DOI 10.37882/2223-2982.2026.02.41

О НЕКОТОРЫХ НЕОДНОЗНАЧНЫХ ФРАГМЕНТАХ СОДЕРЖАНИЯ ОБУЧЕНИЯ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЕ, КОМПЛЕКСНЫМ ЧИСЛАМ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ВУЗАХ

Фокин Роман Романович
доктор педагогических наук, доцент, Федеральное Государственное Бюджетное Военное Образовательное Учреждение Высшего Образования «Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского», (г. Санкт-Петербург)
vka@mil.ru

Павленко Юлия Владимировна
Преподаватель, Федеральное Государственное Бюджетное Военное Образовательное Учреждение Высшего Образования «Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского», (г. Санкт-Петербург)
vka@mil.ru

ABOUT SOME AMBIGUOUS FRAGMENTS OF THE CONTENT OF TEACHING VECTOR ALGEBRA, COMPLEX NUMBERS AND ANALYTICAL GEOMETRY IN UNIVERSITIES

R. Fokin
Yu. Pavlenko

Summary: The article examines fragments of the content of teaching some sections of mathematics in universities with a view to their subsequent modification to improve their understanding by students. Ambiguous means fragments that can be improved in the above sense. Firstly, the authors present a simple example (the definition of a geometric vector taken from textbooks) of educational mathematical material that cannot be understood by a student in a logical-conceptual sense, but can only be understood in an associative-intuitive-visual sense. The reasons for this typical phenomenon are discussed further. Secondly, the article presents the ambiguous fragments of the vector algebra teaching content identified by the authors and their proposed changes. In addition to the above definition, these are also definitions of the equality of geometric vectors and the angle between vectors. Thirdly, a similar ambiguous fragment of complex numbers is presented. This is an algorithm for converting a number from an algebraic form to a trigonometric one. Fourth, a fragment from analytical geometry. This is the recalculation of the coordinates of a point from one coordinate system (Cartesian) to another (affine).

Keywords: content of education, universities, mathematics, vector, complex number, geometry, students, reasons for misunderstanding.

Аннотация: Статья рассматривает фрагменты содержания обучения некоторым разделам математики в вузах с целью их последующего изменения для улучшения их понимания студентами. Под неоднозначными понимаются фрагменты, которые могут быть улучшены в указанном выше смысле. Во-первых, авторами представлен простой пример (определение геометрического вектора, взятое из учебников) учебного математического материала, который не может быть понятным студенту в логико-понятийном смысле, а может быть понятным только в ассоциативно-интуитивно-зрительном смысле. Далее обсуждаются причины этого типичного явления. Во-вторых, в статье представлены выявленные авторами неоднозначные фрагменты содержания обучения векторной алгебре и предлагаемые их изменения. Кроме указанного выше определения это также определения равенства геометрических векторов и угла между векторами. В-третьих, представлен аналогичный неоднозначный фрагмент из комплексных чисел. Это алгоритм перевода числа из алгебраической формы в тригонометрическую. В-четвертых – фрагмент из аналитической геометрии. Это пересчет координат точки из одной системы координат (Декартовой) в другую (аффинную).

Ключевые слова: содержание обучения, вузы, математика, вектор, комплексное число, геометрия, студенты, причины непонимания.

Введение в проблематику исследования

Актуальность статьи объясняется малоудовлетворительными результатами (особенно в последние десятилетия) обучения вузовской математике вообще и в частности – векторной алгебре, комплексным числам и аналитической геометрии.

Цель исследования: Выявить некоторые причины явления, упомянутого в актуальности и предложить некоторые пути решения соответствующих проблем. Естественно, предполагается частичное, а не полное их решение.

Ставятся задачи: 1) представить простой пример и обсуждение некоторых источников непонимания при изучении вузовской математики; 2) представить выявленные неоднозначные фрагменты содержания обучения векторной алгебре и предлагаемые их изменения; 3) представить выявленный неоднозначный фрагмент содержания обучения комплексным числам и предлагаемые его изменения; 4) представить выявленный неоднозначный фрагмент содержания обучения аналитической геометрии и предлагаемые его изменения.

1. Простой пример и обсуждение некоторых источников непонимания при изучении вузовской математики

В вузах обычно на 1 курсе для различных профессиональных направлений изучается: «Векторная алгебра» (ВА) - это изредка отдельный учебный курс, но чаще – это одна из начальных тем курсов «Аналитическая геометрия» (АГ) и «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» (АГЛА). Почти во всех соответствующих учебниках [1][2][3], например, имеется такое по смыслу определение: Геометрический вектор – это направленный отрезок прямой. А что такое прямая в смысле геометрии Декарта (ГД – синоним АГ) – это выясняется в этих учебниках значительно позже. При таком изложении понять это определение в строгом логико-понятийном (математическом) смысле невозможно. Таких примеров в рассматриваемых учебниках много. Сложилось понятие: «учить математику», но математика – это не стихи. Математику следует понимать! Но если понять-то невозможно, то приходится учить. Данный пример описывает типичное явление. Далее мы попробуем разобраться в его сути.

Студент 1 курса обычно помнит, что в средней школе он изучал геометрию Евклида (ГЭ). Там были «прямая», «точка», «пересечение» и другие основные неопределяемые понятия. Также там были аксиомы и постулаты, современные историки математики не дают однозначного ответа – в чем разница между ними. Пример аксиомы: 2 прямые могут пересекаться только в 1 точке. АГ – это совсем другая математическая теория. АГ может частично иллюстрироваться теми же картинками, что и ГЭ, но изоморфизма ГЭ и АГ нет. Изоморфизм математических структур означает, что эти математические структуры – то же самое, по сути, они отличаются лишь обозначениями. В АГ, например, есть понятие гиперболы, а в ГЭ его нет. Также в ГЭ прямая – это не есть множество точек, это основное неопределяемое понятие, как и точка. «Начала» Евклида [4][5] в аксиомах и постулатах нигде не содержат информации, что прямая – это множество точек. Так что в рассматриваемом определении отрезок-то из чего состоит? Не понятно! Да еще и отрезок этот направленный! А что это значит?

$$A \longrightarrow B$$

Рис. 1. Геометрический вектор **AB**

Вся надежда на картинку (рис. 1), что преподаватель обычно при этом рисует на доске. Но картинка не может быть точным математическим определением нового понятия, вводимым в ходе изучения новой математической теории – АГ! Здесь у студента может быть только ассоциативно-интуитивно-зрительный уровень понимания.

Один из авторов настоящей статьи выявлял некоторые закономерности в ошибках студентов [6] при изучении ими математики и информатики и пришел к теории, которую он назвал псевдо-логикой. Эта авторская теория изучает реальные рассуждения, научно никак не обоснованные (псевдо-логические), но широко распространенные в среде студентов, а затем – и в среде профессионалов. Также изучаются источники такой псевдо-логики. Главный ее источник состоит в том, что при реальном положении дел студенту без псевдо-логики в вузе не выжить. Псевдо-логические рассуждения могут приводить как к истинным выводам (чаще всего!), так и к ошибочным. Они похожи на правдоподобные рассуждения [7] в смысле Д. Пойа.

Как же многоопытные авторы учебников и их рецензенты допускают рассматриваемое сейчас явление? Видимо, потому что они сами-то знают, что такое прямая в смысле АГ (если говорить об определении геометрического вектора), а глазами студента (впервые встречающегося с понятием геометрического вектора) не способны посмотреть на данное явление. Новых понятий для студента надо ввести очень много и (к сожалению!) очень быстро, вот они реально и не замечают, что для некоторого понятия делают логически недопустимую ссылку вперед. Кроме того, имеет место массовое копирование содержания одних учебников авторами других учебников. Возможно, это даже и не посимвольное копирование, а именно копирование содержания. Да и как иначе сформулировать, например, основную теорему алгебры? И зачем это делать? Речь идет об объективных особенностях разработки именно общенаучных учебников.

Однако, эти учебники десятилетиями читают не только миллионы студентов, но и тысячи преподавателей. Неужели никто ничего не замечает? Во-первых, виноваты сложившиеся социальные установки. Студент чаще всего «уверен», что это он чего-то не понимает, а не в учебнике ошибка. Преподаватель чаще всего «уверен» в низком интеллектуальном уровне студента, чтобы «вникать» в смысл того, что студент говорит. За десятки лет преподавания одному из авторов статьи всего 1 раз попался студент, который почти на каждой лекции по АГЛА высказывал свои нетривиальные (и реальные!) критические замечания. Такие студенты превращают лекцию в интересную научную дискуссию и поднимают научный уровень самого лектора. Но читать такую лекцию способны не все. В последние десятилетия прослеживаются устойчивые тенденции к увеличению удельного количества студентов на 1 преподавателя, к увеличению удельного количества учебных часов на 1 ставку преподавателя. А опытные преподаватели часто работают на 1,5 ставки и более. В результате среднестатистическому преподавателю некогда «вникать» во что-либо нетривиальное, он ведет занятия «по накатанной дороге». Учебники перманентно переиздаются. Много можно указать научных статей [6][8][9], где вскрыты логико-понятийные ошибки в учебниках. Но эти ошибки в учебниках обычно не исправляются. Во-вторых, здесь играют роль индивидуальные психологические факторы, многие из которых до конца научно не исследованы. Укажем ниже три из них:

А) Многолетнее тестирование сотен студентов показало [10], что в последние 3-4 десятилетия если брать значения по годам, то среди студентов сильно возрастает доля правополушарных, слабее возрастает доля гармоничных, снижается доля левополушарных. В настоящее время даже среди студентов физико-математических, естественно-научных, технических профессиональных направлений доля правополушарных превосходит 2/3, а в 1960 годы эта доля была менее 1/3. При этом адекватных изменений в методике преподавания математики (увы!) не произошло.

B) Преподаватели происходят из вчерашних студентов. Псевдо-логика, обычно приобретается в студенческие годы и передается далее в профессиональную деятельность, образуя «профессиональные мифы». Например, мифы о том, что компиляторы С++ более эффективны по сравнению с компиляторами Basic. Если посмотреть соответствующие тесты, то выяснится, что чаще всего – наоборот. А профессиональные математические статистики часто не понимают взаимоотношения трех понятий – уровень значимости, ошибки 1 и 2 рода. Они «умеют» практически применять различные критерии проверки гипотез, а из каких теорем эти критерии проистекают – им это не интересно.

C) Значимо при обучении влияние внутреннего мира одного человека (обычно преподавателя в данном случае) прямо или опосредовано (через идеи, лозунги, рекламу, книги, стихи, музыку, ...) на внутренний мир другого человека (обычно на студента в данном случае). Отсюда как частные случаи могут проистекать явления нейро-лингвистического программирования (НЛП), передачи мыслей и эмоций и их восприятия соответственно, гипноза и другие.

Хороший (результативный) педагог – обязательно практический гипнотизер, хотя бы чуть-чуть. И он практически применяет НЛП, обычно не зная, что это такое. Более уверенный способен убедить менее уверенного даже в том, что объективно ложно. То же самое можно сказать и об идеях, лозунгах, рекламе, книгах, стихах, музыке. Если ложная математическая идея десятилетиями представлена в десятках учебников, рассказывается тысячами преподавателей миллионам студентов, то возникновение индивидуальной мысли о ее ложности почти невозможно – даже в тайне от всех.

Что такое внутренний мир? Это универсальное поле для моделирования в самом широком смысле, хранения, передачи, восприятия информации: вербальной (выраженной заранее определенными для нас символами), но в основном - невербальной. Что там ощущает человек? Мысли, образы (зрительные, звуковые, обонятельные, ...), эмоции (мотивации) – такие приблизительно эти сущности. Вот их примеры: 2х2=4; это трамвай; я хочу посмотреть этот фильм – это вербальные или проявленные сущности внутреннего мира. Но большинство его сущностей – невербальные или смутные (они проявлены лишь частично или вовсе не проявлены).

Про конкретную подобную сущность Вам не известно Ваша она или нет. И что это означает, что она именно Ваша? Если Вы можете проследить ее возникновение от ранее замеченных Вами вроде бы Ваших сущностей, то можно и ее считать Вашей, хотя это тоже весьма относительно. Если сущность вряд ли Ваша, то можно проанализировать, откуда она у Вас появилась – это и есть почти сознательное восприятие Вами вроде бы не Ваших сущностей. Если Вы считаете мысль Вашей, то Вы отнесетесь к ней менее критично. Возможно, потому она и была незаметно «подсажена» к Вам извне.

2. Выявленные неоднозначные фрагменты содержания обучения векторной алгебре и предлагаемые их изменения

Еще одно определение из учебников ВА, АГ, АГЛА, которое не может быть понятным студенту 1 курса на логико-понятийном уровне: <u>Геометрические векторы равны, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых, в этом случае их направления должны быть одинаковы, а длины - равны.</u> Что такое параллельные прямые (в смысле АГ) – выясняется значительно позже. Их направления одинаковы – что это такое в смысле математики? Это уже физика вообще-то.

Вся надежда (рис. 2) опять на картинку. В результате опять у студента только такой и может быть уровень понимания этого определения – ассоциативно-интуитивно-зрительный. Из-за указанных выше 2 неоднозначных определений в статье предлагается содержание ВА несколько изменить:

В статье [11] вводится понятие n-мерного арифметического вектора **a**: $\mathbf{a}\in \mathbf{R}^n$, где **R** – множество действительных чисел. Его можно просто называть n-мерным вектором. Особо важны случаи n=2 ($\mathbf{R}^2$ – аналог плоскости) и n=3 ($\mathbf{R}^3$ – аналог 3-мерного пространства).

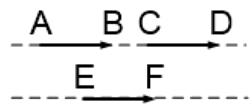

Рис. 2. Равные геометрические векторы: **AB** = **CD** = **EF**

Можно ввести понятия: 0-вектора Θ (все его координаты нулевые); сложения векторов $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, умножения числа λ на вектор **a** ($\lambda\mathbf{a}$) как покоординатные операции; длины вектора $|\mathbf{a}| = (a_1^2 + ... + a_n^2)^{1/2}$. Далее можно ввести понятие разности векторов $\mathbf{a}-\mathbf{b} = \mathbf{a}+(-1)\mathbf{b}$; понятие орта вектора $\mathbf{a}^0 = (1/|\mathbf{a}|)\mathbf{a}$. Можно также ввести понятия: коллинеарных векторов $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$: $\exists\lambda\neq0$: $\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}$; однонаправленных векторов $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$: $\exists\lambda>0$: $\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}$; разнонаправленных векторов $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$: $\exists\lambda<0$: $\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}$.

В статье [11] также вводится понятие геометрического вектора **AB** (где точки **A**, **B**$\in$ $\mathbf{R}^n$) как упорядоченной пары точек (**A**; **B**). Вводится понятие координат $\mathbf{AB}_k = b_k - a_k$ при k = 1, ..., n. Затем – координатного вектора для **AB**, это арифметический вектор $\mathbf{AB}_{co}$ с координатами геометрического вектора **AB**.

В итоге вводится понятие равенства геометрических векторов **AB** = **CD** – это означает равенство их координатных векторов $\mathbf{AB}_{co} = \mathbf{CD}_{co}$. Таким образом, конкретное положение точек **A**, **B**, **C**, **D** становится не важным. Геометрические вектора равны тогда и только тогда, когда равны соответствующие им координатные вектора. Но координатные вектора – арифметические. Потому, начиная отсюда про геометрические вектора можно забыть, оперируя лишь соответствующими арифметическими векторами вследствие их изоморфизма.

Для геометрических векторов **AB** и **CD** можно дать определения того, что такое **AB**+**CD** (это любой геометрический вектор **EF**: $\mathbf{EF}_{co}=\mathbf{AB}_{co}+\mathbf{CD}_{co}$), и того, что такое λ**AB** при $\lambda\in$ **R** (это любой геометрический вектор **EF**: $\mathbf{EF}_{co}=\lambda\mathbf{AB}_{co}$).

При предлагаемом выше изложении учебного материала по ВА классические правила треугольника и параллелограмма (рис. 3) становятся несложными теоремами, которые лучше дать студентам без доказательства.

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \Phi$, $\Phi = \mathbf{a}$^$\mathbf{b}$ – угол между **a** и **b** (1)

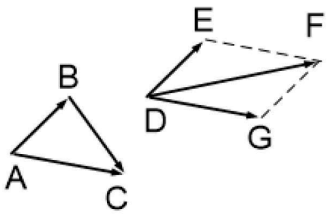

Рис. 3. Правила треугольника (**AB**+**BC**=**AC**) и параллелограмма (**DE**+**DG**=**DF**)

Из средней школы (ГЭ) студенты должны знать определение угла: <u>угол – это фигура, образованная 2 лучами, исходящими из одной точки</u>. У нас остались в рассмотрении фактически лишь арифметические вектора или просто вектора. У такого вектора нет конкретных ни начальной, ни конечной точки. А в некоторых учебниках ВА, АГ, АГЛА угол между векторами определяется как часть плоскости, заключенная между этими векторами. Там же обычно (1) определяет скалярное произведение векторов. Так что последнее тоже зависит от понятия угла между векторами. Здесь тоже получается неоднозначный фрагмент содержания ВА. В статье его предлагается несколько изменить:

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + ... + a_n b_n$ (2)

$\Phi = \arccos (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} / (|\mathbf{a}||\mathbf{b}|))$, где **a**, **b**$\neq$ **Θ**, **a**^**b** = Φ (3)

Пусть для векторов **a**, **b**$\in$ $\mathbf{R}^n$ формула (2) определяет скалярное произведение, а (3) – угол между ними. Получается, что этот угол – это некоторое число Φ, а вовсе не фигура.

Из неравенства Коши-Буняковского $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \leq |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \Rightarrow |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|/(|\mathbf{a}||\mathbf{b}|) \leq 1$, отсюда существование смысла (3). Из свойств arccos $\Rightarrow 0 \leq \Phi \leq \pi$.

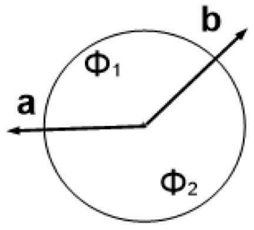

Рис. 4. Углы Φ1 и Φ2 между векторами **a** и **b**

Φ = min (Φ1, Φ2), Φ1+Φ2 = 2π (4)

По поводу (3) допустимы неформальные комментарии по рис. 4: на самом деле между векторами **a** и **b** можно видеть 2 угла – Φ_1 и Φ_2, причем верно (4). Теперь (1) имеет место как простейшая теорема.

3. Выявленный неоднозначный фрагмент содержания обучения комплексным числам и предлагаемые его изменения

Комплексные числа (КЧ) изучаются в вузах обычно на 1 курсе для различных профессиональных направлений как одна из начальных тем курса АГЛА. Хотя формально КЧ не относятся ни к линейной алгебре (ЛА), ни к АГ. В статье [12] более подробно рассматриваются вопросы изучения КЧ. Данный раздел ее немного дополняет. Здесь речь идет о более удобном для понимания и применения алгоритме перевода КЧ из алгебраической формы (z = x + i y) в тригонометрическую (z = |z| (cos φ + i sin φ), представленном на некотором алгоритмическом языке:

Вычислим модуль комплексного числа $|z| = r = (x^2 + y^2)^{1/2}$
Если r = 0, тогда φ - любое число из [0; 2π)
Иначе {
Вычислим ψ = arccos (x/r)
Если y ≥ 0, тогда вычислим φ = ψ
Иначе вычислим φ = 2π - ψ }

Замечания
1. Из графика arccos при ψ∈ [0; π] следует, что если ψ = 0 ⇒ x = r ⇒ y = 0 ⇒ φ = ψ = 0. Отсюда φ∈ [0; 2π) всегда, значит φ=Arg z – это главное значение аргумента.
2. В рамках АГ на плоскости $\mathbf{R}^2$ изучаются согласованные Декартова система координат (x, y) – ДСК и полярная система координат (r, φ) – ПСК. Вышеописанный алгоритм можно аналогично применять для пересчета координат (x, y) в координаты

(r, φ). При этом $\varphi \in [0; 2\pi)$ всегда, значит φ - это главное значение полярного угла.

3. В большинстве учебников АГЛА как для пересчета КЧ, так и для пересчета координат ДСК в координаты ПСК вычисляют ψ = arctg (x/y) при $y \neq 0$. В этом случае вычисляют $\varphi = \psi$ только при $x \geq 0$ и $y>0$. Различных случаев вычисления φ при этом значительно больше, алгоритм получается более трудным для применения и понимания.

4. Выявленный неоднозначный фрагмент содержания обучения аналитической геометрии и предлагаемые его изменения

Почти во всех учебниках АГ, АГЛА рассматривается пересчет координат точки из одной ДСК в другую ДСК для плоскости $\mathbf{R}^2$, причем рассматриваются только случаи, когда одна ДСК получается из другой: параллельным переносом осей координат; поворотом осей координат на угол φ; симметричным отражением одной из осей координат относительно другой.

Предлагается добавить рассмотрение общего подхода, из которого указанные выше три случая будут следовать как частные. Это формулы для пересчета координат точки, заданных в ДСК в другую аффинную систему координат (АСК). ДСК – это частный случай АСК, от базиса АСК не требуется ни ортогональности, ни нормированности.

$$\mathbf{i}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{i}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ - базис ССК, } \Theta = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ - начало ССК} \qquad (5)$$

$$\mathbf{i'}_1 = \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \dots \\ u_{n,1} \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{i'}_n = \begin{bmatrix} u_{1,n} \\ u_{2,n} \\ \dots \\ u_{n,n} \end{bmatrix} \text{ - базис НСК, } Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix} \text{ - начало НСК} \qquad (6)$$

Имеем пространство $\mathbf{R}^n$. В нем (5) задает старую систему координат (ССК). Она, очевидно, есть ДСК. Формулы (6) задают новую систему координат (НСК), все эти координаты указаны в ССК. НСК может не быть ДСК, а быть лишь АСК.

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ \dots \\ \dots \\ m_n \end{bmatrix} \text{ для ССК; } \mathbf{m'} = \begin{bmatrix} m'_1 \\ \dots \\ \dots \\ m'_n \end{bmatrix} \text{ для НСК} \qquad (7)$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{1,1} & \dots & u_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{n,1} & \dots & u_{n,n} \end{bmatrix} \qquad (8)$$

$$\mathbf{m} = U\,\mathbf{m'} + Q \qquad (9)$$

$$\mathbf{m'} = U^{-1}(\mathbf{m} - Q) \qquad (10)$$

Пусть (7) задает координаты произвольной точки $M \in \mathbf{R}^n$. Пусть (8) определяет переходную матрицу U. Легко доказать формулы (9), (10). Если НСК тоже является ДСК, то U – ортогональная матрица и $U^{-1} = U^T$.

Заключение

Разделы 1 - 4 статьи успешно решили задачи 1 - 4 соответственно, следовательно, цель исследования была достигнута.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия: Учеб. для вузов. 2-е изд. – М.: изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000 – 388с.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия: Учеб. для вузов. 7-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 224с.
3. Брылевская Л.И., Лапин И.А., Ратафьева Л.С. Аналитическая геометрия и линейная алгебра / Под общ. ред. Л.С. Ратафьевой: Уч. пособие. - СПб: СПбГУ ИТМО, 2016. - 156 с.
4. Евклид. Начала. Книги I-XV. Перевод с греческого Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М.: Ленанд, 2021 – 616с.
5. Комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского к книге Евклид. Начала. Книги I-XV. – М.: Ленанд, 2021 – 656с.
6. О некоторых проблемах в групповом обучении студентов математике и информатике. / Р.Р. Фокин, Д.А. Булекбаев, А.А. Атоян, М.А. Абиссова // Педагогический научный журнал – 2023 – Том 6, № 6 – С. 124-131.
7. Д. Пойа Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: Наука, 1975. – 464 с.
8. Фокин Р.Р. О содержательном аспекте обучения математике и информатике в современной высшей школе // Современные наукоемкие технологии - № 6 (часть 2), 2021. - С.340-344.
9. Фокин Р.Р. О содержательном аспекте изучения математического доказательства на примере теоремы Кронекера-Капелли в курсе линейной алгебры // Современные наукоемкие технологии - № 2, 2022. - С.231-235.
10. Фокин Р.Р. Некоторые психологические и статистические аспекты преподавания дисциплин из областей математики и информатики в современной высшей школе. // Современные наукоемкие технологии – 2019 - №9 - С.175-179.
11. Фокин Р.Р., Ершова Е.В. О строгих и правдоподобных рассуждениях при изучении векторов и матриц в вузовской математике. // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Гуманитарные науки. – 2025 - № 7 – С. 165-170.

12. Фокин Р.Р. Некоторые методические преобразования содержания обучения системам координат и комплексным числам в математике высшей школы. // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Гуманитарные науки. – 2025 - № 2 – С. 147-151.