DOI 10.37882/2223–2966.2022.09.45

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОБЛЕМЫ ПРОЧНОСТИ АДГЕЗИОННОГО СОЕДИНЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ СОВРЕМЕННОЙ ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

INVESTIGATION OF THE PROBLEM OF ADHESIVE JOINT STRENGTH USING MODERN MATHEMATICAL MODELING TECHNOLOGY

S. Yakushina

Summary. The most important technical challenge is to ensure the integrity of the structure. A mathematical model of interaction is proposed, based on the properties of contacting materials. This model can serve as a basis for determining the strength of a composite material. The model under consideration is based on the problem of adhesive contact strength and damage to the surface of the contacting bodies, due to the discrepancy between the physical properties of materials or the action of external forces.

Keywords: composite material, damage, adhesion, non-local interaction, second-order material, tensile strength.

Якушина Светлана Ивановна
Доцент, ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
jakushina_svetlana@rambler.ru

Аннотация. Важнейшей технической задачей является обеспечение целостности конструкции. Предлагается математическая модель взаимодействия, построенная на учете свойств контактирующих материалов. Эта модель может служить основой для определения прочности композиционного материала. В основе рассматриваемой модели лежит проблема прочности адгезионного контакта и поврежденности поверхности контактирующих тел, обусловленной несоответствием физических свойств материалов или действием внешних сил.

Ключевые слова: композиционный материал, поврежденность, адгезия, нелокальное взаимодействие, материал второго порядка, предел прочности.

Композиционные материалы находят широкое применение в разнообразных технических приложениях и в повседневной жизни [1].

В рамках предложенной модели рассмотрена такая причина нарушения адгезионного контакта, как изменение свойств прочности. Меняя в вычислительных экспериментах параметры материалов, автором была получена связь этих параметров с прочностью адгезионного соединения. В данной модели рассматривается только прочность на разрыв как адгезионного соединения элементов структуры, так и ее элементов.

Некогерентность атомных решеток композита вызывает релаксацию, уменьшая энергию несоответствия. [2,3]. Назовем участками адгезии те участки поверхности контакта, вдоль которых решетки когерентны. Поврежденными в рамках модели будем считать участки поверхности контакта, вдоль которых когерентность решеток нарушена. Для моделирования гетерогенного композита используем понятие рассеянной поврежденности гомогенной среды (параметр ω), при этом поврежденность характеризуется скалярным параметром β [2].

Пусть $B_{(1)}$ и $B_{(2)}$ — два однородных твердых тела, контактирующие вдоль поверхности $S_{(12)}$. Единичную нормаль к указанной поверхности $\vec{n}_{(12)}$, направлена от $B_{(1)}$ к $B_{(2)}$, а нормаль $\vec{n}_{(21)} = -\vec{n}_{(21)}$ направлена от $B_{(2)}$ к $B_{(1)}$; $\vec{u}_{(j)}$ -перемещения частиц тела $B_{(j)}$ ($j = 1, 2$) относительно отсчетного состояния.

При адгезии твердых материалов атомная структура одного продолжает структуру другого [3–5], причем решетки контактирующих тел когерентны. На каждом элементарном участке $dS_{(12)}$ справедливо:

$$dS_{(12)} = dS_\alpha + dS_\beta = \alpha\, dS_{(12)} + \beta\, dS_{(12)} \tag{1}$$

Перемещения определены равенствами:

$$(\vec{u}_{\alpha(j)}, \vec{u}_{\beta(j)}) \begin{cases} \neq 0, \vec{r} \in S_\alpha, S_\beta \\ = 0, \vec{r} \in S_\beta, S_\alpha \end{cases} \tag{2}$$

Для полей $\vec{u}_{(j)} = \vec{u}_{(j)}(\vec{r})$ изменение потенциальной энергии тела $B = B_{(1)} \bigcup B_{(2)}$ по отношению к отсчетному состоянию определяется:

$$W_{(12)} = W_{(12)}(\nabla \vec{u}_{(1)}, \nabla \vec{u}_{(2)}, \nabla^2 \vec{u}_{(1)}, \nabla^2 \vec{u}_{(2)}) \tag{3}$$

Для обеспечения стационарного значения аргументов функционала (3) необходимо условие:

$$\delta(W_{(12)}(\alpha)) = \sum_{j=1}^{2} \int_{V_{(j)}} \delta w_{(j)} d V_{(j)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{2} \int_{V_{(j)}} \left[P_{(j)}^{(1)} \cdot\cdot \delta\left(\nabla \vec{u}_{(j)}\right)^T + P_{(j)}^{(2)} \cdots \delta\left(\nabla^2 \vec{u}_{(j)}\right)^T \right] = 0 \quad (4)$$

$$P_{(j)}^{(n)} = \frac{\partial w_{(j)}}{\partial (\nabla^n \vec{u}_{(j)})^T} \quad (n = 1, 2) \text{ —} \quad (5)$$

тензоры напряжений.

Уравнения равновесия тел $B_{(j)}$, краевые условия для них на свободных участках $S_{0(j)} = S_{(j)} \setminus S_{(12)}$ их границ, вариационное условие сопряжения полей перемещений и напряжений вдоль поверхности контакта имеют вид:

$$\nabla \cdot (P_{(j)}^{(1)} - \nabla \cdot P_{(j)}^{(2)}) = \vec{0}, \ \vec{r} \in V_{(j)} \quad (6)$$

$$\vec{n}_{(j)} \cdot (P_{(j)}^{(1)} - \nabla \cdot P_{(j)}^{(2)}) - \nabla_S \cdot (\vec{n}_{(j)} \cdot P_{(j)}^{(2)}) = 0, \ \vec{r} \in S_{0(j)} \quad (7)$$

$$(\vec{n}_{(j)} \, \vec{n}_{(j)}) \cdot\cdot P_{(j)}^{(2)} = \vec{0}, \ \vec{r} \in S_{0(j)} \quad (8)$$

$$\int_{S_{(12)}} \Big\{ \left[\vec{n}_{(12)} \cdot \left(P_{(1)}^{(1)} - \nabla \cdot P_{(1)}^{(2)}\right) - \nabla_S \cdot \left(\vec{n}_{(12)} \cdot P_{(1)}^{(2)}\right)\right] \cdot \delta \vec{u}_{(1)} +$$
$$+ \left[\vec{n}_{(21)} \cdot \left(P_{(2)}^{(1)} - \nabla \cdot P_{(2)}^{(2)}\right) - \nabla_S \cdot \left(\vec{n}_{(21)} \cdot P_{(2)}^{(2)}\right)\right] \cdot \delta \vec{u}_{(2)} \Big\} d S_{(12)} +$$
$$+ \int \Big\{ \left((\vec{n}_{(12)} \vec{n}_{(12)}) \cdot\cdot P_{(1)}^{(2)} \right) \cdot \delta\left(\partial \vec{u}_{(1)} / \partial n_{(12)}\right) +$$
$$+ \left((\vec{n}_{(21)} \vec{n}_{(21)}) \cdot\cdot P_{(2)}^{(2)} \right) \cdot \delta\left(\partial \vec{u}_{(2)} / \partial n_{(21)}\right) \Big\} d S_{(12)} = 0 \quad (11)$$

$\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к участку поверхности S, определенному соответствующим нижним индексом; $\partial \vec{u} / \partial n = \vec{n} \cdot (\nabla \vec{u})$ — обозначение производной в его направлении; ∇_S — градиента вдоль поверхности S.

На участках адгезии:

$$\delta \vec{u}_{\alpha(1)} = \delta \vec{u}_{\alpha(2)}, \quad \delta\left(\frac{\partial \vec{u}_{\alpha(1)}}{\partial n_{(12)}}\right) = \delta\left(\frac{\partial \vec{u}_{\alpha(2)}}{\partial n_{(12)}}\right) \quad (9)$$

$$\vec{u}_{\alpha(1)} - \vec{u}_{\alpha(2)} = 0 \quad \nabla \vec{u}_{\alpha(1)} - \nabla \vec{u}_{\alpha(2)} = C_{S(12)} \quad (10)$$

Компоненты вектора $\vec{u}_{\alpha(12)}$ и тензора $C_{S(12)}$ можно определить [2].

Кроме того, на участках адгезионного контакта выполняются равенства:

$$\vec{n}_{(12)} \cdot \left(P_{\alpha(1)}^{(1)} - \nabla \cdot P_{\alpha(1)}^{(2)}\right) - \nabla_s \cdot \left(\vec{n}_{(12)} \cdot P_{\alpha(1)}^{(2)}\right) +$$
$$+ \vec{n}_{(21)} \cdot \left(P_{\alpha(2)}^{(1)} - \nabla \cdot P_{\alpha(2)}^{(2)}\right) - \nabla_s \cdot \left(\vec{n}_{(21)} \cdot P_{\alpha(2)}^{(2)}\right) = \vec{0}$$
$$(\vec{n}_{(12)} \vec{n}_{(12)}) \cdot\cdot P_{\alpha(1)}^{(2)} + (\vec{n}_{(21)} \vec{n}_{(21)}) \cdot\cdot P_{\alpha(2)}^{(2)} = \vec{0} \quad (11)$$

На участках отсутствия адгезионного контакта:

$$\delta \vec{u}_{\beta(1)} = \delta \vec{u}_{\beta(2)} \quad \vec{u}_{\beta(j)} = \vec{u}_{\alpha(j)} \quad (12)$$

На каждом из краев для выполняются условия:

$$\vec{n}_{(12)} \cdot \left(P_{\alpha(1)}^{(1)} - \nabla \cdot P_{\alpha(1)}^{(2)}\right) - \nabla_s \cdot \left(\vec{n}_{(12)} \cdot P_{\alpha(1)}^{(2)}\right) = \vec{0} \quad (13)$$

$$\vec{n}_{(21)} \cdot \left(P_{\alpha(2)}^{(1)} - \nabla \cdot P_{\alpha(2)}^{(2)}\right) - \nabla_s \cdot \left(\vec{n}_{(21)} \cdot P_{\alpha(2)}^{(2)}\right) = \vec{0} \quad (14)$$

$$(\vec{n}_{(12)} \vec{n}_{(12)}) \cdot\cdot P_{\alpha(1)}^{(2)} = \vec{0} \quad (15)$$

$$(\vec{n}_{(21)} \vec{n}_{(21)}) \cdot\cdot P_{\beta(2)}^{(2)} = \vec{0} \quad (16)$$

Принимается, что

$$\delta\left(\frac{\partial \vec{u}_{\beta(1)}}{\partial n_{(12)}}\right) = 0 \quad \delta\left(\frac{\partial \vec{u}_{\beta(2)}}{\partial n_{(12)}}\right) = 0 \quad (17)$$

Задачи по определению полей $\vec{u}_{(j)}(\vec{r})$ и $\vec{u}_{\beta(j)}(\vec{r})$ оказываются независимыми друг от друга. На основе их решения можно получить выражение для энергии несоответствия тел $B_{(1)}$ и $B_{(2)}$.

$$W_{(12)}(\beta) = (1-\beta)^2 W_{\alpha\alpha} + \beta(1-\beta) W_{\alpha\beta} + \beta^2 W_{\beta\beta} \quad (18)$$

Величины W_{pm}, $(p, \ m = \alpha, \ \beta)$ определяются равенствами:

$$W_{pm} = \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \int_0^{\nabla^k \vec{u}_{(j)}} P_{p(j)}^{(k)} d\left(\nabla^k \vec{u}_{(j)}\right) \quad (19)$$

Величину параметра поврежденности вычисляем по формуле:

$$\beta = \frac{\partial W_{(12)}}{\partial \beta} = \left[1 + \frac{2 W_{\alpha\alpha} - W_{\alpha\beta}}{2 W_{\beta\beta} - W_{\alpha\beta}} \right]^{-1} \quad (20)$$

В расчетах предлагается использовать модель материала второго порядка [7,8]. Связь напряжений и деформаций определяется выражением:

$$P_{(j)}^{(k)} = P_{(j)}^{0(k)} + \sum_{m=1}^{2} \left(\nabla^m \vec{u}_{(j)}\right) \overbrace{\cdot \dots \cdot}^{m \text{ ðàç}} C_{(j)}^{(m,k)} \quad (21)$$

Здесь $P_{(j)}^{0(k)}$ — тензоры начальных напряжений, обусловлены свойствами материала; $C_{(j)}^{(m,k)}$ — тензоры упругих констант, обусловлены свойствами материала.

В выражениях (20) и (21) $\Phi_{(j)}^{(2)}(\vec{l}_{12})dV_{1(j)}dV_{2(j)}$ и $\Phi_{(j)}^{(3)}(\vec{l}_{12},\vec{l}_{13})dV_{1(j)}dV_{2(j)}dV_{3(j)}$ — потенциалы соответственно парного и тройного нелокальных взаимодействий частицы $dB_{2(j)}$ с $dB_{1(j)}$, частиц $dB_{2(j)}$ и $dB_{3(j)}$ с $dB_{1(j)}$, пропорциональные их объемам; $\vec{l}_{1p}$ — радиус-векторы положения частицы $dB_{p(j)}$ относительного $dB_{1(j)}$.

Основные положения рассматриваемой модели положены в основу разработанной модели прочности адгезионного соединения. Кроме того, на основе приведенного анализа и созданной модели был разработан алгоритм с целью автоматизации подсчета параметра адгезии [9]. Разрушение материала наступает, если нормальное напряжение достигает определенного значения, специфичного для пары материалов при их адгезии или для материала однородного элемента структуры.

Предложен алгоритм интерпретации прочности адгезионного соединения на основе математической модели поврежденности адгезионного контакта. В ее основу положена нелокальная модель [6] упругой среды, учитывающая парные и тройные взаимодействия частиц. Модель позволяет на основании данных о характеристиках контактирующих материалов вычислить поврежденность их адгезионного контакта, которая обусловлена несоответствием параметров их решеток.

ЛИТЕРАТУРА

1. Валиев, Р. З. Объемные наноструктурированные материалы: уникальные свойства и инновационный потенциал/ Валиев Р. З., Наймарк О. Б. Инновации. 2007, № 12 (110), с. 70–75.
2. Овидько, И. А. Наномеханика квантовых точек и проволок./ И. А. Овидько, А. П. Шейнерман //СПб.: «Янус», 2004. — 165 с.
3. Бакулин, А. В. Первопринципное изучение адгезии на границах раздела "металл — сплав"/ А. В. Бакулин, В. В. Мельников, С. Е. Кулькова// Физическая мезомеханика. 2011, т. 14, № 4, с. 95–103.
4. Мамонова, М. В. Физика поверхности. Теоретические и экспериментальные методы. / М. В. Мамонова, В. В. Прудников, И. А. Прудникова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 400 с.
5. Raynolds, J. E. Adhesion in NiAl-Cr from first principles / J. E. Raynolds, J. R. Smith, G.-L. Zhao, D. Srolozitz // Phys. Rev. B. — 1996. — V. 53. — No 20. — P. 13883–13 890.
6. Шоркин, В. С. Алгоритм интерпретации прочности композиционных материалов на основе математической модели поврежденности адгезионного контакта / В. С. Шоркин, С. И. Якушина//Материалы IX Международного научного симпозиума, посвященного 90-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники РФ профессора В. Г. Зубчанинова. «Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела», Тверь, с. 110–113
7. Shorkin, V. S. Nonlinear Dispersion Properties of High-Frequency Waves in the Gradient Theory of Elasticity/ V. S. Shorkin. Mechanics of Solids. — 2011. — V. 6. — P. 898–912.
8. Шоркин, В. С. Учет влияния тройного взаимодействия частиц среды на поверхностные и адгезионные свойства твердых тел / В. С. Шоркин, Л. Ю. Фроленкова, А. С. Азаров //Материаловедение. 2011. № 2. С. 2–7.
9. Герасимова Н.М., Якушина С. И. Алгоритм интерпретации математической модели предела прочности композита// Журнал «Информационные системы и технологии».-2022.№ 1 (129). — С. 30–35.

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»