

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ «ГАЗ-ВАКУУМ» ВОСХОДЯЩЕГО ЗАКРУЧЕННОГО ПОТОКА С УЧЕТОМ ОДНОСТОРОННЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ВНЕШНЕЙ СИЛЫ

**MATHEMATICAL MODELING
OF THE "GAS-VACUUM" BOUNDARY
MOTION OF THE UPWARD SWIRLING
FLOW TAKING INTO ACCOUNT
THE UNILATERAL INFLUENCE
OF THE HORIZONTAL EXTERNAL FORCE**

**A. Mezentsev
S. Yagupov**

Summary. The paper considers three-dimensional flows of an ideal polytropic gas adjacent to a vacuum under the action of gravitational forces, Coriolis and horizontal external force. The flow of gas under the action of wind load in the vertical part of the upward swirling flow of the tornado type with low pressure in the central part is simulated [1–3]. The law of motion of the free surface — the gas-vacuum boundary and the behavior of gas-dynamic parameters on it are investigated. The system of equations of gas dynamics is used as a mathematical model [4–5]. The law of motion of the gas-vacuum boundary is determined in parametric form from the solution of systems of ordinary differential equations.

Keywords: Ideal polytropic gas, Coriolis force, system of equations of gas dynamics, the boundary "gas-vacuum".

Мезенцев Алексей Владимирович

К.ф.-м.н., Уральский государственный университет
путей сообщения
amezentsev@usurt.ru

Ягунов Станислав Александрович

К.ф.-м.н., Уральский государственный университет
путей сообщения
Sya_s@mail.ru

Аннотация. В работе рассматриваются трехмерные течения идеального политропного газа, примыкающие к вакууму в условиях действия сил тяготения, Кориолиса и горизонтальной внешней силы. Моделируется течение газа под действием ветровой нагрузки в вертикальной части восходящего закрученного потока типа торнадо с пониженным давлением в центральной части [1–3]. Исследуется закон движения свободной поверхности — границы «газ-вакуум» и поведение газодинамических параметров на ней. В качестве математической модели используется система уравнений газовой динамики [4–5]. Закон движения границы «газ-вакуум» определен в параметрической форме из решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: Идеальный политропный газ, сила Кориолиса, система уравнений газовой динамики, граница «газ-вакуум».

Введение

Для приближенного моделирования средней вертикальной части восходящих закрученных потоков типа торнадо рассматривается течение с зоной вакуума в окрестности вертикальной оси вихря [1–3].

Предполагается, что в начальный момент времени $t = t_0$ трехмерная поверхность Γ_0 с уравнением $z = \phi(x, y)$, $\mathbf{x} = (x, y, z)$, отделяет идеальный политропный газ от вакуума. Газ находится снаружи, а внутри — вакуум. В момент времени $t = t_0$ известны распределения параметров газа: $\mathbf{V}_0(\mathbf{x}) = \{u_0(\mathbf{x}), v_0(\mathbf{x}), w_0(\mathbf{x})\}$ — вектора скорости газа, $c_0(\mathbf{x})$ — скорости звука газа. Требуется найти закон движения границы Γ_0 : $z = z_0(t, x, y)$.

Задача исследуется при условии, что скорость звука газа c во все моменты времени равна нулю на поверхности Γ_0 . Функции ϕ , \mathbf{V}_0 , c_0 предполагаются аналитическими. Вектор горизонтальной внешней силы $\mathbf{f} = \rho\{-f, 0, 0\}$ во все моменты времени действует на восходящий закрученный поток только с наветренной стороны, ρ — плотность газа.

Математическое моделирование движения границы «газ-вакуум»

Течение газа в восходящем закрученном потоке описывается системой уравнений (1), где

$$f = \begin{cases} f_1, & \text{наветренная сторона,} \\ 0, & \text{подветренная сторона,} \end{cases} \quad f_1 = \text{const} > 0,$$

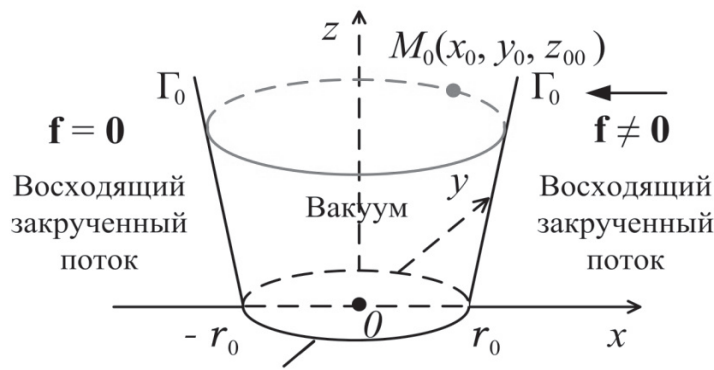


Рис. 1. Свободная поверхность Γ_0 в момент времени $t = t_0$

$$\begin{cases} c_t + c_x u + c_y v + c_z w + \frac{\gamma-1}{2} c(u_x + v_y + w_z) = 0, \\ u_t + u_x u + u_y v + u_z w + \frac{2}{\gamma-1} c c_x = 2\Omega_3 v - 2\Omega_2 w - f, \\ v_t + v_x u + v_y v + v_z w + \frac{2}{\gamma-1} c c_y = -2\Omega_3 u, \\ w_t + w_x u + w_y v + w_z w + \frac{2}{\gamma-1} c c_z = 2\Omega_2 u - g, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} c_t + c_x u + c_y v + (w - z_{0t} - z_{0x} u - z_{0y} v) c_\eta + \frac{\gamma-1}{2} c(u_x + v_y + w_\eta - z_{0x} u_\eta - z_{0y} v_\eta) = 0, \\ u_t + u_x u + u_y v + (w - z_{0t} - z_{0x} u - z_{0y} v) u_\eta + \frac{2}{\gamma-1} c(c_x - z_{0x} c_\eta) = 2\Omega_3 v - 2\Omega_2 w - f, \\ v_t + v_x u + v_y v + (w - z_{0t} - z_{0x} u - z_{0y} v) v_\eta + \frac{2}{\gamma-1} c(c_y - z_{0y} c_\eta) = -2\Omega_3 u, \\ w_t + w_x u + w_y v + (w - z_{0t} - z_{0x} u - z_{0y} v) w_\eta + \frac{2}{\gamma-1} c c_\eta = 2\Omega_2 u - g, \end{cases} \quad (2)$$

$$\mathbf{V}(t_0, x, y, z) = \mathbf{V}_0(x, y, \eta + \phi(x, y)), c(t_0, x, y, z) = c_0(x, y, \eta + \phi(x, y)) \quad (3)$$

$$c(t, x, y, \eta)|_{\eta=0} = 0. \quad (4)$$

$$\begin{cases} z_{0t} + z_{0x} u + z_{0y} v = w, \\ u_t + u_x u + u_y v = 2\Omega_3 v - 2\Omega_2 w - f, \\ v_t + v_x u + v_y v = -2\Omega_3 u, \\ w_t + w_x u + w_y v = 2\Omega_2 u - g, \end{cases} \quad (5)$$

$\Omega_2 = \Omega \cos \psi, \Omega_3 = \Omega \sin \psi$ — координаты вектора угловой скорости вращения Земли $\Omega = \{0; \Omega_2; \Omega_3\}$, $\Omega = |\Omega|$, ψ — заданная широта, g — ускорение свободного падения.

В системе (1) вводится новая переменная $\eta = z - z_0(t, x, y)$. При таком введении независимой переменной поверхность Γ_0 берется за новую координатную плоскость $\eta = 0$.

Система (1) в новых независимых переменных будет иметь вид (2) с начальными условиями (3) и условием равенства нулю скорости звука газа на поверхности Γ_0 (4).

Для решения начально-краевой задачи (2)-(4) в системе (2) положим $\eta = 0$.

Учитывая условие (4), система (2) переписывается в виде системы квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных

Полученная система (5) с помощью характеристического параметра $\tau = t - t_0$ сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (6).

Начальные условия для системы (6) задаются в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, в начальный момент времени лежащей на поверхности Γ_0 (7).

Интегрирование системы (6) приводит к следующим соотношениям для координат (8) и для компонент вектора скорости (9).

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\tau} = 1, & \frac{dx}{d\tau} = u, & \frac{dy}{d\tau} = v, & \frac{dz_0}{d\tau} = w, \\ \frac{du}{d\tau} = 2\Omega_3 v - 2\Omega_2 w - f, \\ \frac{dv}{d\tau} = -2\Omega_3 u, \\ \frac{dw}{d\tau} = 2\Omega_2 u - g. \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} x|_{t=t_0} &= x_0, & y|_{t=t_0} &= y_0, & z|_{t=t_0} &= z_0 = \phi(x_0, y_0), \\ u|_{t=t_0} &= u_0, & v|_{t=t_0} &= v_0, & w|_{t=t_0} &= w_0. \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{C_1}{2\Omega} \sin[2\Omega(t - t_0)] - \frac{C_2}{2\Omega} \cos[2\Omega(t - t_0)] + \frac{1}{2\Omega} \cos \psi g(t - t_0) + C_5, \\ y &= \frac{C_1}{2\Omega} \sin \psi \cos[2\Omega(t - t_0)] + \frac{C_2}{2\Omega} \sin \psi \sin[2\Omega(t - t_0)] - \frac{\sin 2\psi}{4} g(t - t_0)^2 + \\ &+ C_3(t - t_0) + C_6, \\ z_0 &= -\frac{C_1}{2\Omega} \cos \psi \cos[2\Omega(t - t_0)] - \frac{C_2}{2\Omega} \cos \psi \sin[2\Omega(t - t_0)] - \frac{\sin^2 \psi}{2} g(t - t_0)^2 + \\ &+ C_4(t - t_0) + C_7, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} u &= C_1 \cos[2\Omega(t - t_0)] + C_2 \sin[2\Omega(t - t_0)] + \frac{1}{2\Omega} \cos \psi g, \\ v &= -C_1 \sin \psi \sin[2\Omega(t - t_0)] + C_2 \sin \psi \cos[2\Omega(t - t_0)] - \frac{\sin 2\psi}{2} g(t - t_0) + C_3, \\ w &= C_1 \cos \psi \sin[2\Omega(t - t_0)] - C_2 \cos \psi \cos[2\Omega(t - t_0)] - g \sin^2 \psi (t - t_0) + C_4. \end{aligned} \tag{9}$$

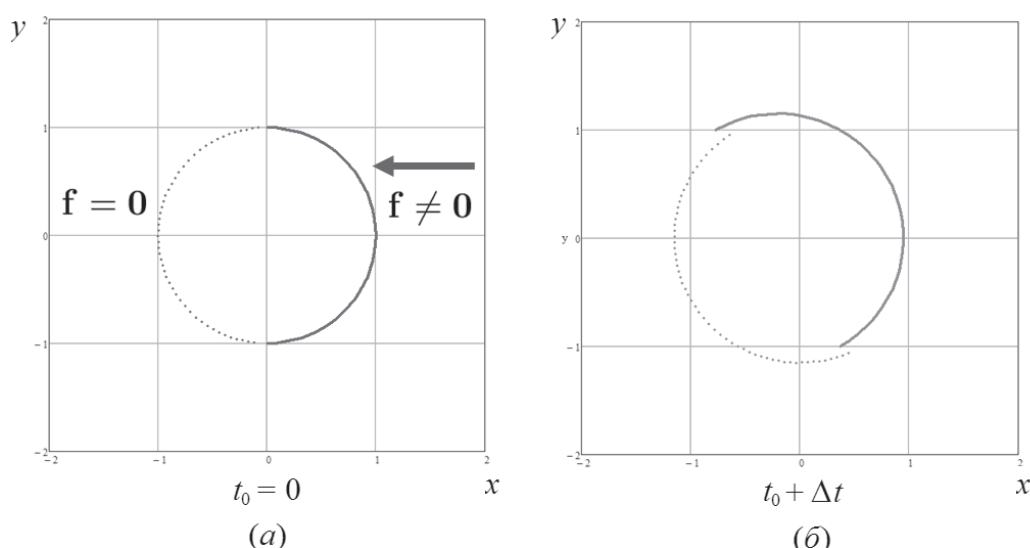


Рис. 2. Проекция в плоскость xOy точек траекторий в начальный момент времени лежащих на окружности радиуса r_0 на высоте $z = 0$; (а) — в начальный момент времени $t_0 = 0$; (б) — в момент времени $t_0 + \Delta t$

Константы интегрирования определяются из следующих рекуррентных соотношений:

$$C_1 = u_0 - \frac{1}{2\Omega} \cos \psi g, \quad C_2 = v_0 \sin \psi - w_0 \cos \psi - \frac{f}{2\Omega},$$

$$C_3 = v_0 - C_2 \sin \psi,$$

$$C_4 = w_0 + C_2 \cos \psi, \quad C_5 = x_0 + \frac{C_2}{2\Omega},$$

$$C_6 = y_0 - \frac{C_1}{2\Omega} \sin \psi, \quad C_7 = z_0 + \frac{C_1}{2\Omega} \cos \psi.$$

Расчеты по полученным формулам проводятся в безразмерных величинах, где в качестве масштаба скорости берется 1000/3 м/с. Для проверки достоверности модели в качестве масштаба расстояния берутся значения, равные радиусу торнадо или циклона из шкалы Фудзиты: 2.5, 8, 25.5, 80.5, 273.5, 804.5, 1000 метров.

В качестве начальных данных для системы (6) берутся координаты и скорости точек в начальный момент времени, лежащих на окружности радиуса r_0 и высоте $z = 0$. При этом значения тангенциальных скоростей точек берутся равными скорости ветра для соответствующего радиуса r_0 из шкалы Фудзиты, а значения вертикальных компонент скоростей точек равными 10 м/с.

Для того чтобы учесть разрыв функции f для точек траекторий, лежащих с разной стороны от ветра, предложен приближенный метод расчета, состоящий в следующем. В момент времени $t = t_0$ точки на поверхности делятся на наветренную и подветренную части (рис. 2а).

Для точек наветренной части в расчетах координат и скоростей по формулам (8), (9) на отрезке $[t_0, t_0 + \Delta t]$ значение f берется равным f_1 , для точек подветренной стороны — 0. В момент времени $t = t_0 + \Delta t$ для тех точек, которые вышли в наветренную сторону, значение f берется равным f_1 , а для тех точек, которые зашли в подветренную сторону — 0 (рис. 2б). При таких значениях f расчеты траекторий точек и их газодинамических параметров проводятся на следующем отрезке времени $[t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t]$ и т.д.

Координаты центра торнадо или циклона определяются как среднее арифметическое координат проекций точек траекторий в плоскость xOy . Результаты расчетов проекций в плоскость xOy точек траекторий с масштабом расстояния равным 2.5 метров с различным шагом Δt представлены на рисунках 3, 4.

Предполагается, что в начальный момент времени точки находились на окружности радиуса 2.5 метра на высоте $z = 0$. Безразмерное значение константы f_1 , учитывающей силу горизонтальной ветровой нагрузки, берется равной $f_1 = 0.00405$. Скорость ветра воздействующего на восходящий закрученный поток — $V = 30$ м/с. Тангенциальное значение начальной скорости точек бралось равным 19 м/с. Вертикальное значение начальной скорости — 10 м/с. Начальное положение точек в момент времени $t = t_0$ соответствует малой окружности, положение проекций точек в плоскость xOy в момент времени $t = 0.51$ с (безразмерное значение времени равно $t = 68$) соответствует большой окружности. Условный радиус большой окружности 10.006 метров (безразмерное значение величины радиуса 4.002).

Классы торнадо	F0	F1	F2	F3	F4	F5
Радиус r_0 , (м)	2.5	8	25.5	80.5	273.5	804.5
Скорость ветра, (м/с)	19	33	51	71	93	117
Координаты центра $x(t_I), y(t_I)$, (м) ($t_I = 0.51$ с)	-11.71 $1.4 \cdot 10^{-4}$	-3.71 $5 \cdot 10^{-5}$	-1.17 $1.5 \cdot 10^{-5}$	-0.37 $4 \cdot 10^{-6}$	-0.18 $2.9 \cdot 10^{-6}$	-0.036 $1 \cdot 10^{-6}$
Средние скорости центра по осям Ox, Oy (км/ч) ($t_I = 0.51$ с)	-82.74 $1 \cdot 10^{-3}$	-26.34 $3.4 \cdot 10^{-4}$	-8.27 $1 \cdot 10^{-4}$	-2.61 $2.5 \cdot 10^{-5}$	-1.28 $2 \cdot 10^{-5}$	-0.26 $3.8 \cdot 10^{-6}$

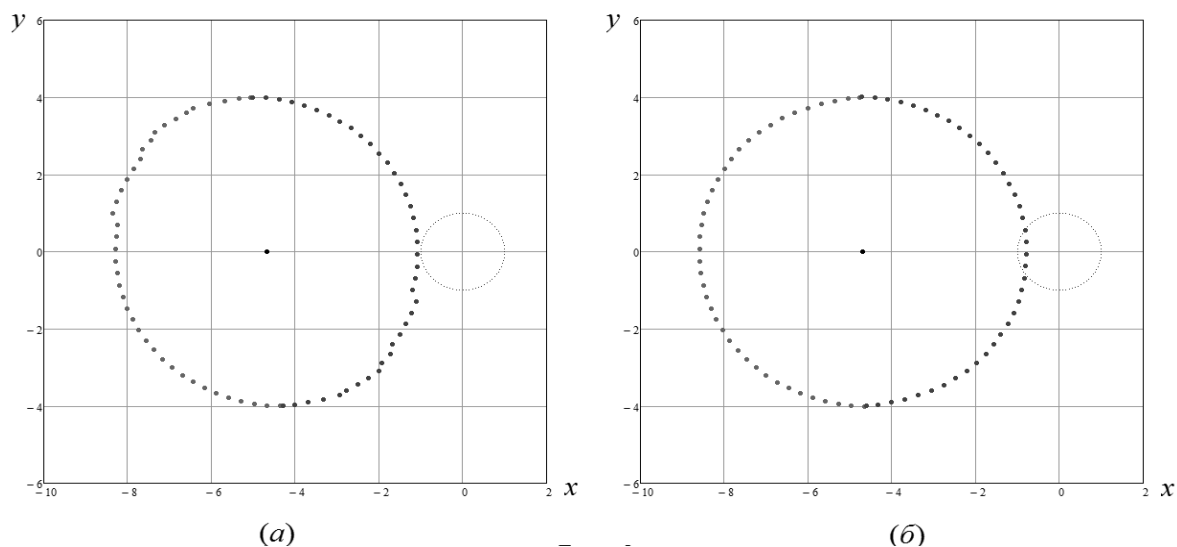


Рис. 3. Проекция в плоскость xOy точек траекторий в моменты времени.
 $t_0 = 0$ — малая окружность и $t = 68$ — большая окружность;
 (а) — при шаге $\Delta t = 0.68$, (б) — при шаге $\Delta t = 0.068$

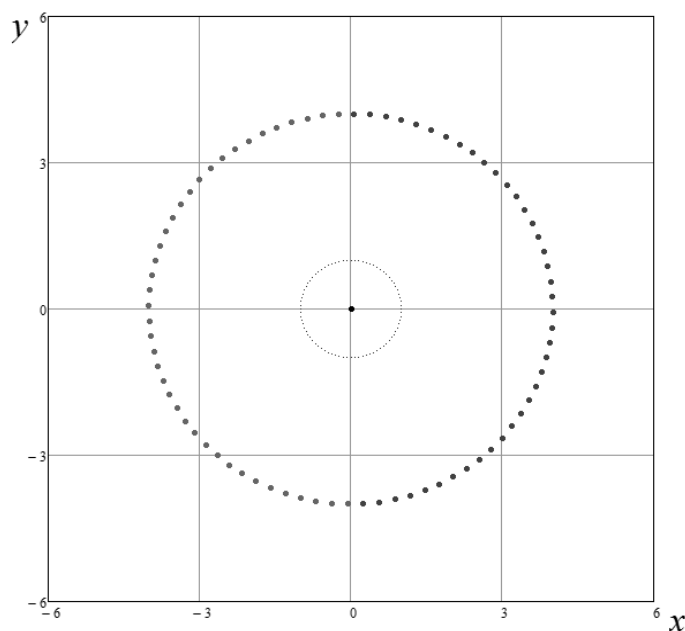


Рис. 4. Проекция в плоскость xOy точек траекторий в моменты времени.
 $t_0 = 0$ — малая окружность и $t = 68$ — большая окружность при отсутствии ветровой нагрузки $f_i = 0$

Для оценки одностороннего воздействия горизонтальной внешней силы на границу восходящего закрученного потока на рисунке 4 приведены проекции точек траектории в плоскость xOy в отсутствие горизонтальной внешней силы $f_i = 0$, а только с учетом воздействия силы тяжести и Кориолиса. Движение центра незначительное: за время $t = 0.51$ с. центр торнадо смещается на запад на $5.25 \cdot 10^{-4}$ метра и на север на $9.31 \cdot 10^{-7}$ метра.

Заключение

Для различных типов торнадо и циклонов из шкалы Фудзиты в виде проекций точек траекторий в плоскость

xOy построено движения свободной поверхности Γ_0 в условиях действия силы тяжести, Кориолиса и горизонтальной внешней силы. В каждый момент времени определено положение центра восходящего закрученного потока (торнадо, циклона). Полученные значения координат позволяют рассчитать среднюю скорость движения центра восходящего закрученного потока. Так для торнадо типа F0 из шкалы Фудзиты средняя скорость движения центра по оси Ox равна 82 км/ч, для торнадо типа F1–26 км/ч. Движение центра вдоль оси Oy для всех типов торнадо оказалось незначительным. Результаты расчетов приведены в таблице. При нулевом значении горизонтальной внешней силы $f_i = 0$ движения центра оказалось незначительным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин С. П. Торнадо и сила Кориолиса. — Новосибирск: Наука, 2008. — 92 с.
2. Баутин С. П., Обухов А. Г. Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей. — Новосибирск: Наука, 2012. — 152 с.
3. Баутин С. П., Дерябин С. Л., Крутова И. Ю., Обухов А. Г. Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг своей оси. — Екатеринбург: УрГУПС, 2017. — 335 с.
4. Дерябин С. Л., Мезенцев А. В. Численно-аналитическое моделирование газовых течений, примыкающих к вакууму в условиях действия сил тяготения и Кориолиса // Вычислительные технологии. 2010. — № 5. — С. 51–71.
5. Баутин С. П., Дерябин С. Л., Мезенцев А. В., Чуев Н. П. Начально-краевые задачи для моделирования движения сплошной среды с особенностями на свободной границе. — Новосибирск: Наука; Екатеринбург: УрГУПС, 2015. — 191 с.

© Мезенцев Алексей Владимирович (amezentsev@usurt.ru), Ягулов Станислав Александрович (Sya_s@mail.ru).

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»



Уральский государственный университет путей сообщения