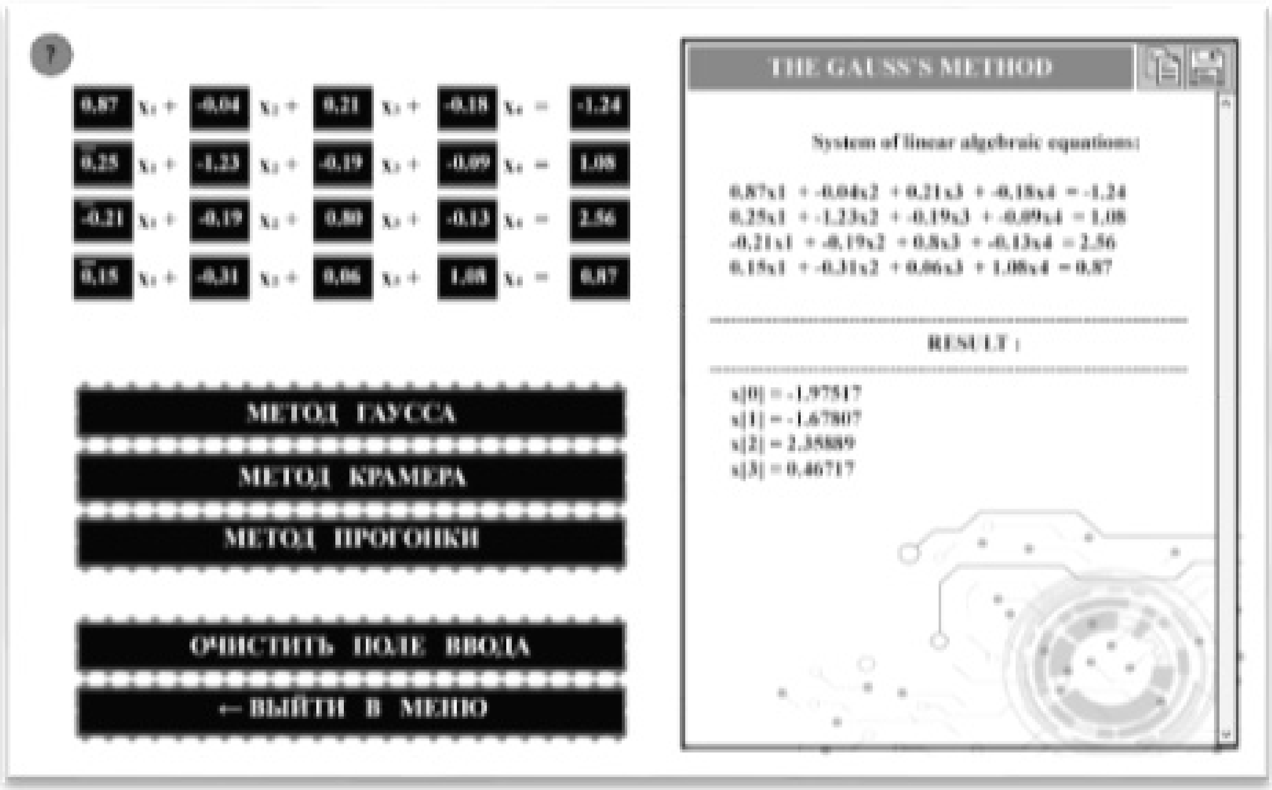

Рис. 5. Результат вычислений методом Гаусса

2. Метод Крамера

Метод Крамера основывается на использовании определителей в решении СЛАУ, что значительно ускоряет процесс решения.

Метод Крамера предназначен для решения системы ненулевых линейных алгебраических уравнений, где число неизвестных переменных равно числу уравнений и определителю базовой матрицы.

Пусть дана СЛАУ следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Система содержит неизвестные переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$, числовые коэффициенты $a_{ij}, i = \overline{1,n}$ и свободные члены $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Решением такой СЛАУ является набор значений $x_1, x_2, \dots, x_n$, при которых все уравнение системы становятся тождествами.

Данная система может быть представлена в следующем матричном виде:

$AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} —$$

основная матрица системы, состоящая из коэффициентов при неизвестных;

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} —$$

матрица-столбец свободных членов;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} —$$

матрица-столбец неизвестных переменных.

В результате вычислений матрица X становится решением СЛАУ, а равенство $AX = B$ — тождеством.

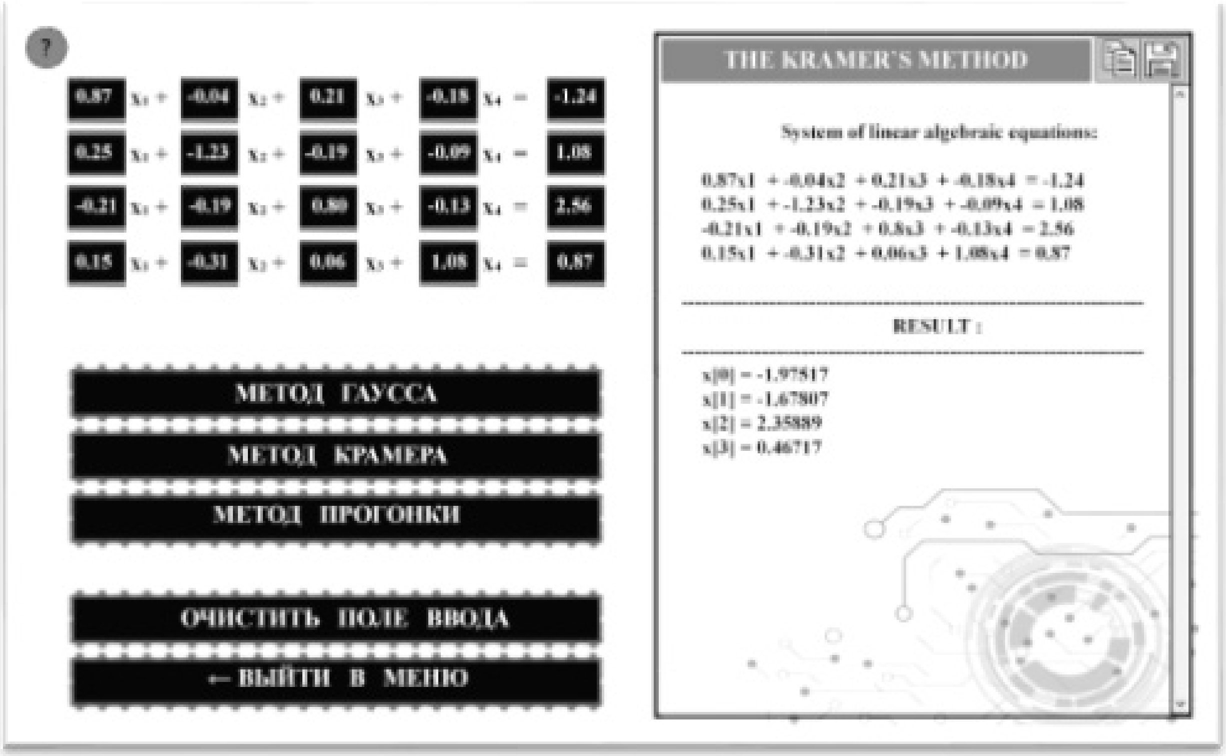

Рис. 6. Результат вычислений методом Крамера

В основе метода Крамера лежат 2 свойства:

- определитель квадратной матрицы $A = |a_{ij}|, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$ *равняется сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{p1} * A_{p1} + a_{p2} * A_{p2} + \cdots + a_{pn} * A_{pn} = a_{1q} * A_{1q} + a_{2q} * A_{2q} + \cdots + a_{nq} * A_{nq}$$

- сумма произведений какой-либо строки(столбца) определителя на соответствующие алгебраические дополнения элементов любой другой строки (столбца) равна нулю:

$$a_{p1} * A_{p1} + a_{p2} * A_{p2} + \cdots + a_{pn} * A_{pn} = 0$$

$$a_{1q} * A_{1q} + a_{2q} * A_{2q} + \cdots + a_{nq} * A_{nq} = 0$$

$$p = \overline{1,n}, q = \overline{1,n}, p \neq q$$

Умножаем уравнения системы на соответствующие алгебраические дополнения 1-го столбца матрицы A:

$$\begin{cases} A_{11}a_{11}x_1 + A_{11}a_{12}x_2 + \cdots + A_{11}a_{1n}x_n = A_{11}b_1 \\ A_{21}a_{21}x_1 + A_{21}a_{22}x_2 + \cdots + A_{21}a_{2n}x_n = A_{21}b_2 \\ \vdots \\ A_{n1}a_{n1}x_1 + A_{n1}a_{n2}x_2 + \cdots + A_{n1}a_{nn}x_n = A_{n1}b_n \end{cases}$$

Теперь необходимо сложить все левые части уравнений системы, сгруппировав слагаемые при неизвестных переменных, а затем приравнять получившуюся сумму к сумме всех правых частей уравнения:

$$\begin{aligned} &x_1(A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + \cdots + A_{n1}a_{n1}) + \\ &+ x_2(A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + \cdots + A_{n1}a_{n2}) + \cdots \\ &+ x_n(A_{11}a_{1n} + A_{21}a_{2n} + \cdots + A_{n1}a_{nn}) = \\ &= A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n \end{aligned}$$

Из свойств определителя следует, что:

$$\begin{aligned} A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + \cdots + A_{n1}a_{n1} &= |A| \\ A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + \cdots + A_{n1}a_{n2} &= 0 \\ &\vdots \\ A_{11}a_{1n} + A_{21}a_{2n} + \cdots + A_{n1}a_{nn} &= 0 \end{aligned}$$

$$A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

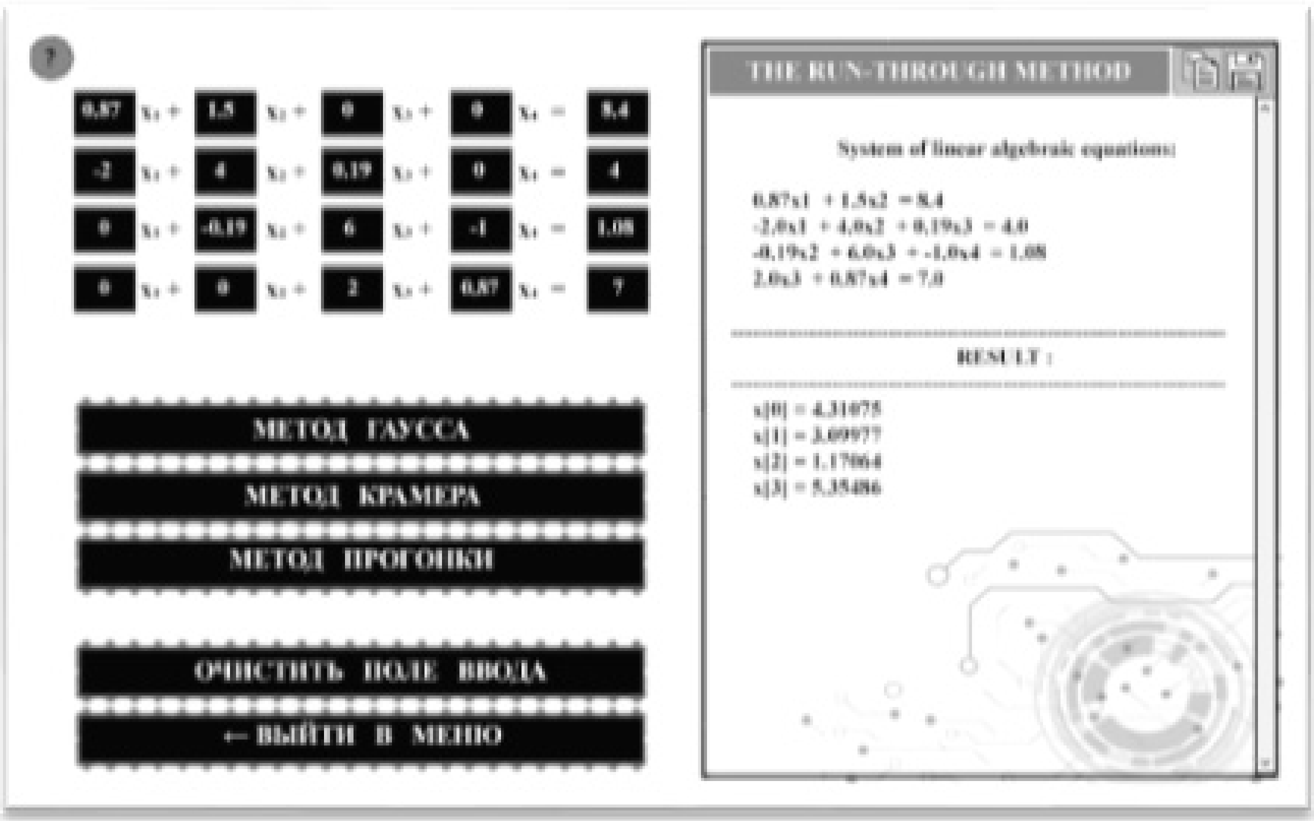

Рис. 7. Результат вычислений методом прогонки

Предыдущее равенство принимает вид:

$$x_1 * |A| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Из этого мы получаем $x_1 = |A|$.

Подобным образом выводим оставшиеся неизвестные переменные системы. Для удобства введем следующие обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_{x1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, \ \Delta_{xn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

С их помощью мы получаем формулы Крамера для решения СЛАУ:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x1}}{\Lambda}, x_2 = \frac{\Delta_{x2}}{\Lambda}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_{xn}}{\Lambda}$$

Замечание. Тривиальное решение ($x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ при $A \neq 0$ может получится только в том случае, если система уравнений является однородной ($b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$). В таком случае определители будут равняться нулю, т.к. в них содержится столбец с нулевыми элементами.

На рисунке 6 показан результат работы программы при выборе метода Крамера:

3. Метод прогонки

Метод прогонки является частным случаем метода Гаусса и применяется для решения систем линейных уравнений с **трёхдиагональной матрицей**. Это вариант метода последовательного исключения неизвестных.

Система уравнений $Ax = F$, где A — трёхдиагональная матрица, равноценна соотношению:

$$A_i x_{i-1} + C_i x_i + B_i x_{i+1} = F_i$$

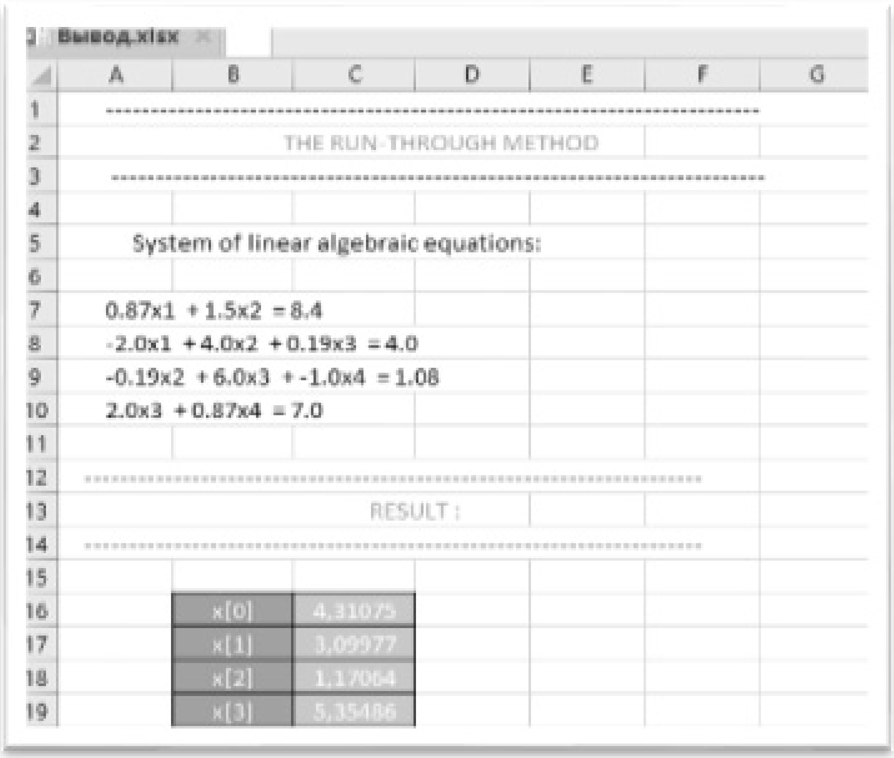

Рис. 8. Сохранение в файл

Данный метод базируется на предположении, что неизвестные, которые необходимо найти, связаны соотношением:

$x_i = a_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}$, где $i = n-1, n-2, \dots, 1.$

Выразим x_{i-1} и x_i через x_{i+1}, а затем подставим в уравнение, используя соотношение:

$$(A_i a_i a_{i+1} + C_i a_{i+1} + B_i) x_{i+1} + A_i a_i \beta_{i+1} + \\ + A_i \beta_i + C_i \beta_{i+1} - F_i = 0,$$

где F_i — правая часть i-го уравнения.

При условии, что:

$$\begin{cases} A_i a_i a_{i+1} + C_i a_{i+1} + B_i = 0 \\ A_i a_i \beta_{i+1} + A_i \beta_i + C_i \beta_{i+1} - F_i = 0 \end{cases} —$$

соотношение будет выполнятся вне зависимости от решения.

Получаем:

$$\begin{cases} a_{i+1} = \dfrac{-B_i}{A_i a_i + C_i} \\ \beta_{i+1} = \dfrac{F_i - A_i \beta_i}{A_i a_i + C_i} \end{cases}$$

Из 1-го уравнения:

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{-B_1}{C_1} \\ \beta_2 = \dfrac{F_1}{C_1} \end{cases}$$

После нахождения прогоночных коэффициентов a и β, используя уравнение (2), получаем решение системы:

$$x_i = a_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}, i = \overline{n-1, 1}$$

$$x_n = \frac{F_n - A_n \beta_n}{A_n a_n + C_n}$$

Уравнение (1) равнозначно:

$$A' x = F'$$

С наддиагональной матрицей:

$$A' = \begin{pmatrix} C_1' & B_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & C_2' & B_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3' & B_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & C_{n-1}' & B_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C_n' \end{pmatrix}$$

Вычисление производится в 2 этапа. На 1-м — вычисляются компоненты матрицы C'_i и вектора F', начиная с $i = 2$ до $i = n$

$$C'_1 = C_1$$

$$C'_i = C_i - \frac{A_i}{C'_{i-1}} B_{i-1}$$

и

$$F'_1 = F_1$$

$$F'_i = F_i - \frac{A_i}{C'_{i-1}} F_{i-1}$$

На 2-м этапе вычисляем решение для $i = n, n-1, \dots, 1$:

$$x_n = \frac{F'_n}{C'_n}$$

$$x_i = \frac{F'_i - B_i x_{i+1}}{C'_i}$$

Замечание. Для применимости формул метода прогонки достаточно свойства строгого диагонального преобладания у матрицы А.

На рисунке 7 показан результат работы программы при выборе метода прогонки:

На рисунке 8 показан результат сохранения в файл вычислений методом прогонки:

Подводя итоги, можно сказать, что была разработана и реализована программа, написанная на языке программирования Python, представляющая собой калькулятор для вычисления СЛАУ тремя различными методами. Таким образом, все поставленные задачи решены, и цель работы достигнута.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эрик Мэтиз. Изучаем Python. Программирование игр, визуализация данных, веб-приложения. Электронное издание.
2. Н.В. Гредасова, М. А. Корешникова. Линейная алгебра. Электронное издание.
3. Георгиева М.А., Георгиева И. А., Арванова С. М., Чочиева А. М., Лосанов Х. Х., Тлепшева Д. А. Обучающая система на основе чат-бота // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и Технические Науки. —2022. -№ 08. -С. 68–73
4. Георгиева М.А., Езаова А. Г., Блиева О. З., Арванова С. М., Георгиева И. А., Хамдохова Х. Р. Разработка калькулятора для систем ОДУ 1-го порядка // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и Технические Науки. —2022. -№ 03/2. -С. 39–44

© Георгиева Марьяна Альбековна (maryana.g@list.ru), Ксенофонтов Александр Семенович (a_ksenofontov@mail.ru),
Блиева Оксана Зауровна (roksy_85@mail.ru), Дзамихова Фатимат Хасеновна (taft80@mail.ru),
Езаова Бэлла Заурбиевна (alena_ezaova@mail.ru), Тлепшева Диана Ануаровна (tliepshieva@list.ru).
Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»