

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ФИЛЬТРА КАЛМАНА К ДИНАМИЧЕСКИМ СТОХАСТИЧЕСКИМ МОДЕЛЯМ ОБЩЕГО РАВНОВЕСИЯ

EVALUATION OF THE EFFICIENCY OF APPLYING THE KALMAN FILTER TO DYNAMIC STOCHASTIC GENERAL EQUILIBRIUM MODELS

**O. Mitina
V. Gushel**

Summary. The article is devoted to the study of dynamic stochastic general equilibrium models and the evaluation of the effectiveness of applying the Kalman filter to them.

The purpose of the study is to assess the applicability of such a tool as the Kalman filter for working with dynamic stochastic general equilibrium models in terms of filtering data and predicting the future state of the system based on the current one.

The main method presented in the study is to compare the data obtained during the simulation of the model's behavior with the data obtained using the Kalman filter. In the study, this tool is used to clear data from distortions and predict the future state of the system.

To determine the effectiveness of the Kalman filter, the analysis of various indicators is used in the work: linear Pearson correlation coefficient, mean and median values, standard deviation, standard and mean absolute error. In addition, a comparison with other filtering methods was made for a more objective assessment.

The result of the study is the conclusion about the possibility of effective use of the Kalman filter when working with dynamic stochastic general equilibrium models, based on the analysis of the metrics under consideration and graphical representations of the filter.

Keywords: dynamic stochastic general equilibrium models, data filtering, Kalman filter, time series, data processing.

Митина Ольга Алексеевна

Кандидат педагогических наук, доцент, доцент,
ФГБОУ ВО МИРЭА — Российский технологический
университет, г. Москва
alogmi@yandex.ru

Гушель Василий Олегович

ФГБОУ ВО МИРЭА — Российский технологический
университет, г. Москва
vgstudy@yandex.ru

Аннотация. Статья посвящена теме исследования динамических стохастических моделей общего равновесия и оценке эффективности применения к ним фильтра Калмана.

Целью исследования является оценка применимости такого инструмента, как фильтр Калмана, для работы с динамическими стохастическими моделями общего равновесия в вопросах фильтрации данных и прогнозирования будущего состояния системы на основе текущего.

Основным методом, представленным в исследовании, является сравнение данных, полученных в ходе симуляции поведения модели с данными, полученными при помощи фильтра Калмана. В исследовании при помощи данного инструмента очищают данные от искажений и прогнозируют будущее состояние системы.

Для определения эффективности применения фильтра Калмана в работе используется анализ различных показателей: линейного коэффициента корреляции Пирсона, среднего и медианного значений, стандартного отклонения, средней квадратичной и средней абсолютной ошибки. Помимо этого, произведено сравнение с другими методами фильтрации для более объективной оценки.

Результатом исследования являются выводы о возможности эффективного использования фильтра Калмана при работе с динамическими стохастическими моделями общего равновесия, основанные на анализе рассматриваемых метрик и графических представлений работы фильтра.

Ключевые слова: динамические стохастические модели общего равновесия, фильтрация данных, фильтр Калмана, временные ряды, работа с данными.

Введение

В современной науке динамические стохастические модели общего равновесия имеют широкое распространение и занимают ведущее место среди инструментов для анализа макроэкономических процессов. [1]

Динамические стохастические модели общего равновесия имеют широкое распространение и занимают ведущее место среди инструментов для анализа макроэкономических процессов. При помощи таких моделей описываются сложные экономические взаимосвязи

с учетом случайных внешних воздействий, политических и экономических решений, технологического прогресса.

Важной задачей при работе с такими моделями является оценка их состояний на основе имеющихся данных и прогнозирование их будущего состояния. Для решения этих задач может быть использован фильтр Калмана — алгоритм, который может с большой точностью оценивать состояние линейных динамических систем по неполным и зашумленным измерениям.

Несмотря на широкое распространение динамических стохастических моделей общего равновесия

и фильтра Калмана в научном сообществе, множество вопросов с учетом их совместного использования остаются открытыми. В частности, актуальной является задача оценки эффективности применения фильтра Калмана к таким моделям для анализа и прогнозирования экономических процессов. Такая задача требует глубокого понимания как теоретических основ моделей и методов, фильтрации, так и специфики их применения в условиях современной экономики.

Материалы и методы

В качестве конкретной динамической стохастической модели общего равновесия для исследования взята малая динамическая стохастическая модель общего равновесия [2], имеющая следующий вид:

$$\begin{cases} x_t = E_t x_{t+1} - \frac{1}{\sigma} (i_t - E_t \pi_{t+1} - r_t^n) \\ \pi_t = \beta E[\pi_{t+1}] + k x_t \\ i_t = \rho i_{t-1} + (1 - \rho)(\phi_\pi \pi_t + \phi_x x_t) + v_t \end{cases},$$

- где x_t — отклонение логарифма национального дохода от долгосрочного равновесного состояния;
- σ — эластичность межвременного замещения;
- β — фактор дисконтирования;
- ϕ_π — коэффициент реагирования на целевой показатель инфляции центрального банка;
- ϕ_x — коэффициент реакции центрального банка на разрыв выпуска;
- k — степень жесткости цен;
- ρ — коэффициент сглаживания процентных ставок;
- π_t — инфляция;
- i_t — номинальная процентная ставка;
- v_t — случайные шоки ставки;
- r_t^n — реальная процентная ставка.

В качестве основного метода фильтрации при работе с моделью будет использоваться фильтр Калмана — метод, широко применяемый при работе с линейными системами. [3]

Полный алгоритм работы фильтра Калмана можно представить в виде следующей последовательности:

1. Экстраполяция.
 - 1.1. Экстраполяция состояния.
 - 1.2. Экстраполяция матрицы ковариации.
2. Коррекция.
 - 2.1. Усиление по Калману.
 - 2.2. Коррекция вектора состояния.
 - 2.3. Расчет ковариационной матрицы.

Для корректного применения фильтра Калмана к рассматриваемой модели, необходимо вычислить матрицу перехода состояний для фильтра Калмана. Для этого не-

обходимо представить рассматриваемую ДСМОР в матричном виде. Матричное представление системы представлено формулой:

$$\begin{pmatrix} E_t x_{t+1} \\ E_t \pi_{t+1} \\ i_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sigma} & \frac{1}{\sigma} \\ -\frac{k}{\beta} & \frac{1}{\beta} & 0 \\ (1-\rho)\phi_x & (1-\rho)\phi_\pi & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ \pi_t \\ i_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sigma} r_t^n \\ 0 \\ v_t \end{pmatrix}.$$

В представленном выше уравнении, матрицей перехода состояний является матрица при наблюдаемых значениях. Свободные члены — внешние факторы.

Для объективной оценки эффективности фильтрации исходных данных при помощи фильтра Калмана будет сравниваться с методом скользящего среднего и фильтром Ходрика-Прескотта. [4]

В качестве метрик оценки эффективности используются несколько показателей. Основной критерий, применяемый в исследовании для оценки качества фильтрации — коэффициент корреляции Пирсона. Также для оценки качества фильтрации используются две метрики ошибки: среднеквадратичная и средняя абсолютная. [5]

Следующий этап исследования динамической стохастической модели общего равновесия фильтра Калмана после фильтрации исходных зашумленных данных — прогнозирование развития системы при помощи фильтра. В данном случае при работе фильтра фактически отсутствует шаг коррекции, так как обновленных данных о состоянии системы не передается. Фильтр будет обновляться только на основе последнего известного значения.

Алгоритм прогнозирования данных в исследовании состоит из следующих пунктов:

1. При помощи системы уравнений, описывающих систему, смоделировать поведение ДСМОР на 100 шагов.
2. Отфильтровать данные ДСМОР при помощи фильтра Калмана.
3. Ограничить последнее состояние системы, допустимое фильтру Калмана.
4. Спрогнозировать при помощи фильтра Калмана состояние трех измеряемых параметров системы на дистанции 1-10 шагов в зависимости от итерации.
5. Оценить эффективность прогнозирования состояния системы при помощи фильтра Калмана в условиях отсутствия поступления новых данных.

Также стоит отметить, что все вычисления в рамках работы производятся с использованием языка программирования Python. [6]

Литературный обзор

В отечественной сфере исследования динамических стохастических моделей общего равновесия выделяют два автора, внесшие наибольший вклад в эту научную область: Шульц Д.Н. и Полбин А.В.

В своей работе «Развитие динамической стохастической модели общего равновесия для условий открытой экономики» Д.Н. Шульц и В.И. Балута исследуют ДСМОР, описывающие «функционирование и взаимодействие ключевых секторов экономики: домашние хозяйства, реальный сектор, внешний мир и центральный банк, проводящий политику инфляционного таргетирования». [7]

В то же время, А.В. Полбин в своем научном труде «Построение и калибровка DSGE-моделей для российской экономики с использованием импульсных откликов векторной авторегрессии» использует динамические стохастические модели общего равновесия для применения их к российской экономической специфике. [8]

Про широкое применение фильтра Калмана в современной научной и практической действительности указано в книге «Моделирование электропривода» Фурсова В.Б.: «Фильтр Калмана относится к так называемым адаптивным фильтрам. Появились они в конце 1950-х годов, превратившись из экзотической технологии преимущественно для военных целей в «ширпотреб», без которого сейчас была бы немыслима работа модемов, сотовых телефонов и многого другого». [9] Данная книга является показательной тем, что отражает общие тенденции в применении фильтра Калмана — на данный момент в подавляющем большинстве случаев он используется в целях работы с физическими системами, не связанными с человеческим фактором. В данной статье представлен анализ работы фильтра с экономической моделью.

Результаты

На Рис. 1 представлена симуляция отклонения значения номинальной ключевой ставки от долгосрочного равновесного состояния (пунктирная линия), наблюдений, подвергнутых искажениям (светло-серая линия) и отфильтрованных при помощи фильтра Калмана значений (черная линия).

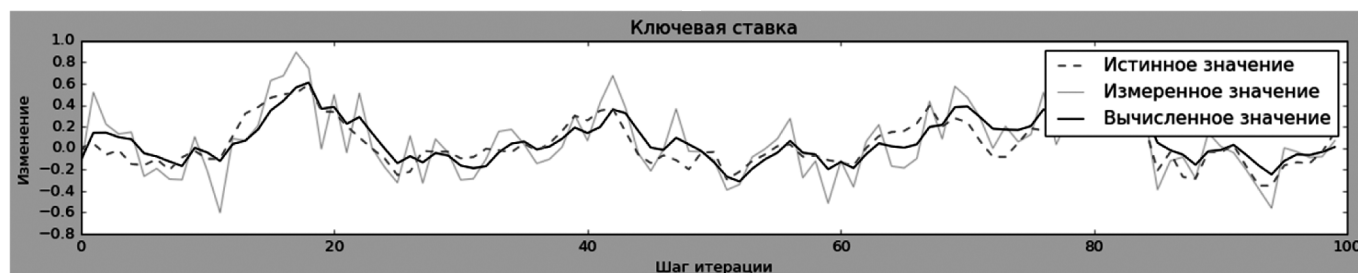


Рис. 1. Данные модели по инфляции

Далее для оценки применения фильтра Калмана сравним эффективность фильтрации рассмотренных выше методов. Сравняться и оцениваться эффективность будет по каждому из трех наблюдаемых параметров модели.

Результаты сведены в таблицы для каждого из наблюдаемых значений. В Таблице 1 представлены метрики для различных методов фильтрации для показателя отклонения логарифма национального дохода.

Таблица 1. Результаты фильтрации данных ДСМОР

Данные	Исходные данные	Скользящее среднее	Фильтр Ходрика–Прескотта	Фильтр Калмана
Среднее значение	-0.069127	-0.067660	-0.077925	-0.063256
Медиана	-0.061234	-0.073277	-0.068560	-0.063417
Среднеквадратичное отклонение	0.446475	0.358022	0.176179	0.413091
Коэффициент Пирсона	—	0.638	0.607	0.893
Среднеквадратичная ошибка	—	0.35	0.365	0.2
Средняя абсолютная ошибка	—	0.3	0.314	0.16

В Таблице 2 отражены метрики для инфляции.

Таблица 2. Результаты фильтрации данных ДСМОР

Данные	Исходные данные	Скользящее среднее	Фильтр Ходрика–Прескотта	Фильтр Калмана
Среднее значение	-0.032653	-0.046554	-0.041050	-0.020409
Медиана	-0.031410	-0.017944	-0.057632	0.035433
Среднеквадратичное отклонение	0.065835	0.121757	0.085561	0.169360
Коэффициент Пирсона	—	0.644	0.840	0.736
Среднеквадратичная ошибка	—	0.094	0.047	0.128
Средняя абсолютная ошибка	—	0.077	0.040	0.107

В Таблице 3 отражены данные для номинальной ключевой ставки

Таблица 3. Результаты фильтрации данных ДСМОР

Данные	Исходные данные	Скользящее среднее	Фильтр Ходрика–Прескотта	Фильтр Калмана
Среднее значение	-0.005639	0.020479	0.017507	-0.020699
Медиана	0.026132	0.048249	-0.012819	-0.004868
Среднеквадратичное отклонение	0.247840	0.191684	0.084628	0.229799
Коэффициент Пирсона	–	0.516	0.422	0.818
Среднеквадратичная ошибка	–	0.224	0.225	0.178
Средняя абсолютная ошибка	–	0.188	0.189	0.149

Как видно из таблиц, для двух из трех наблюдаемых макроэкономических показателей фильтра Калмана показал наибольшее сходство с исходными данными.

На Рис. 2 представлен прогноз будущего состояния системы при помощи фильтра Калмана для значения инфляции. Из рисунка видно, что фильтр экстраполирует закономерность, выявленную на последнем шаге с доступными данными. Такая работа фильтра обоснована отсутствием данных об обновленном состоянии системы, которые были бы использованы на шаге коррекции.



Рис. 2. Прогнозирование инфляции

Для применимости такого подхода также важно, чтобы в момент прекращения наблюдений в системе не происходило резких колебаний, так как в таком случае фильтр будет экстраполировать аномальную динамику, что не позволит адекватно оценить будущее состояние системы [10]. Неудачный результат прогнозирования состояния системы представлен на Рисунке 3.

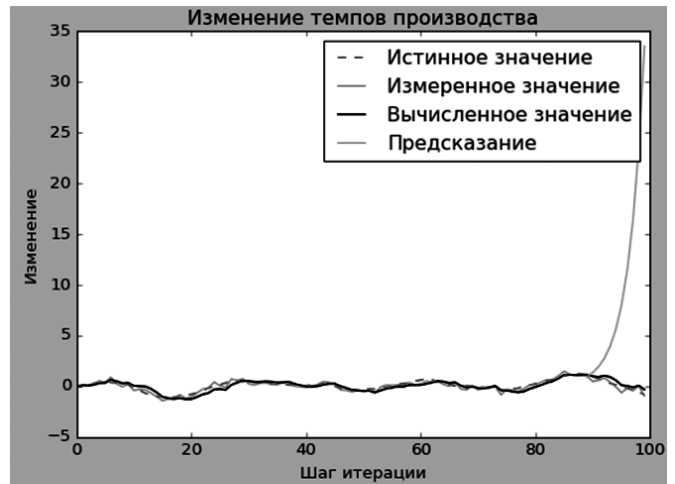


Рис. 3. Прогнозирование изменения темпов производства

Также необходимо отметить, что прогнозирование состояния ДСМОР на несколько шагов вперед при помощи фильтра Калмана возможно лишь на небольшом временном промежутке. Как видно из Рис. 2 и 3., прогноз состояния системы все дальше отходит от равновесного состояния, в то время как реальная система колеблется вокруг своего устойчивого состояния. Такая ситуация приводит к экспоненциальному росту ошибки и снижению коэффициента Пирсона для данных системы и прогнозных значений.

Обсуждение

Исследование выявило высокую эффективность использования фильтра Калмана при работе с динамическими стохастическими моделями общего равновесия. В двух из трех случаев фильтр показал лучший коэффициент корреляции Пирсона, чем два других метода фильтрации — скользящее среднее и фильтр Ходрика-Прескотта.

При этом прогнозировать будущее состояние динамической стохастической модели общего равновесия также возможно, но только при соблюдении описанных в тексте статьи ограничений: прогноз должен осуществляться на малое количество шагов, также наблюдения не должны прерываться в момент сильных колебаний или шоков.

Заключение

Таким образом, использование фильтра Калмана при работе с динамическими стохастическими моделями общего равновесия с учетом ограничений, выявленных в ходе работы, позволяет улучшить выделение сути поведения таких моделей, отбрасывая возникающие шумы наблюдений и случайные колебания, а также прогнозировать их состояние на небольшое шагов вперед без накопления критической ошибки прогнозирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полбин А.С. Построение и калибровка DSGE-модели для российской экономики с использованием импульсных откликов векторной авторегрессии: сборник научных трудов / А.С. Полбин. — Москва: Институт Гайдара, 2023. — 56 с.
2. Бенасси Ж.-П. Макроэкономическая теория / Ж.-П. Бенасси — Москва: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2022. — 592 с.
3. Гушель В.О., Шварц А.М., Тебинов Н.С. Роль фильтра Калмана в разработке программного обеспечения для предиктивного анализа в финансовых технологиях // Инвестиции и Инновации. 2023. №11.
4. Полухин П.В. Оптимизация вычислительных процедур стохастических алгоритмов фильтрации и сглаживания, построенных на основе фильтра Калмана / П.В. Полухин, Ю.В. Смирнов // Вестник Российского нового университета. Серия Сложные системы модели, анализ и управление. 2022. № 1. С. 3–14.
5. Иванов Б.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для вузов / Б.Н. Иванов. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2024. — 224 с.
6. Маккинни У. Python и анализ данных. Первичная обработка данных с применением pandas, NumPy и Jupiter: справочник / У. Маккинни; перевод с английского А.А. Слинкина. — 3-е изд. — Москва: ДМК Пресс, 2023. — 536 с.
7. Шульц Д.Н., Балута В.И. Развитие динамической стохастической модели общего равновесия для условий открытой экономики // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. № 44. 27 с.
8. Построение и калибровка DSGE-модели для российской экономики с использованием импульсных откликов векторной авторегрессии / Полбин А., Синельников-Мурылев С. — М.: Издательство Ин-та Гайдара, 2023. — 56 с.: ил. — (Научные труды / Ин-т эконом. политики им. Е.Т. Гайдара; № 182Р).
9. Фурсов В.Б. Моделирование электропривода: учебное пособие / В.Б. Фурсов. — 2-е изд., испр. и доп. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — ISBN 978-5-8114-3566-1. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/206741> (дата обращения: 01.07.2024). — Режим доступа: для авториз. пользователей. — С. 132.
10. Коломеец А.О. Сравнительный анализ временных параметров обработки сигналов тензометрического контроля линейной сверткой и фильтром Калмана / А.О. Коломеец, В.С. Выплавень // Вестник Российского нового университета. Серия Сложные системы модели, анализ и управление. — 2020. — № 1. — С. 174–182.

© Митина Ольга Алексеевна (alogmi@yandex.ru); Гушель Василий Олегович (vgstudy@yandex.ru)
Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»