

О БИФУРКАЦИЯХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ НА ПЛОСКОСТИ

ON BIFURCATIONS OF PERIODIC ORBITS IN DYNAMICAL SYSTEMS ON A PLANE

A. Morozov
D. Bulekbaev

Summary. Mathematical models of nonlinear oscillations are considered. Based on numerical modeling, bifurcation curves corresponding to the generation of limit orbits from heteroclinic and homoclinic orbits are constructed. This highlights the areas in the parameter space that correspond to stable stationary oscillations. The classical results of A.A. Andronov and E.A. Leontovich were used.

Keywords: oscillations, phase plane, separatrix contour, separatrix loop, stable orbit bifurcation.

Морозов Алексей Валентинович

Кандидат физико-математических наук, профессор,
Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского
Alex.morozof@gmail.com

Булекбаев Дастанбек Абдыкалыкович

Доктор технических наук, доцент,
Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского
atiman@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются математические модели нелинейных колебаний. На основе численного моделирования строятся бифуркационные кривые, отвечающие рождению предельных орбит из гетероклинических и гомоклинических орбит. Тем самым выделяются области в пространстве параметров, которым отвечают устойчивые стационарные колебания. Использовались классические результаты А.А. Андропова и Е.А. Леонтович.

Ключевые слова: колебания, фазовая плоскость, сепаратрисный контур, петля сепаратрисы, бифуркация устойчивой орбиты.

Введение

Хорошо известно, что в теории двумерных автономных систем существует ряд сценариев рождения устойчивых периодических движений, которым на практике отвечают рабочие режимы технических устройств. Особый интерес, при этом, представляет задача построения областей в пространстве параметров, в которых такие режимы наблюдаются и обладают свойством притяжения (устойчивости). В настоящей статье рассматриваются две двухпараметрические динамические модели, для которых известны теоремы существования о рождении периодических движений из особых орбит, связывающих седловые состояния равновесия. С помощью численного анализа на плоскости параметров для рассматриваемых моделей строятся границы областей устойчивости.

Модель А

Рассмотрим уравнение динамики нелинейного осциллятора

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(\alpha x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x - x^3 = 0 \quad (1)$$

и эквивалентную ему динамическую систему [1–3]

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\mu(\alpha x^2 - 1)y - x + x^3 \end{cases} \quad (2)$$

В (1), (2) $x = x(t)$, t – время, μ, α – положительные параметры.

Система (2) имеет следующие состояния равновесия: $C_0(0,0), C_1(-1,0), C_2(1,0)$, причем C_1 и C_2 всегда седлового типа.

Рассмотрим для начала консервативный случай, отвечающий параметру $\mu = 0$. При этом (2) интегрируема, и ее первый интеграл имеет вид

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} = E = \text{const} \quad (3)$$

Инвариантные кривые, отвечающие уравнению (3) изображены на рис. 1. Нетрудно проверить, что при $E = \frac{1}{4}$ уравнение (3) задает: 1) две сепаратрисы, идущие из седла в седло образующие сепаратрисный контур, 2) две сепаратрисы, исходящие из седел и две входящие в седла и, 3) состояния равновесия $C_{1,2}$. При $E \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ уравнение (3) задает семейство периодических орбит (циклов). При $E = 0$ (3) определяет состояние равновесия C_0 . При $E > \frac{1}{4}$ (3) описывает семейство незамкнутых орбит, охватывающих сепаратрисный контур.

В диссипативном случае ($\alpha = 0$ и $\mu < 0$) в силу свойства поворота векторного поля и неравенства

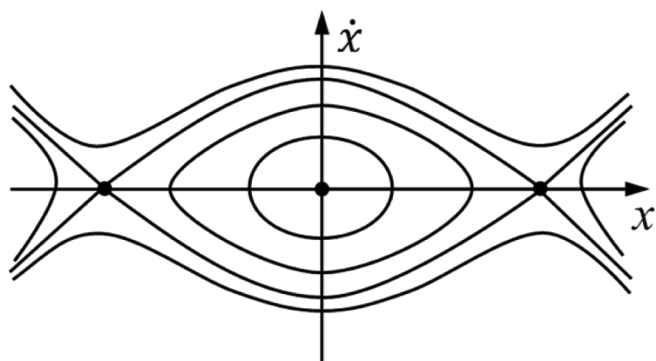


Рис. 1. Орбиты системы (2) ($\mu = 0$)

$\frac{d}{dt} \left(\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) = \mu y^2 < 0$ фазовый портрет претерпит изменения, отмеченные на рис. 2. В этом случае, входящие в первый интеграл, инвариантные кривые становятся бесконтактными с направлением поля внутрь. Состояние равновесия C_0 при этом становится устойчивым фокусом (или узлом).

Для параметров $\alpha = 0$ и $\mu > 0$ фазовая картина меняется: состояние равновесия C_0 становится неустойчивым фокусом (рис. 3), если $0 < \mu < 2$ или неустойчивым узлом, если $\mu > 2$.

Рождение периодической орбиты из сепаратрисного контура

Для уравнения (1) известен следующий результат [4].

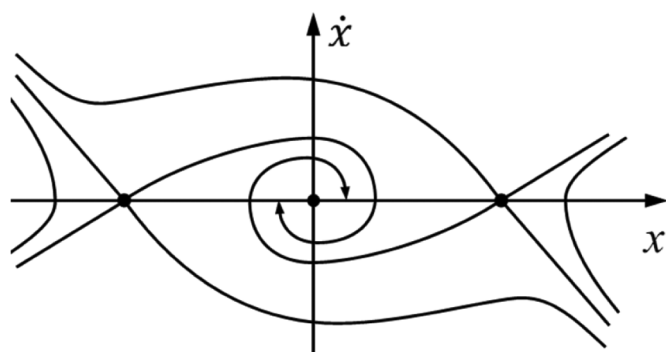


Рис. 2. Устойчивое состояние равновесия ($\mu < 0, \alpha = 0$)

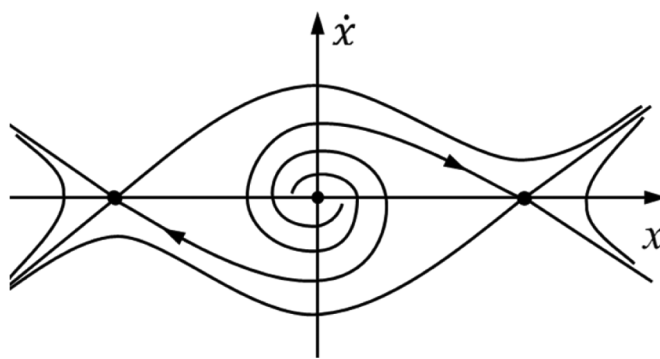


Рис. 3. Неустойчивое состояние равновесия ($2 > \mu > 0, \alpha = 0$)

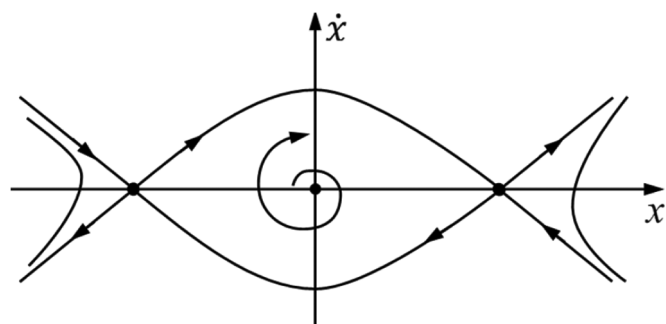


Рис. 4. Односторонне устойчивый сепаратрисный контур

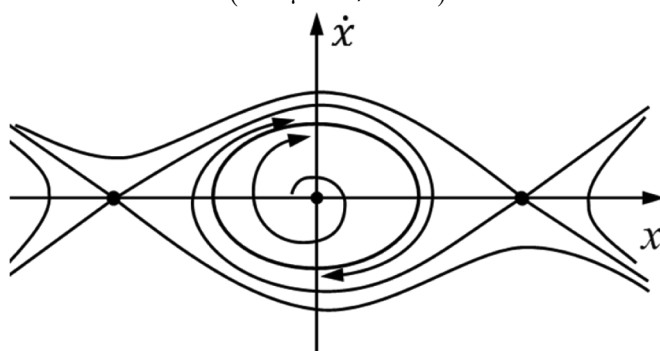


Рис. 5. Асимптотически устойчивая периодическая орбита

Утверждение 1. Для каждого достаточно малого $\mu > 0$ найдется критическое значение α_* , при котором рождается сепаратрисный контур (рис. 4). Этот контур является односторонне устойчивым, т.е. притягивает все орбиты, с начальными данными внутри области \mathbb{D} . При $\alpha > \alpha_*$ контур исчезает и рождается периодическая орбита (рис. 5).

На рис. 6 приведена такая предельная периодическая орбита, полученная с помощью программы WinSet [5] для параметров $\mu = 0.1$ и $\alpha = 10$.

Поскольку теоретические выводы о бифуркации периодических орбит из сепаратрисных контуров носят аналитический характер, далее приводится (таблица 1) результат численного моделирования кривой $\alpha_* = f(\mu)$.

Расчет значений α_* в таблице 1 проводился по следующей схеме [6,7].

1. Система (2) линеаризовалась в седловом состоянии равновесия C_1 .
2. Фиксировался параметр μ .
3. Находились собственные векторы $\vec{S}_{1,2}$: векторы $\pm \vec{S}_1$ — касательные к неустойчивым сепаратрисам, векторы $\pm \vec{S}_2$ — касательные к устойчивым сепаратрисам.
4. Из малой μ -окрестности состояния равновесия C_1 в направлении вектора $+\vec{S}_1$ выпускалась сепара-

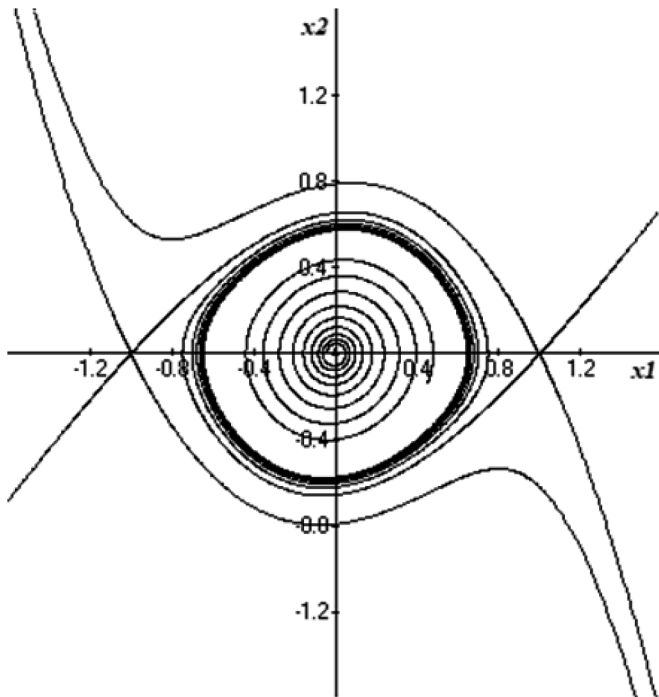
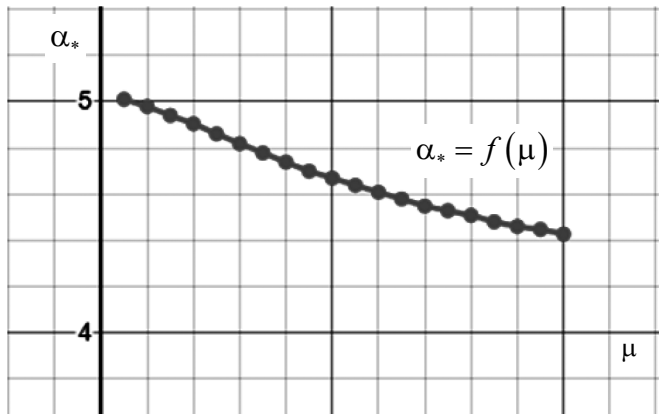


Рис. 6. Устойчивая периодическая орбита

Таблица 1.

μ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
α_*	5.01	4.978	4.940	4.903	4.860	4.818	4.778	4.737	4.698	4.669
μ	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
α_*	4.637	4.607	4.579	4.548	4.528	4.507	4.48	4.46	4.447	4.427



триса. Затем методом пристрелки значение параметра α подбиралось так, чтобы изображающая точка, пробежав по сепаратрисе, попала в μ – окрестность седла C_2 .

5. На последнем этапе проводился контроль найденного значения. С этой целью выпускалась орбита $x(t), y(t)$ из произвольной точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{D}$. Здесь \mathbb{D} – область охватываемая сепаратрисным контуром. Орбита при этом не долж-

на была покидать область \mathbb{D} при $t \rightarrow +\infty$, т.е. контур должен быть E – предельным множеством для орбиты. В этом случае контур называют полуустойчивым. Уточненное значение обозначалось α_* .

На рис. 7 представлен такой полуустойчивый сепаратрисный контур для значений $\mu = 0.8, \alpha_* = 4.736$.

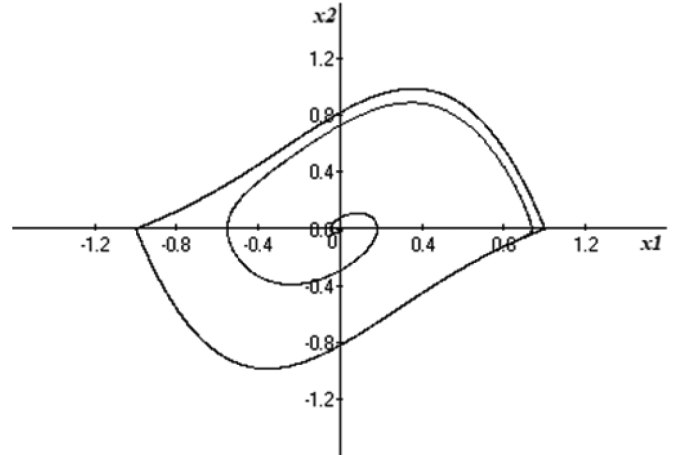


Рис. 7. Асимптотически односторонне устойчивый сепаратрисный контур

Модель В

Рассмотрим модификацию уравнения (1)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(\alpha x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x - x^2 = 0. \tag{4}$$

Здесь, как и выше, μ и α – обозначают положительные параметры.

Запишем (4) в виде системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\mu(\alpha x^2 - 1)y - x + x^2 \end{cases} \tag{5}$$

и отметим ее свойства.

1. Система (5) имеет состояния равновесия $C_0(0,0)$ и $C_1(1,0)$, причем C_1 – седловое, а C_0 , в зависимости от параметров μ, α , может быть центром, фокусом, или узлом.
2. При $\mu = 0$ система (5) интегрируема.
3. Первый интеграл системы (5) ($\mu = 0$) имеет вид

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} = E = \text{const}. \tag{6}$$

Семейство инвариантных кривых (6) представлено на рис. 8.1. При этом: а) значению $E = \frac{1}{6}$ отвечает петля

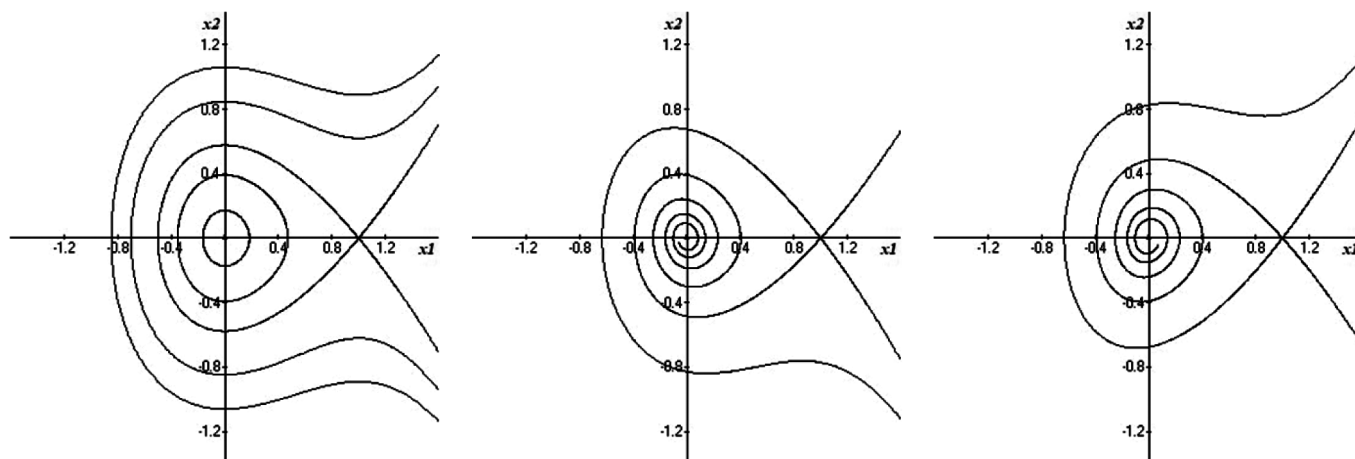


Рис. 8. Орбиты системы (4) при $\alpha = 0$: 1) $\mu = 0$, 2) $\mu = -0.15$, 3) $\mu = 0.15$.

сепаратрисы седла C_1 и две сепаратрисы, исходящие и входящие в седло при $x > 1$, б) значениям $E \in (0, \frac{1}{6})$ — семейство замкнутых орбит, окружающих центр C_0 , в) значениям $E > \frac{1}{6}$ — семейство незамкнутых кривых, охватывающих петлю сепаратрисы.

4. При $\alpha = 0$ и $\mu < 0$ в силу поворота векторного поля и неравенства

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) = \mu y^2 < 0$$

фазовый портрет претерпит изменения, отмеченные на рис. 8.2, поскольку входящие в первый интеграл инвариантные кривые, как и выше, становятся бесконтактными с направлением поля внутрь. Состояние равновесия C_0 при этом становится устойчивым фокусом при $-2 < \mu < 0$ (рис. 8.3) или узлом ($\mu < -2$).

5. При $\alpha = 0$ и $\mu > 0$ — картина, следующая: C_0 — неустойчивый фокус при $0 < \mu < 2$ (рис. 8.3) или неустойчивый узел при $\mu > 2$.

Напомним, что в полуплоскости $y > 0$ изображающая точка движется слева направо, в полуплоскости $y < 0$ — справа налево.

Рождение периодической орбиты из петли сепаратрисы

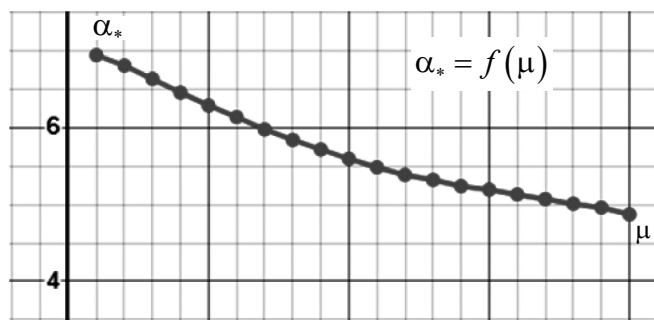
Приводимый далее численный результат (таблица 2) базируется на следующем утверждении [4].

Утверждение 2.

Для каждого малого $\mu > 0$ найдется $\alpha = \alpha_*$ при котором возникает петля сепаратрисы седла C_1 , охватывающая область \mathbb{D} . Область \mathbb{D} — является бассейном притяжения петли. При $\alpha > \alpha_*$ петля разрушается и появляется устойчивая предельная орбита.

Таблица 2.

μ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
α_*	6.942	6.805	6.633	6.455	6.285	6.136	5.976	5.839	5.715	5.593
μ	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
α_*	5.483	5.384	5.319	5.238	5.193	5.13	5.06	5.01	4.96	4.87



На рис. 9.a (слева) показана полуустойчивая петля сепаратрисы, для параметров $\mu = 0.1, \alpha_* = 6.942$. На рис. 9.b (справа) для $\mu = 0.1, \alpha = 9.5$ показана предельная орбита и её бассейн притяжения, границами которого являются устойчивые сепаратрисы.

Методика нахождения параметров α_* аналогична изложенной выше.

Замечание

Приведенные алгоритмы можно использовать для построения бифуркационных кривых и в большем диапазоне изменения параметра μ .

Заключение

Изложенные в статье результаты могут быть интересны специалистам, работающим в электротехнике, радиотехнике, а также теории управления.

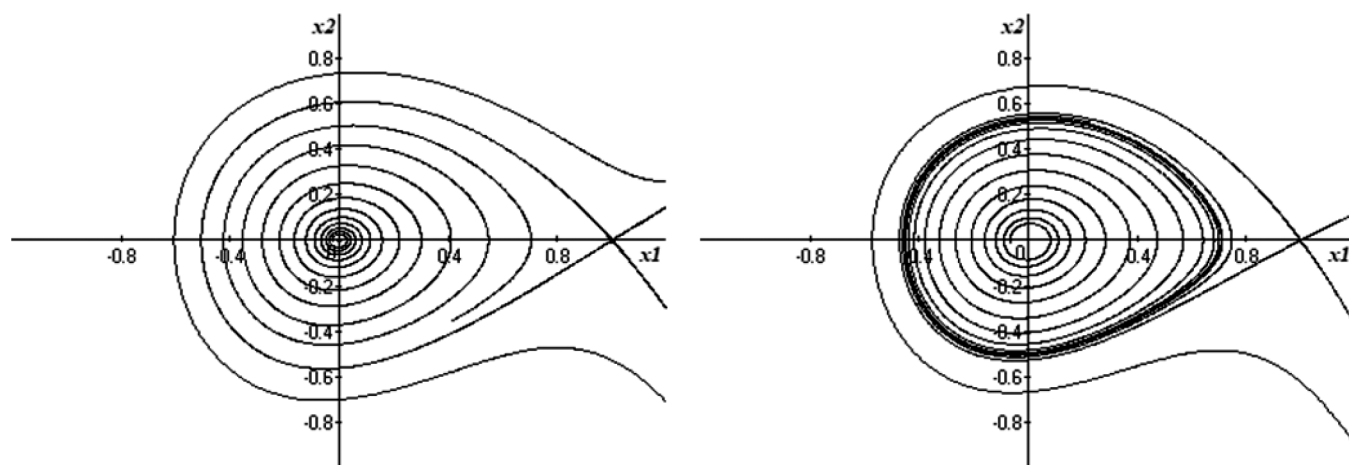


Рис. 9. Бифуркация периодической орбиты

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Издательство физико-математической литературы. 2005. 292 с.
2. Морозов А.Д. Математические методы теории колебаний. М. — Ижевск: Институт компьютерных исследований; НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2017. 144 с.
3. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: МЦНМО, 2012. — 304 с.
4. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. — М. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований. 2009. 548 с.
5. Морозов А.Д., Драгунов Т.Н. Визуализация и анализ инвариантных множеств динамических систем. — М. — Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. 304 с.
6. Булекбаев Д.А., Морозов А.В. О построении бифуркационной кривой, отвечающей рождению цикла, в нелинейной системе второго порядка // Перспективы науки. 2023. №8 (167). С.81–84.
7. Морозов А.В. О компьютерном моделировании колебательных систем с одной степенью свободы на фазовой плоскости // Современные наукоемкие технологии. 2019. № 8. С.147–152.

© Морозов Алексей Валентинович (Alex.morozof@gmail.com); Булекбаев Дастанбек Абдыкалыкович (atiman@mail.ru)

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»