DOI 10.37882/2223–2966.2022.12.35

МЕТОДИКА ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ДРОБНОЙ МОДЕЛИ

METHOD FOR IDENTIFYING THE PARAMETERS OF A FRACTIONAL MODEL

A. Khvorova
V. Pirozhkov
T. Aleroev

Summary. The paper considers one of the problems of solving inverse problems of equations containing a derivative of fractional order. A number of methods for identifying parameters of fractional models arising in various problems of mechanics, oscillation theory and hydrodynamics are described. These techniques are used for the first time in such tasks and are distinguished by their ease of use, and can also be extended to solving many problems in other fields of science.

Keywords: fractional order differential equation, inverse problem of solving a differential equation, mathematical model of viscoelasticity, identification of a fractional order derivative parameter.

Хворова Алла Николаевна
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва
attemp2016@gmail.com
Пирожков Виктор Григорьевич
Доцент, профессор, РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина, Москва
Алероев Темирхан Султанович
Доктор физико-математических наук, профессор, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет), Москва

Аннотация. В работе рассматривается одна из проблем решения обратных задач уравнений, содержащих производную дробного порядка. Излагается ряд методик идентификации параметров дробных моделей, возникающих в различных задачах механики, теории колебаний и гидродинамики. Данные методики впервые применяются в подобных задачах и отличаются своей простотой в использовании, а также могут быть распространены на решения многих задач в других областях науки.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение дробного порядка, обратная задача решения дифференциального уравнения, математическая модель вязкоупругости, идентификация параметра производной дробного порядка.

В течение последних нескольких десятилетий уравнения дробного порядка успешно использовались для моделирования различных физических процессов.

Важно отметить, что решение как прямых, так и обратных задач для дробных дифференциальных уравнений — очень важная проблема. В настоящее время, для решения прямых задач наряду с аналитическими методами широко используются и численные методы. А вот проблема идентификации параметров дробных моделей в основном решается на теоретическом уровне (методом спектрального анализа). В работах Т. Алероева и С. Ерохина [1] предложен принципиально новый метод, где параметры модели определяются исходя из нескольких характерных точек, полученных в эксперименте, путем подстановки значений деформации в аналитические решения соответствующих задач.

Обе части этой методики неразрывно связаны — идентификация параметров осуществляется путем решения большого количества прямых задач. Все это подтверждает актуальность данного исследования.

В данной работе приводится методика идентификации для дробных моделей, возникающих в механике, в теории колебаний и в гидродинамике.

1. Определение параметров модели исходя из нескольких характерных точек, полученных в эксперименте, путем подстановки значений деформации в аналитические решения соответствующей задачи

В общем виде физические соотношения вязкоупругого элемента конструкции можно описать с использованием производных дробного порядка [2]:

$$\sigma(t)+\sum_{i=1}^{m} b_i D^{\alpha_i}\sigma(t)=E_o\varepsilon(t)+\sum_{j=1}^{n} E_j D^{\beta_j}\varepsilon(t) \qquad (1.1)$$

где $\sigma(t)$ — напряжение, а $\varepsilon(t)$ — деформация в момент времени t, $b_i, E_j, \alpha_i, \beta_j$ — параметры соотношений, а D^{ρ} — оператор дробного дифференцирования порядка ρ[2].

Формулировка уравнений движения с использованием производных дробного порядка требует задания не более пяти эмпирических параметров. Это меньше, чем обычно требуется при математическом моделировании линейного вязкоупругого тела, поскольку это соотношение согласуется с основными физическими законами рассматриваемого явления. Таким образом, метод математического моделирования, основанный на производных дробного порядка, является привлекательным для инженерных расчетов. В большинстве случаев число требуемых параметров будет даже меньше пяти.

Как показано в [2], для моделирования многих вязкоупругих материалов достаточно ограничиться соотношением

$$\sigma(t)+bD^{\alpha}\sigma(t)=E_o\varepsilon(t)+E_1D^{\beta}\varepsilon(t), \qquad (1.2)$$

которое, при отсутствии мгновенной упругости, что характерно для большинства полимеров, сводится к более простому соотношению

$$\sigma(t)=E_1D^{\beta}\varepsilon(t) \ ,$$

где $\sigma(t)$ — напряжение, а $\varepsilon(t)$ — деформация, E_1 и $0 < \beta < 1$ — параметры материала. Здесь оператор D^{β} — оператор дробного дифференцирования в определении Капуто [2].

Прежде всего отметим, что в математическом моделировании под идентификацией подразумевается нахождение параметров модели и ее структуры, обеспечивающей адекватное соответствие выходных данных объекта и модели при одинаковых входных воздействиях. Подход к построению модели на основе идентификации называют также экспериментальным подходом, в отличие от аналитического, когда модель определяется на основе основных законов механики, химии и т.д. В зависимости от объема исходной информации об исследуемом объекте подходы и методы идентификации можно рассматривать в широком смысле, когда неизвестна структура объекта (непараметрическая или структурная идентификация); или в узком смысле, когда стоит задача оценки параметров модели известной структуры (параметрическая идентификация).

Под идентификацией в дальнейшем будем подразумевать определение параметров моделей, предполагая, что уравнения этих моделей заранее известны.

Для соотношения (1.2) возникает важнейшая обратная задача параметрической идентификации — определения параметра β по экспериментальным данным. Так как точное вычисление дробных производных от большинства даже элементарных функций невозможно, то в общем случае эта задача достаточно сложна и именно поэтому проблема определения параметров моделей остается мало изученной.

И практически не существует методов параметрической идентификации для моделей, основанных на операторах дробного дифференцирования, что служит основным препятствием проникновению идей дробного исчисления в механику, химию и т.д.

Так, в фундаментальных работах [1]- [2] параметры уравнений для стекла Corning 10 определяются путем наилучшего среднеквадратического приближения экспериментальных данных и решений, полученных в результате математического моделирования. Такой подход требует большого числа экспериментальных данных, что предполагает наличии значительных лабораторных мощностей.

В работах [3]- [6], почти одновременно для параметрической идентификации уравнения ползучести была предложена номографическая методика сравнения экспериментальной зависимости с различными модельными кривыми с известными параметрами. Этот метод, как показывает, работа автора [6] весьма трудоемок и обладает большой погрешностью, а также сопряжен с возможными ошибками. Следует отметить, что параметр β определенный номографической методикой автором в работе [6] приблизительно равнялся 0,65, а тот же параметр β, вычисленный с помощью методики, основанной на теореме существования и единственности (которая приводится автором в той же работе) равнялся 0,63, то показывает довольно существенную ошибку, которую дает номографическая методика.

Большой теоретический интерес представляет работа [5], посвященная разработке методов параметрической идентификации дробных дифференциальных операторов на основе математического моделирования в форме разностных уравнений. К недостаткам этой работы стоит отнести небольшое количество экспериментальных данных, не позволяющее в полной мере оценить эффективность предлагаемых методик. К тому же сами предлагаемые методики достаточно сложны и требуют специального программного обеспечения для работы.

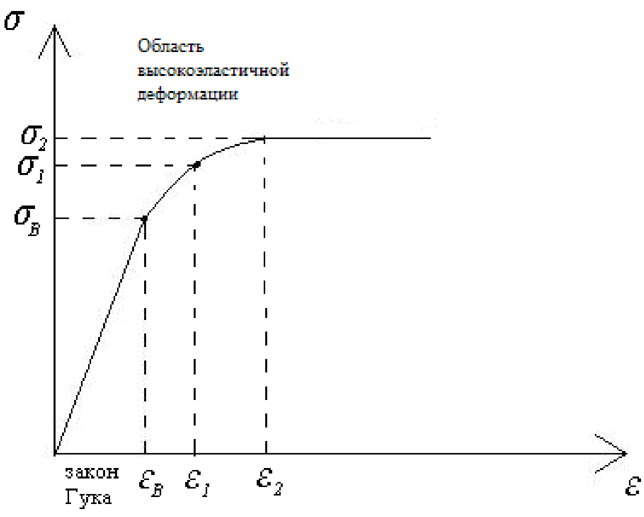


Рис. 1. Вычисление параметра вязкоупругого материала

Таким образом, возникает задача разработки новых эффективных методик параметрической идентификации моделей, описываемых при помощи дифференциальных уравнений дробного порядка. Другими словами, задачу можно сформулировать следующим образом: имея выборку экспериментальных данных процесса, описываемого при помощи дифференциального уравнения с дробной производной, необходимо определить параметры данного процесса, в частности, порядок этой дробной производной.

Задача особенно актуальна, когда у исследователя нет возможности получить дополнительные экспериментальные данные (эксперимент закончен или нет контакта с экспериментатором) и строго выполнить все стадии процесса параметрической идентификации (формирование испытательного сигнала, планирование и проведение эксперимента, определение требования к данным наблюдений и т.д.)

Проблема параметрической идентификации решалась автором в начале с помощью номографической методики. В работе [6] впервые было предложено для параметрической идентификации использовать теорему существования и единственности для уравнения (1.2), что позволило привести формулы для вычисления параметров модели.

Как было отмечено ранее, в ходе изучения напряженно-деформированного состояния полимерных пленок [7] образцы растягивались с постоянной скоростью, одновременно проводились замеры напряжения, т.е. можно записать

$$\varepsilon(t) = kt. \tag{1.3}$$

Конечно, в природе деформация $\varepsilon(t)$ — функция далеко не линейная. Но если удастся установить параметр β для случая линейного нагружения, то, по теореме существования и единственности решения задачи Коши для уравнения дробного порядка можно утверждать, что этот параметр является инвариантным и не зависит от вида функции $\varepsilon(t)$.

Рассмотрим уравнение (1.2), если растяжение материала задается линейно (1.3). Принимая во внимание известную формулу

$$D^{\beta} t = \frac{t^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}, \tag{1.4}$$

получаем

$$\sigma(t) = \frac{kE_1}{\Gamma(2-\beta)} t^{1-\beta} = \frac{k^{\beta} E_1}{\Gamma(2-\beta)} \left[\varepsilon(t)\right]^{1-\beta} \tag{1.5}$$

Обозначив

$$A = \frac{k^{\beta} E_1}{\Gamma(2-\beta)} \tag{1.6}$$

можно записать

$$\sigma(t) = A\left[\varepsilon(t)\right]^{1-\beta}. \tag{1.7}$$

Таким образом, в этом случае напряжение зависит от деформации по степенному закону, что соответствует экспериментальным данным.

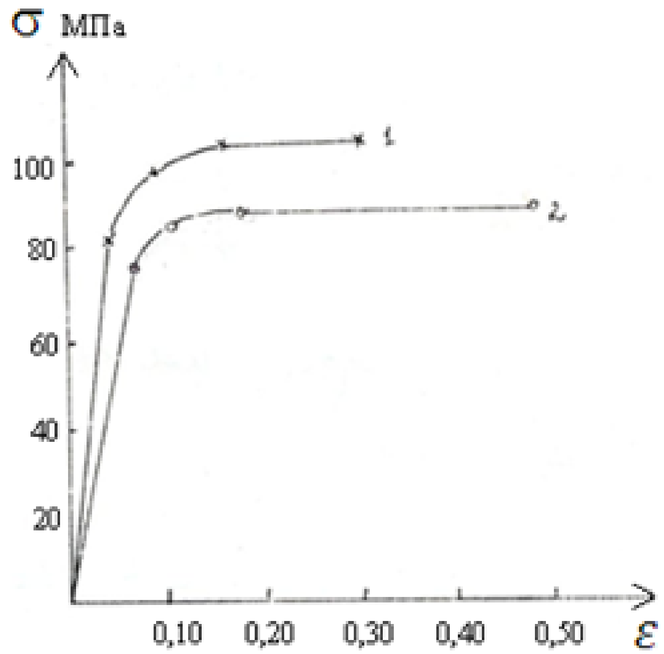


Рис. 2. Зависимость «напряжение-деформация» для образцов полимерных пленок: 1 — ТХД, 2 — диан (взят из статьи Кехарсаевой Э.Р. Модель деформационно-прочностных характеристик хлорсодержащих полиэфиров на основе производных дробного порядка «Пластмассы» № 3,2001)

Формула (1.2) описывает деформацию материала в области высокоэластичной деформации (рисунок 1), т.е. при $\sigma > \sigma_B$. Соотношение (1.7) справедливо, если начало координат находится в точке предела вынужденной эластичности $(\varepsilon_B, \sigma_B)$.

В точке вынужденной эластичности кривая напряжение-деформация становится выпуклой вверх, т.е. $\sigma''(\varepsilon) < 0$. Имея массив исходных экспериментальных данных $\{\sigma_i, \varepsilon_i\}$, где $t_i = ih; \sigma_i = \sigma(t_i);\ \varepsilon_i = kt_i$, можно сформулировать критерий для этой точки:

$$\sigma''(t_i) \approx \frac{\sigma_{i-1} - 2\sigma_i + \sigma_{i+1}}{(kh)^2} < -\delta. \tag{1.8}$$

Пороговое значение $\delta = 0.05$ установлено эмпирически. Наименьшее значение i, при котором выполняется условие (1.8) определяет точку вынужденной эластичности $\varepsilon_{\text{в}} = \varepsilon_i;\ \sigma_{\text{в}} = \sigma_i$.

Если, помимо критической точки $(\varepsilon_B, \sigma_B)$, известны (рисунок 1) еще два результата измерений: $(\varepsilon_1, \sigma_1)$ и $(\varepsilon_2, \sigma_2)$, то, обозначив $\Delta\varepsilon_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_B$, $\Delta\varepsilon_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_B$, $\Delta\sigma_1 = \sigma_1 - \sigma_B$, $\Delta\sigma_2 = \sigma_2 - \sigma_B$, можно записать систему

$$\begin{cases} \Delta\sigma_1 = A\Delta\varepsilon_1^{1-\beta} \\ \Delta\sigma_2 = A\Delta\varepsilon_2^{1-\beta} \end{cases} \tag{1.9}$$

Откуда получаем формулу для параметра соотношения (1.4):

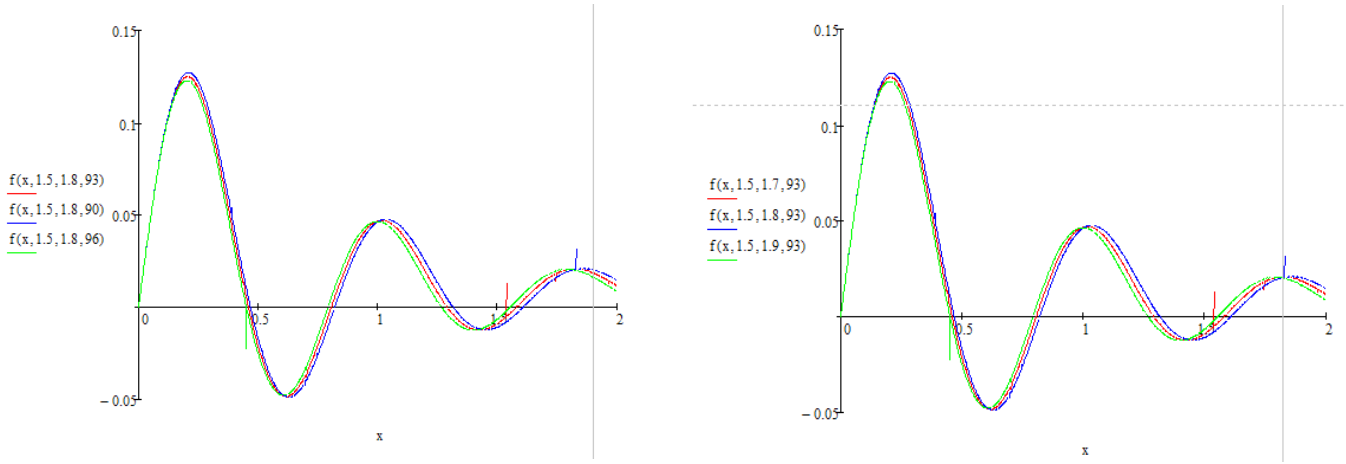
$$\beta = 1 - \frac{\ln\dfrac{\Delta\sigma_2}{\Delta\sigma_1}}{\ln\dfrac{\Delta\varepsilon_2}{\Delta\varepsilon_1}} \tag{1.10}$$

Для примера возьмем диаграммы для двух материалов 1 — ТХД, 2 –диан.

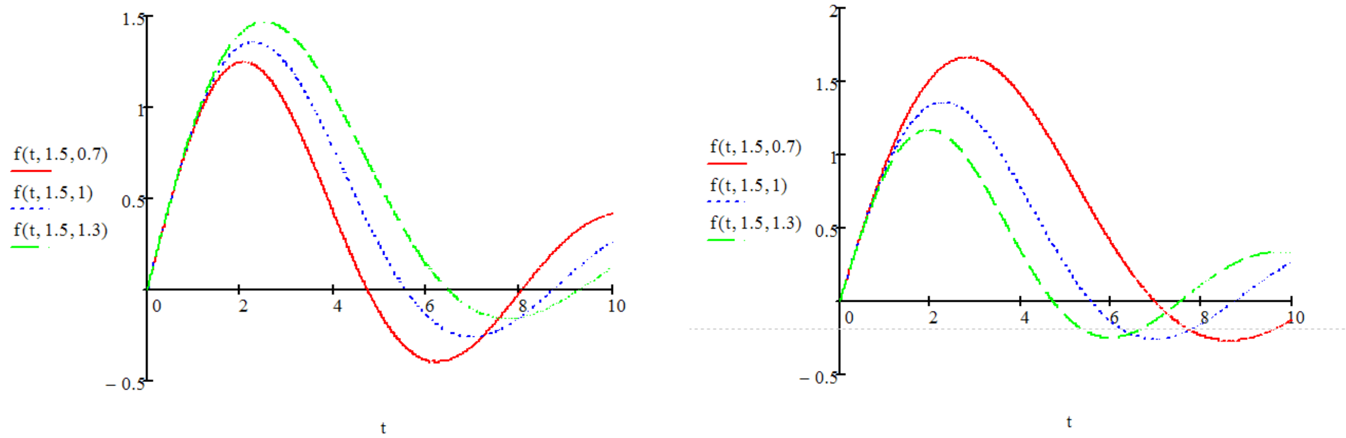
По формуле (1.7) установлено, что для первого образца участок высокоэластичной деформации наступает при $\varepsilon_в = 0{,}06$, $\sigma_в = 82$. Еще две точки возьмем $\varepsilon_1 = 0{,}10$, $\sigma_1 = 97$; $\varepsilon_2 = 0{,}16$, $\sigma_2 = 103$. Таким образом, $\Delta\sigma_1 = 15$, $\Delta\sigma_2 = 21$, $\Delta\varepsilon_1 = 0{,}04$, $\Delta\varepsilon_2 = 0{,}10$. По формуле (1.4.10) получаем $\beta_1 = 0{,}63$.

В статье [6] этот же параметр β_1, полученный этим же методом, был равен 0,65. Этот результат хорошо согласуется с полученным [7] путем аппроксимации экспериментальных кривых кривыми соответствующего дифференциального уравнения с дробными производными.

Для второго образца: $\varepsilon_в = 0{,}08$, $\sigma_в = 76$. Еще две точки возьмем $\varepsilon_1 = 0{,}11$, $\sigma_1 = 84$; $\varepsilon_2 = 0{,}18$, $\sigma_o = 86$. Таким образом, $\Delta\sigma_1 = 8$, $\Delta\sigma_2 = 10$, $\Delta\varepsilon_1 = 0{,}03$, $\Delta\varepsilon_2 = 0{,}10$. По формуле (1.10) получаем $\beta_2 = 0{,}815$.



α = 1.5, b = 1.8, k = 90–93–96 α = 1.5, b = 1.7–1.8–1.9, k = 93



C = 0.7; 1; 1.3

Рис. 3

2. Метод параметрической идентификаций порядка дробной производной в уравнении Бегли-Торвика, описывающее движение гранул полимербетона

Математическая модель изменения деформационно-прочностных характеристик полимербетона при нагружении. Исследовались образцы полимербетона на основе полиэфирной смолы (диан и дихлоангидрид — 1,1 — дихлор — 2,2 — диэтилен). Полимербетон рассматривается, как набор гранул минерального наполнителя, в вязкоупругой среде. Движение гранулы описывается уравнением (2.1), где b — модуль вязкости смолы, k — модуль жесткости смолы, α — параметр вязкоупругости среды, -сила, воздействующая на полимербетон.

$$y(x)''+bD^{\alpha}y(x)+ky(x)=F(x) \qquad (2.1)$$

Для идентификации параметра дробного дифференцирования были построены графики решения задачи Коши

$$my''+bD_{ox}^{\alpha+1}y+ky=f(x),$$
$$y(0)=0, \quad y'(0)=\gamma, \qquad (2.2)$$

Принимая m=1, а $\alpha=1.5$, построим графики при различных b, k (рис. 3).

Анализ этих графиков показывает, что для определения порядка дробной производной достаточно выбрать интервал, на котором эти графики заведомо не пересекаются. Взяв любую точку из этого интерва-

Таблица 1

(0,46; 1,03)	(0,47; 1,02)	(0,48; 1,0198)	(0,49; 1,018)	(0,50; 1,0178)
(0,51; 0,93)	(0,52; 0,83)	(0,53; 0,5)	(0,54; 0,2)	(0,55; 0,18)
(0,56; –0,01)	(0,57; –0,3)	(0,58; –0,61)	(0,59; –0,93)	(0,60; –0,96)
(0,61; –0,21)	(0,62; –0,8)	(0,63; 0,21)	(0,64; 0,24)	(0,65; 0,301)
(0,66; 0,32)	(0,67; 0,38)	(0,68; 0,41)	(0,69; 0,43)	(0,70; 0,431)

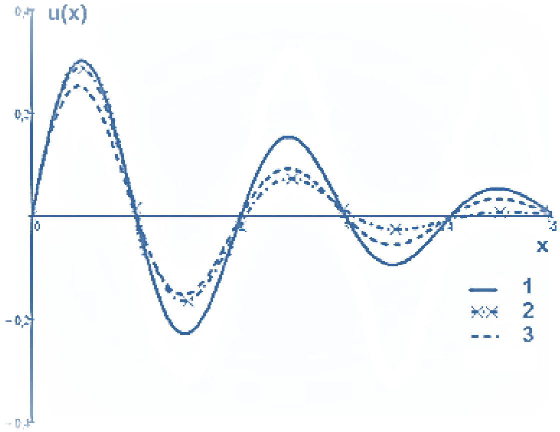


Рис. 4. Решение задачи при различных значениях α.

ла, смотрим, чему равно значение решения в этой точке. И это значение сравниваем с экспериментальными данными. Экспериментальные данные в нашем случае, выглядят следующим образом (таблица 1).

Чтобы выбрать интервал, где графики соответствующих решений, заведомо не пересекаются, приведем графики решений соответствующих задач при различных значениях порядка дробного дифференцирования.

$$\alpha = 0, \alpha = 0.1, \alpha = 0.2, ..., \alpha = 1$$

Из рисунка 4 следует, что за искомый промежуток можно взять интервал [6,3; 6,8]. Берем любую точку из этого промежутка (в частности, можно взять точку 6,5) и вычисляем значение, полученной экспериментальным путем функции, моделирующего колебания полимербетона. Очевидно, что из нашего последнего рисунка следует, что порядок дробного оператора заключен в промежутке (1,4; 1,8), что хорошо согласуется с нашими экспериментальными данными.

3. Математическая модель идентификации параметра дробной производной и прогнозирования результатов для уравнения движения жидкости в скважине

Еще один методом идентификации параметра дробной производной применялся в работе [1]. Он использовался для оценки адекватности математической модели применимой к задаче разработки нефтяной скважины и представленной в виде начальная задача Коши для дифференциального уравнения дробного порядка с переменным коэффициентом.

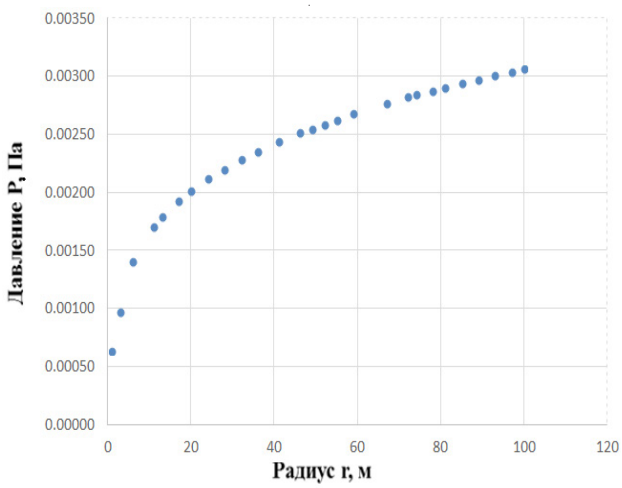
$$\left[P'(r) D^{\alpha} P(r)\right]^2 = a(r) D^{\alpha} P + b(r), \quad 0 < \alpha < 1$$

$$P(0) = C \tag{3.1}$$

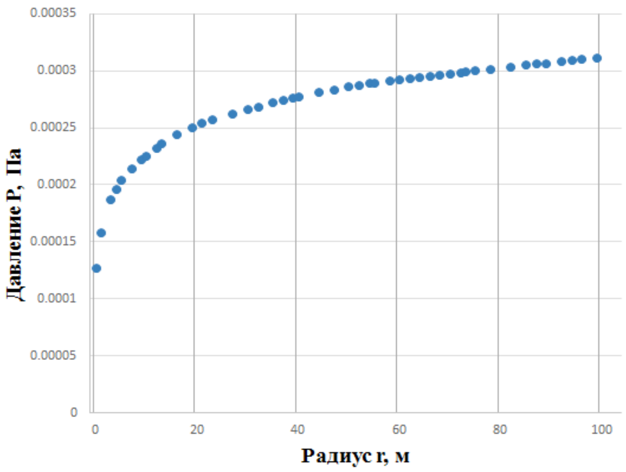
где $P(r)$ — давление в скважине, ∇P — градиент давления, $\bar{v}$ —вектор скорости, k — проницаемость среды, v — модуль $\bar{v}$, β — константа пропорциональности, $r \in [r_c, r_k]$, r_c — радиус скважины, r_k — радиус контура питания.

Уравнение (3.1) описывает изменение давление в скважине при радиальном потоке жидкости с установившемся течением. Для упрощения начальное условие было принято $P(0) = 0$.

Каждая скважина имеет свои уникальные характеристики и свое значение α. Параметр производной дробного порядка α подбирается путем сопоставления данных обработки зависимости действующей толщины



Скважина № 1



Скважина № 2

Рис. 5. Эмпирические данные изменения давления P в призабойных зонах скважины № 1 и № 2.

пласта от градиента давления и решения уравнения (3.1) при различных значения α.

В основе метода идентификации параметра производной лежит максимизация численного показателя качества математической модели — коэффициента детерминации (R^2) для рассматриваемой функции. Коэффициент детерминации (R^2) равен единицы при абсолютной сходимости зависимостей, полученных при решения дифференциального уравнения (3.1) и путем обработки экспериментальных данных скважины.

(R^2) определяется как:

$$R^2 = 1 - \frac{D_{ост}}{D_{общ}} \cdot \frac{n-1}{n-2}, \qquad (3.2)$$

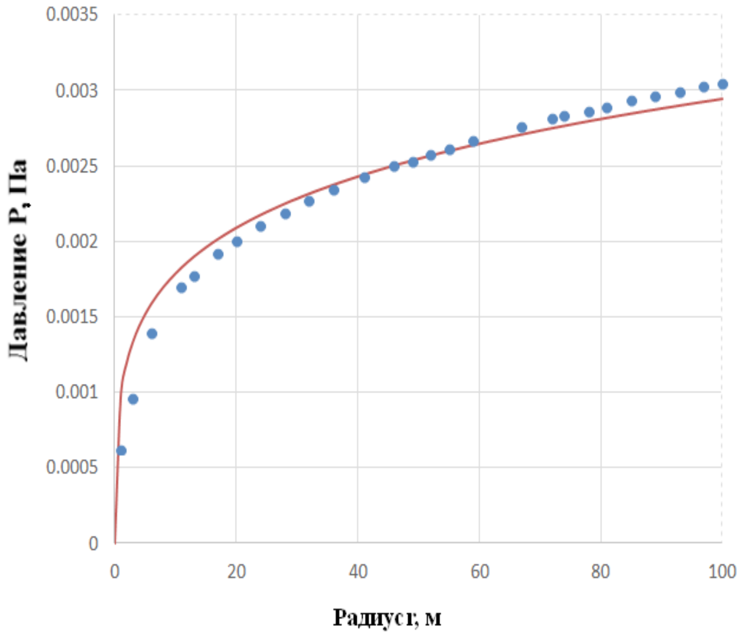
где n — количество рассматриваемых значений, $n - 1$ — степень свободы для общей дисперсии ($D_{общ}$), $n - 2$ — степень свободы для остаточной дисперсии ($D_{ост}$):

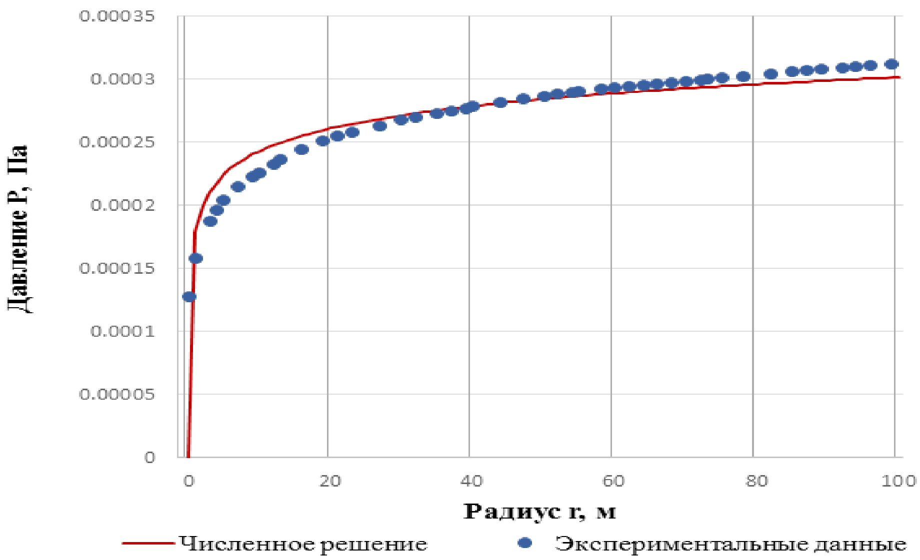
$$D_{ост} = \sum_{1}^{n} (P_{r_i}^{ч} - P_{r_i}^{э}). \qquad (3.3)$$

$P_{r_i}^{ч}$ — значения давлений в точках r_i, полученные при численном решении задачи (3.1), $P_{r_i}^{э}$ — измерения полученное при экспериментальном исследовании скважины, n — количество данных. $D_{общ}$ — общая дисперсия $\overline{P}$ — среднее значение экспериментальных измерений:

Таблица 2. Расчетные значений коэффициентов детерминации

Номер скважины	Порядок производной	$D_{ост}$	$D_{общ}$	R^2
Скважина № 1	α = 0.653	$8.138 \cdot 10^{-7}$	0.000524	0.99545
Скважина № 2	α = 0.762	$7.83181 \cdot 10^{-7}$	0.000622	0.99873





Численное решение • Экспериментальные данные

Рис. 5. Точечный график соответствует экспериментальны данным, сплошная линия соответствует результатам математической модели.

$$D_{общ} = \sum_{1}^{n} (P^{э}_{r_i} - \overline{P}) \qquad (3.4)$$

Для задачи идентификации параметра производной дробного порядка α в работе [8] рассматривались индикаторные кривые давлений в призабойных зонах нескольких скважин полученные путем обработки экспериментальных данных. На рисунке 5 приведены зависимости результатов расчета давлений на расстоянии r от ствола скважин под номером 1 и 2.

Решая уравнение (3.1) и принимая различные значения параметра α было построено ряд зависимостей. Учитывая во внимания данные, представленные на рисунке 4 был определен коэффициент детерминации для каждого решения с разными значениями α.Параметр α принимался такой, для которого коэффициент детерминации был ближе к 1. По результатам анализа для скважины № 1 $\alpha = 0.653$, для скважины № 2 $\alpha = 0.762$.

В таблице 2 приведены рассчитанные значения показателя качества модели — R^2, необходимые для идентификации параметра α двух рассматриваемых скважин. Значимость коэффициента качества модели подтверждена с помощью критерия Фишера на уровне значимости 0.05 для скважины № 1($F_{кр}$ = 1.9472; $F_{набл}$ = 210.3656 при k_1=26, k_2=25) и для скважины № 2 ($F_{кр}$ = 1.6475; $F_{набл}$ = 786.4016 при k_1=45, k_2=44). Отвергается основная гипотеза о незначимости показателя качества R^2: H_0: R^2 =0 и принимается конкурирующая гипотеза о значимости R^2: H_1: $R^2 \neq 0$. Значения расчетных параметров, в том числе и производных дробного порядка α приведены в таблице 3.

Из таблицы 2 наблюдаем, что значения R^2 для скважины № 1 и № 2 близки к единице, а значит построения математической модели и ее идентификация является эффективным инструментом для решения рассматриваемой задачи.

Выводы

Приведенные в данной статье три метода идентификации параметра дробной производной успешно были использованы для решения практических задач в различных областях науки. Данные методы показали свою эффективность и хорошо согласуются с экспериментальными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ерохин С., Алероев Т. «Параметрическая идентификация порядка дробной производной модели Бегли-Торвика», матем.моделирование, 30:7, 2018
2. Бэгли Р.Л., Торвик П. Дж. Диффереациальное исчисление, основанное на производных дробного порядка — новый подход к расчету конструкций с вязкоупругим демпфированием. Аэрокосмическая техника т. 2 № 2, 1984. — с. 84–91.
3. Ерохин С.В., Алероев Т.С., Фриштер Л.Ю. Задача Штурма-Лиувилля для уравнения осциллятора с вязкоупругим демпфированием. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering Volume 11, Issue 3, 2015, стр. 77–81.
4. Ерохин С.В., Алероев Т.С., Фриштер Л.Ю., Колесниченко А.В. Параметрическая идентификация математической модели вязкоупругих материалов с использованием производных дробного порядка. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering Volume 11, Issue 3, 2015, стр. 82–85.
5. Ерохин С.В. Модели ползучести и релаксации материалов с использованием производных дробного порядка. Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. № 6. Москва. 2014. — с. 35–39.
6. Ерохин С.В. Модель деформаций вязкоупругих материалов. Труды международной научно-практической конференции «Инженерные системы — 2010». Москва, РУДН 2010. — с. 378–391.
7. Ерохин С.В., Гачаев А.М. Модель деформаций вязкоупругих материалов. Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. № 1. Москва. 2011. — с. 36–39.
8. Алероев Т.С., Хворова А.Н. Математическая модель идентификации параметра дробной производной и прогнозирования результатов для уравнения движения жидкости в скважине. Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. серия: механика предельного состояния. 2021. № 2 (48). с. 72–79.
9. Хворова А.Н., Ерохин С.В. Математическая модель просачивания жидкости в трещиноватом слое. Научно-технический вестник Поволжья. 2020. № 1. с. 138–141.