

# КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМА ОТНОСИТЕЛЬНОГО МАНИПУЛИРОВАНИЯ

## KINEMATIC RESEARCH OF THE JOINT RELATIVE MANIPULATION MECHANISM

**S. Orekhov  
A. Skadin  
V. Sakharov  
S. Glebov  
A. Prosvernin**

*Summary.* The purpose of the work: to conduct a kinematic research of the joint relative manipulation mechanism, for the further development of an executive-level control system that ensures movement along the formed trajectory. The objectives of this research are to conduct a kinematic research of the joint relative manipulation mechanism, and to verify the data received, to build a working area. Conclusions: A kinematic research of the mechanism was carried out (the direct and inverse problem was solved), verification of the data obtained was carried out, the working area of the mechanism was built.

*Keywords:* joint relative manipulation mechanisms, kinematic research.

**Орехов Сергей Юрьевич**

Старший преподаватель, Калужский филиал  
Московского государственного технического  
университета имени Н.Э. Баумана (национальный  
исследовательский университет)  
serg31057@mail.ru

**Скадин Артём Владимирович**

Калужский филиал Московского государственного  
технического университета имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)  
a.skadin@mail.ru

**Сахаров Владимир Валентинович**

Старший преподаватель, Калужский филиал  
Московского государственного технического  
университета имени Н.Э. Баумана (национальный  
исследовательский университет)  
vlad.saharov2011@yandex.ru

**Глебов Сергей Александрович**

Доцент, к.ф.-м.н., Калужский филиал Московского  
государственного технического университета имени  
Н.Э. Баумана (национальный исследовательский  
университет)  
saglebov@bmstu.ru

**Просвернин Андрей Андреевич**

Калужский филиал Московского государственного  
технического университета имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)  
aprosvernin@mail.ru

*Аннотация.* Цель работы: провести кинематическое исследование механизма относительного манипулирования, для дальнейшей разработки системы управления исполнительного уровня, обеспечивающей движение по сформированной траектории. Задачи данного исследования заключаются в проведение кинематического исследования выбранного механизма относительного манипулирования, и проведения верификации полученных данных, построить рабочую зону. Выводы: Произведено кинематическое исследование механизма (решена прямая и обратная задача), проведена верификация полученных данных, была построена рабочая зона механизма.

*Ключевые слова:* механизмы относительного манипулирования, кинематическое исследования.

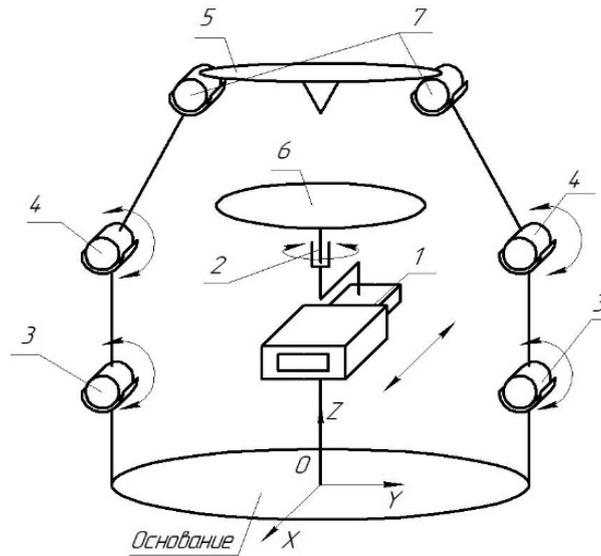


Рис. 1. Кинематическая схема механизма относительного манипулирования

**Д**анная работа посвящена кинематическому исследованию механизма относительного манипулирования для дальнейшей разработки системы управления [1], [2], [3]. Механизмы относительного манипулирования предназначены для замены человека при выполнении основных и вспомогательных технологических операций в процессе промышленного производства. При этом решается важная задача — освобождение человека от работ, связанных с опасностями для здоровья или с тяжелым физическим трудом, а также от простых монотонных операций, не требующих высокой квалификации.

Анализ работы  
исследуемого механизма

Для раскрытия процесса создания и функционирования системы управления манипуляционными механизмами в данной работе выбрана определённая кинематическая модель. Модель представляет собой механизм относительного манипулирования, обладающий пятью степенями свободы и состоящий из двух модулей (рисунок 1.): модуля установки инструмента и модуля установки обрабатываемого объекта (детали).

Рассматриваемы механизм относительного манипулирования — пространственный механизм — включает основание, выходное звено модуля установки инструмента 5, выполненное в виде пятизвенного механизма, выходное звено модуля установки обрабатываемого объекта б, выполненное в виде поворотного механизма. Выходное звено б связано основанием установленной на основании поступательной кинематической парой (линейным двигателем) 1, и еще одной враща-

тельной кинематической парой (вращательным двигателем) 2, сопряженной непосредственно с выходным звеном б. Выходное звено 5, связано с основанием двумя кинематическими цепями. Выходное звено связано с установленными на основании двумя вращательными приводными кинематическими парами (вращательными двигателями) 3, связанными непосредственно с промежуточными приводными вращательными парами 4, в свою очередь связанными с конечными не приводными вращательными кинематическими парами 7. Механизм выполнен в виде единой пространственной конструкции.

Механизм работает следующим образом: относительно основания выходное звено модуля установки обрабатываемого объекта (детали) б и модуля установки инструмента 5 посредством трех приводных кинематических цепей, при действии двигателей вращательного движения 2, и поступательного движения 1, и двигателей вращательного движения 3, 4, движение передается выходным звеньям 5 и б соответственно.

Кинематическое  
исследование

Решение прямой задачи кинематики

1. Обозначим необходимые для расчёта размеры исследуемого механизма (рисунок 2):

$$\begin{aligned}
 l_{11} = l_{r1} &= 0,185\text{ м}; \quad h_1 = 0,06\text{ м}; \quad h_2 = 0,04\text{ м}; \\
 h_{13} = h_{r3} &= 0,04\text{ м}; \quad h_{14} = h_{r4} = 0,15\text{ м}; \\
 h_{15} = h_{r5} &= 0,18\text{ м}; \quad l_{15} = l_{r5} = 0,05\text{ м}; \quad h_6 = 0,051\text{ м}.
 \end{aligned}$$

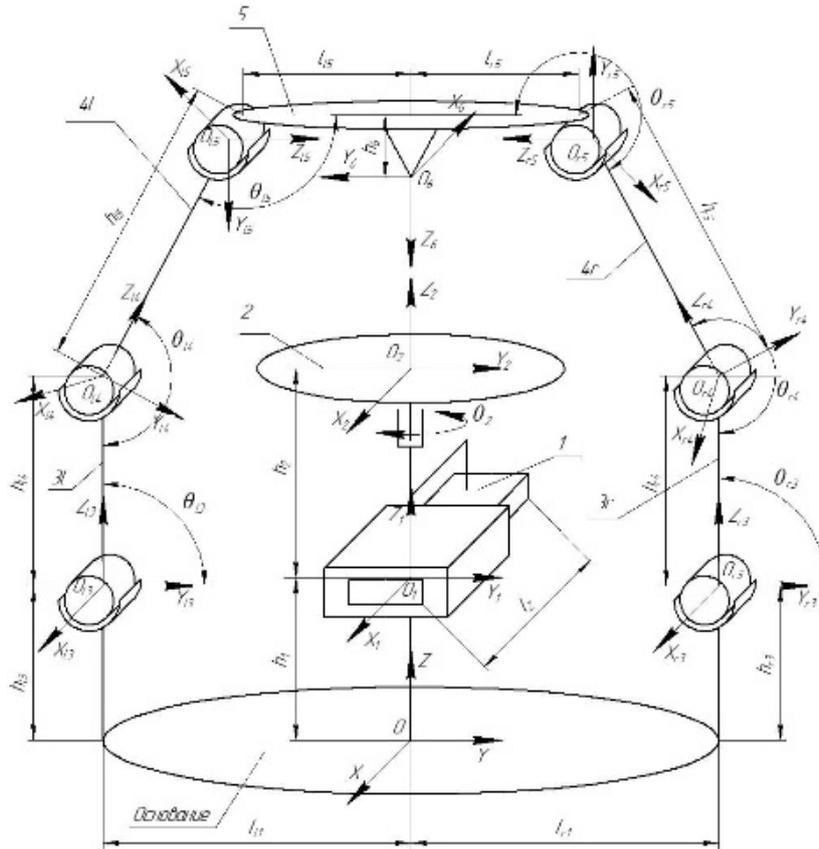


Рис. 2. Кинематическая схема

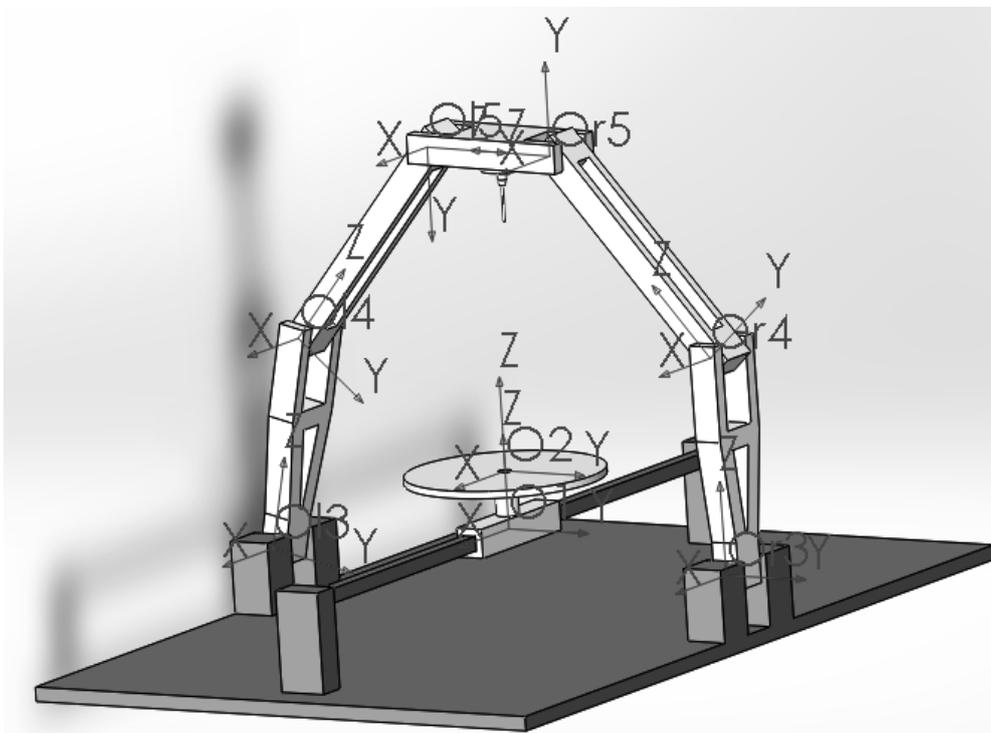


Рис. 3. Трёхмерная модель механизма в среде SolidWorks

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & q_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & 0 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A_{l3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -l_{l1} \\ 0 & 0 & 1 & h_{l3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$A_{r3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_{r1} \\ 0 & 0 & 1 & h_{r3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A_{l4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_{l3} - \pi/2) & -\sin(q_{l3} - \pi/2) & -h_{l4} \sin(q_{l3} - \pi/2) \\ 0 & \sin(q_{l3} - \pi/2) & \cos(q_{l3} - \pi/2) & h_{l4} \cos(q_{l3} - \pi/2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$A_{r4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_{r3} - \pi/2) & -\sin(q_{r3} - \pi/2) & -h_{r4} \sin(q_{r3} - \pi/2) \\ 0 & \sin(q_{r3} - \pi/2) & \cos(q_{r3} - \pi/2) & h_{r4} \cos(q_{r3} - \pi/2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$A_{l5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_{l4} - \pi) & -\sin(q_{l4} - \pi) & -h_{l5} \sin(q_{l4} - \pi) \\ 0 & \sin(q_{l4} - \pi) & \cos(q_{l4} - \pi) & h_{l5} \cos(q_{l4} - \pi) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$A_{r5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_{r4} - \pi) & -\sin(q_{r4} - \pi) & -h_{r5} \sin(q_{r4} - \pi) \\ 0 & \sin(q_{r4} - \pi) & \cos(q_{r4} - \pi) & h_{r5} \cos(q_{r4} - \pi) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$A_{l6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin q_{l5} & -\cos q_{l5} & l_{l5} \sin q_{l5} - h_6 \cos q_{l5} \\ 0 & \cos q_{l5} & -\sin q_{l5} & -l_{l5} \cos q_{l5} - h_6 \sin q_{l5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$A_{r6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin q_{r5} & \cos q_{r5} & l_{r5} \sin q_{r5} + h_6 \cos q_{r5} \\ 0 & -\cos q_{r5} & \sin q_{r5} & h_6 \sin q_{r5} - l_{r5} \cos q_{r5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$T_1 = A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & q_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$T_2 = A_1 A_2 = \begin{pmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & q_1 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 + h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$T_{l3} = A_{l3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -l_{l1} \\ 0 & 0 & 1 & h_{l3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$T_{r3} = A_{r3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_{r1} \\ 0 & 0 & 1 & h_{r3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$T_{l4} = A_{l3} A_{l4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin q_{l3} & \cos q_{l3} & h_{l4} \cos q_{l3} - l_{l1} \\ 0 & -\cos q_{l3} & \sin q_{l3} & h_{l4} \sin q_{l3} + h_{l3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$T_{r4} = A_{r3} A_{r4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin q_{r3} & \cos q_{r3} & h_{r4} \cos q_{r3} + l_{r1} \\ 0 & -\cos q_{r3} & \sin q_{r3} & h_{r4} \sin q_{r3} + h_{r3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$T_{l5} = A_{l3} A_{l4} A_{l5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(q_{l3} + q_{l4}) & -\cos(q_{l3} + q_{l4}) & h_{l4} \cos q_{l3} - l_{l1} - h_{l5} \cos(q_{l3} + q_{l4}) \\ 0 & \cos(q_{l3} + q_{l4}) & \sin(q_{l3} + q_{l4}) & h_{l3} + h_{l4} \sin q_{l3} - h_{l5} \sin(q_{l3} + q_{l4}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$T_{r5} = A_{r3} A_{r4} A_{r5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(q_{r3} + q_{r4}) & -\cos(q_{r3} + q_{r4}) & l_{r1} + h_{r4} \cos q_{r3} - h_{r5} \cos(q_{r3} + q_{r4}) \\ 0 & \cos(q_{r3} + q_{r4}) & -\sin(q_{r3} + q_{r4}) & h_{r3} + h_{r4} \sin q_{r3} - h_{r5} \sin(q_{r3} + q_{r4}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$T_{l_6} = A_{l_3}A_{l_4}A_{l_5}A_{l_6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos q_l & \sin q_l & h_{l_4} \cos q_{l_3} - l_{l_1} - h_{l_5} \cos(q_{l_3} + q_{l_4}) + l_{l_5} \cos q_l + h_6 \sin q_l \\ 0 & -\sin q_l & -\cos q_l & h_{l_3} + h_{l_4} \sin q_{l_3} - h_{l_5} \sin(q_{l_3} + q_{l_4}) - h_6 \cos q_l + l_5 \sin q_l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$T_{r_6} = A_{r_3}A_{r_4}A_{r_5}A_{r_6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_r & -\sin q_r & l_{r_1} + h_{r_4} \cos q_{r_3} - h_{r_5} \cos(q_{r_3} + q_{r_4}) + l_{r_5} \cos q_r - h_6 \sin q_r \\ 0 & \sin q_r & \cos q_r & h_{r_3} + h_{r_4} \cos q_{r_3} + l_{r_5} \sin q_r - h_{r_5} \sin(q_{r_3} + q_{r_4}) + h_6 \cos q_r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$T(X) = \begin{pmatrix} \cos \gamma \sin \alpha - \sin \gamma \cos \alpha \sin \beta & -\sin \gamma \sin \alpha - \cos \gamma \cos \alpha \sin \beta & \cos \beta \cos \alpha & x_0 \\ -\cos \gamma \cos \alpha - \sin \gamma \sin \alpha \sin \beta & \sin \gamma \sin \alpha - \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta & \cos \beta \sin \alpha & y_0 \\ -\sin \gamma \cos \beta & -\cos \gamma \cos \beta & -\sin \beta & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$X = \begin{cases} x_0 = T(1,4); \\ y_0 = T(2,4); \\ z_0 = T(3,4); \\ \alpha = \arccos\left(\frac{T(1,3)}{\cos \beta}\right); \\ \beta = \arcsin(-T(3,3)); \\ \gamma = \arccos\left(-\frac{T(3,2)}{\cos \beta}\right). \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} x_0 &= h_{l_4} * \cos q_{l_3} * \sin q_2 - l_{l_1} * \sin q_2 - h_{l_5} * \cos(q_{l_3} + q_{l_4}) * \sin q_2 - q_1 * \cos q_2 + \\ &+ l_{l_5} * \cos(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5}) * \sin q_2 + h_6 * \sin(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5}) * \sin q_2; \\ y_0 &= q_1 * \sin q_2 - l_{l_1} * \cos q_2 - h_{l_5} * \cos(q_{l_3} + q_{l_4}) * \cos q_2 + h_{l_4} * \cos q_2 * \cos q_{l_3} + \\ &+ l_{l_5} * \cos(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5}) * \cos q_2 + h_6 * \sin(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5}) * \cos q_2; \\ z_0 &= h_{l_3} - h_2 - h_1 - h_{l_5} * \sin(q_{l_3} + q_{l_4}) + h_{l_4} * \sin q_{l_3} - h_6 * \cos(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5}) + \\ &+ l_{l_5} * \sin(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5}); \\ \beta &= \arcsin(\cos(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5})); \\ \alpha &= \arccos((\sin(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5}) * \sin q_2) / (\sin(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5})^2)^{(1/2)}); \\ \gamma &= \arccos(\sin(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5}) / (\sin(q_{l_3} + q_{l_4} + q_{l_5})^2)^{(1/2)}). \end{aligned} \quad (23)$$

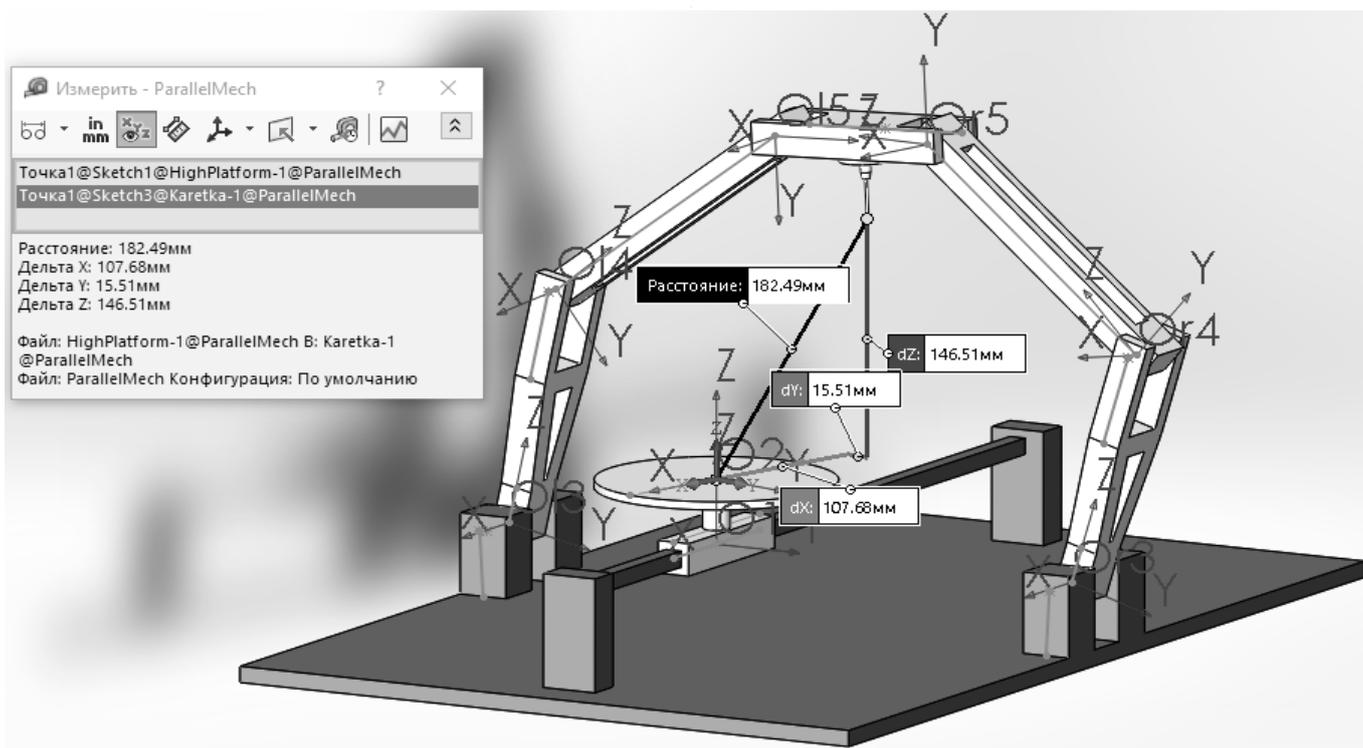


Рис. 4. Измерение значений декартовых координат выходного звена в среде SolidWorks

2. Введём обозначения для обобщённых координат и определим их допустимые значения:

$$\left. \begin{aligned} q_1 = l_2 = [-0, 2; 0, 2] \text{ м} \\ q_2 = \theta_2 = [0^\circ; 360^\circ] \\ q_{i3} = \theta_{i3} = [70^\circ; 150^\circ] \\ q_{r3} = \theta_{r3} = [30^\circ; 110^\circ] \\ q_{l4} = \theta_{l4} = [45^\circ; 180^\circ] \\ q_{r4} = \theta_{r4} = [180^\circ; 315^\circ] \end{aligned} \right\} \text{приводные обобщённые координаты;}$$

$$\left. \begin{aligned} q_{i5} = \theta_{i5} \\ q_{r5} = \theta_{r5} \end{aligned} \right\} \text{неприводные обобщённые координаты.}$$

3. Построим в среде SolidWorks полноразмерную трёхмерную модель исследуемого механизма (рисунок 3).

4. Для кинематического анализа механизма воспользуемся методом Денавита-Хартенберга, который представляет собой матричный метод последовательного построения систем координат, связанных с каждым звеном кинематической цепи [4]. Запишем матрицы элементарного преобразования для исследуемого механизма.

4.1) Матрица перехода из системы координат  $OXYZ$  к  $O_iX_iY_iZ_i$ : формула 1.

4.2) Матрица перехода из системы координат  $O_iX_iY_iZ_i$  к  $O_2X_2Y_2Z_2$ : формула 2.

4.3) Матрица перехода из системы координат  $OXYZ$  к  $O_{i3}X_{i3}Y_{i3}Z_{i3}$ : формула 3.

4.4) Матрица перехода из системы координат  $OXYZ$  к  $O_{r3}X_{r3}Y_{r3}Z_{r3}$ : формула 4.

4.5) Матрица перехода из системы координат  $O_{i3}X_{i3}Y_{i3}Z_{i3}$  к  $O_{l4}X_{l4}Y_{l4}Z_{l4}$ : формула 5.

4.6) Матрица перехода из системы координат  $O_{r3}X_{r3}Y_{r3}Z_{r3}$  к  $O_{r4}X_{r4}Y_{r4}Z_{r4}$ : формула 6.

4.7) Матрица перехода из системы координат  $O_{l4}X_{l4}Y_{l4}Z_{l4}$  к  $O_{i5}X_{i5}Y_{i5}Z_{i5}$ : формула 7.

4.8) Матрица перехода из системы координат  $O_{r4}X_{r4}Y_{r4}Z_{r4}$  к  $O_{r5}X_{r5}Y_{r5}Z_{r5}$ : формула 8.

4.9) Матрица перехода из системы координат  $O_{i5}X_{i5}Y_{i5}Z_{i5}$  к  $O_6X_6Y_6Z_6$ : формула 9.

4.10) Матрица перехода из системы координат  $O_{r5}X_{r5}Y_{r5}Z_{r5}$  к  $O_6X_6Y_6Z_6$ : формула 10.

5. Матрицы перехода от основания к  $i$ -ому звену (код для расчёта в среде Matlab).

5.1) К звену  $i$ : формула 11.

$$\begin{aligned}
 q_1 &= (y_0 * \cos\alpha * (1 - \cos(-\arccos(\sin\beta) + 2 * \pi))^2)^{(1/2)} - \\
 &- x_0 * \sin(-\arccos(\sin\beta) + 2 * \pi) * (\sin\alpha^2)^{(1/2)} / \sin(-\arccos(\sin\beta) + 2 * \pi); \\
 q_2 &= \arcsin((\cos\alpha * (\sin(-\arccos(\sin\beta) + 2 * \pi))^2)^{(1/2)} / \sin(-\arccos(\sin\beta) + 2 * \pi)); \\
 q_{l_3} &= -\arcsin((h_1 + h_2 - h_{l_3} + z_0 + l_{l_5} * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} - h_{l_5} * \sin(\arcsin(((l_{l_1} + \\
 &+ h_6 * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + y_0 / ((\sin\alpha^2)^{(1/2)} + x_0 * \cos\alpha - l_{l_5} * \sin\beta - \\
 &-(y_0 * (\cos\alpha)^2) / ((\sin\alpha^2)^{(1/2)})^2 + (h_1 + h_2 - h_{l_3} + z_0 + l_{l_5} * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + \\
 &+ h_6 * (\sin\beta)^2 - h_{l_4}^2 + h_{l_5}^2) / (2 * h_{l_5} * ((l_{l_1} + h_6 * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + y_0 / ((\sin\alpha^2)^{(1/2)} + \\
 &+ x_0 * \cos\alpha - l_{l_5} * \sin\beta - (y_0 * (\cos\alpha)^2) / (\sin\alpha^2)^{(1/2)})^2 + (h_1 + h_2 - h_{l_3} + z_0 + \\
 &+ l_{l_5} * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + h_6 * (\sin\beta)^2)^{(1/2)})) - \arccos((h_1 + h_2 - h_{l_3} + z_0 + \\
 &+ l_{l_5} * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + h_6 * \sin\beta) / ((l_{l_1} + h_6 * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + y_0 / ((\sin\alpha^2)^{(1/2)} + \\
 &+ x_0 * \cos\alpha - l_{l_5} * \sin\beta - (y_0 * (\cos\alpha)^2) / ((\sin\alpha^2)^{(1/2)})^2 + (h_1 + h_2 - h_{l_3} + z_0 + \\
 &+ l_{l_5} * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + h_6 * (\sin\beta)^2)^{(1/2)})) + h_6 * \sin\beta) / h_{l_4}) + \pi); \\
 q_{r_3} &= \arcsin((h_1 + h_2 - h_{r_3} + z_0 - l_{r_5} * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} - h_{r_5} * \sin(\arcsin(((l_{r_1} - \\
 &- h_6 * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} - y_0 / ((\sin\alpha^2)^{(1/2)} + x_0 * \cos\alpha - l_{r_5} * \sin\beta + \\
 &+(y_0 * (\cos\alpha)^2) / ((\sin\alpha^2)^{(1/2)})^2 + (h_1 + h_2 - h_{r_3} + z_0 - l_{r_5} * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + \\
 &+ h_6 * \sin\beta)^2 - h_{r_4}^2 + h_{r_5}^2) / (2 * h_{r_5} * ((l_{r_1} - h_6 * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} - y_0 / ((\sin\alpha^2)^{(1/2)} + \\
 &+ x_0 * \cos\alpha - l_{r_5} * \sin\beta + (y_0 * (\cos\alpha)^2) / ((\sin\alpha^2)^{(1/2)})^2 + (h_1 + h_2 - h_{r_3} + z_0 - \\
 &- l_{r_5} * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + h_6 * (\sin\beta)^2)^{(1/2)})) - \arccos((h_1 + h_2 - h_{r_3} + z_0 - \\
 &- l_{r_5} * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + h_6 * \sin\beta) / ((l_{r_1} - h_6 * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} - y_0 / ((\sin\alpha^2)^{(1/2)} + \\
 &+ x_0 * \cos\alpha - l_{r_5} * \sin\beta + (y_0 * (\cos\alpha)^2) / ((\sin\alpha^2)^{(1/2)})^2 + (h_1 + h_2 - h_{r_3} + z_0 - \\
 &- l_{r_5} * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + h_6 * (\sin\beta)^2)^{(1/2)})) + h_6 * \sin\beta) / h_{r_4}); \\
 q_{l_4} &= \arcsin((h_1 + h_2 - h_{l_3} + z_0 + l_{l_5} * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} - h_{l_5} * \sin(\arcsin(((l_{l_1} + \\
 &+ h_6 * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + y_0 / ((\sin\alpha^2)^{(1/2)} + x_0 * \cos\alpha - l_{l_5} * \sin\beta - \\
 &-(y_0 * (\cos\alpha)^2) / ((\sin\alpha^2)^{(1/2)})^2 + (h_1 + h_2 - h_{l_3} + z_0 + l_{l_5} * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + \\
 &+ h_6 * \sin\beta)^2 - h_{l_4}^2 + h_{l_5}^2) / (2 * h_{l_5} * ((l_{l_1} + h_6 * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + y_0 / ((\sin\alpha^2)^{(1/2)} + \\
 &+ x_0 * \cos\alpha - l_{l_5} * \sin\beta - (y_0 * (\cos\alpha)^2) / ((\sin\alpha^2)^{(1/2)})^2 + (h_1 + h_2 - h_{l_3} + z_0 + \\
 &+ l_{l_5} * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + h_6 * (\sin\beta)^2)^{(1/2)})) - \arccos((h_1 + h_2 - h_{l_3} + z_0 + l_{l_5} * (1 - \\
 &- (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + h_6 * \sin\beta) / ((l_{l_1} + h_6 * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + y_0 / ((\sin\alpha^2)^{(1/2)} + \\
 &+ x_0 * \cos\alpha - l_{l_5} * \sin\beta - (y_0 * (\cos\alpha)^2) / ((\sin\alpha^2)^{(1/2)})^2 + (h_1 + h_2 - h_{l_3} + z_0 + \\
 &+ l_{l_5} * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + h_6 * (\sin\beta)^2)^{(1/2)})) + h_6 * \sin\beta) / h_{l_4}) + \arcsin(((l_{l_1} + h_6 * (1 - \\
 &- (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + y_0 / ((\sin\alpha^2)^{(1/2)} + x_0 * \cos\alpha - l_{l_5} * \sin\beta - \\
 &-(y_0 * (\cos\alpha)^2) / ((\sin\alpha^2)^{(1/2)})^2 + (h_1 + h_2 - h_{l_3} + z_0 + l_{l_5} * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + \\
 &+ h_6 * \sin\beta)^2 - h_{l_4}^2 + h_{l_5}^2) / (2 * h_{l_5} * ((l_{l_1} + h_6 * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + y_0 / ((\sin\alpha^2)^{(1/2)} + \\
 &+ x_0 * \cos\alpha - l_{l_5} * \sin\beta - (y_0 * (\cos\alpha)^2) / ((\sin\alpha^2)^{(1/2)})^2 + (h_1 + h_2 - h_{l_3} + z_0 + \\
 &+ l_{l_5} * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + h_6 * (\sin\beta)^2)^{(1/2)})) - \arccos((h_1 + h_2 - h_{l_3} + z_0 + l_{l_5} * (1 - \\
 &- (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + h_6 * \sin\beta) / ((l_{l_1} + h_6 * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + y_0 / ((\sin\alpha^2)^{(1/2)} + \\
 &+ x_0 * \cos\alpha - l_{l_5} * \sin\beta - (y_0 * (\cos\alpha)^2) / ((\sin\alpha^2)^{(1/2)})^2 + (h_1 + h_2 - h_{l_3} + z_0 + \\
 &+ l_{l_5} * (1 - \sin\beta)^2)^{(1/2)} + h_6 * (\sin\beta)^2)^{(1/2)}));
 \end{aligned}$$

(24.1)

$$\begin{aligned}
 q_{r4} = & 2 * pi - arcsin((h_1 + h_2 - h_{r3} + z_0 - l_{r5} * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} - h_{r5} * \sin(arcsin(((l_{r1} - \\
 & - h_6 * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} - y_0 / ((\sin\alpha)^2)^{(1/2)} + x_0 * \cos\alpha - l_{r5} * \sin\beta + \\
 & + (y_0 * (\cos\alpha)^2) / ((\sin\alpha)^2)^{(1/2)})^2 + (h_1 + h_2 - h_{r3} + z_0 - l_{r5} * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + \\
 & + h_6 * \sin\beta)^2 - h_{r4}^2 + h_{r5}^2) / (2 * h_{r5} * ((l_{r1} - h_6 * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} - y_0 / ((\sin\alpha)^2)^{(1/2)} + \\
 & + x_0 * \cos\alpha - l_{r5} * \sin\beta + (y_0 * (\cos\alpha)^2) / ((\sin\alpha)^2)^{(1/2)})^2 + (h_1 + h_2 - h_{r3} + z_0 - l_{r5} * (1 - \\
 & - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + h_6 * \sin\beta)^2)^{(1/2)}) - arccos((h_1 + h_2 - h_{r3} + z_0 - l_{r5} * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + \\
 & + h_6 * \sin\beta) / ((l_{r1} - h_6 * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} - y_0 / ((\sin\alpha)^2)^{(1/2)} + x_0 * \cos\alpha - l_{r5} * \sin\beta + \\
 & + (y_0 * (\cos\alpha)^2) / ((\sin\alpha)^2)^{(1/2)})^2 + (h_1 + h_2 - h_{r3} + z_0 - l_{r5} * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + \\
 & + h_6 * \sin\beta)^2)^{(1/2)}) + h_6 * \sin\beta / h_{r4}) - arcsin(((l_{r1} - h_6 * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} - \\
 & - y_0 / ((\sin\alpha)^2)^{(1/2)} + x_0 * \cos\alpha - l_{r5} * \sin\beta + (y_0 * (\cos\alpha)^2) / ((\sin\alpha)^2)^{(1/2)})^2 + (h_1 + h_2 - \\
 & - h_{r3} + z_0 - l_{r5} * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + h_6 * \sin\beta)^2 - h_{r4}^2 + h_{r5}^2) / (2 * h_{r5} * ((l_{r1} - h_6 * (1 - \\
 & - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} - y_0 / ((\sin\alpha)^2)^{(1/2)} + x_0 * \cos\alpha - l_{r5} * \sin\beta + \\
 & + (y_0 * (\cos\alpha)^2) / ((\sin\alpha)^2)^{(1/2)})^2 + (h_1 + h_2 - h_{r3} + z_0 - l_{r5} * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + \\
 & + h_6 * \sin\beta)^2)^{(1/2)}) + arccos((h_1 + h_2 - h_{r3} + z_0 - l_{r5} * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + \\
 & + h_6 * \sin\beta) / ((l_{r1} - h_6 * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} - y_0 / ((\sin\alpha)^2)^{(1/2)} + x_0 * \cos\alpha - l_{r5} * \sin\beta + \\
 & + (y_0 * (\cos\alpha)^2) / ((\sin\alpha)^2)^{(1/2)})^2 + (h_1 + h_2 - h_{r3} + z_0 - l_{r5} * (1 - (\sin\beta)^2)^{(1/2)} + \\
 & + h_6 * \sin\beta)^2)^{(1/2)}).
 \end{aligned}
 \tag{24.2}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon = & \frac{|15 - 14,9998| + |77,72 - 77,7247| + |139,37 - 139,352| + |145,61 - 145,6218|}{4} = \\
 = & 0,008675^\circ \approx 0,87\%.
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

- 5.2) К звену 2: формула 12.
- 5.3) К звену 3l: формула 13.
- 5.4) К звену 3r: формула 14.
- 5.5) К звену 4l: формула 15.
- 5.6) К звену 4r: формула 16.
- 5.7) К звену 5 (слева): формула 17.
- 5.8) К звену 5 (справа): формула 18.
- 5.9) К концу исполнительного инструмента (слева): формула 19,  
 где  $q_l = q_{l3} + q_{l4} + q_{l5}$ .
- 5.10) К концу исполнительного инструмента (справа): формула 20,  
 где  $q_r = q_{r3} + q_{r4} + q_{r5}$ .

6. Таким образом, матрица, описывающая решение прямой задачи кинематики, имеет вид (результаты расчёта, полученные в среде Matlab): формула 21

$$T = T_2^{-1} \times T_6.$$

7. В соответствии с общим видом матриц данного типа (формула 21) находим значения координат Эйлера (результаты расчёта, полученные в среде Matlab): формула 22.

8. В результате решения системы уравнений получили выражения, описывающие переход из пространства обобщённых координат в пространство координат Эйлера: формулы 23.

9. Подставим в полученные выражения значения обобщённых координат, взятые с трёхмерной модели:  $q_{l4} = 139,37^\circ$ ;  $q_2 = 15^\circ$ ;  $q_{l3} = 77,72^\circ$ ;  $q_{r4} = 139,37^\circ$ ;  $q_{l5} = 145,61^\circ$ . Получим значения

$$\begin{aligned}
 \text{координат Эйлера: } & x = 0,1077\text{м}; & y = 0,0155\text{м}; \\
 & z = 0,1465\text{м}; & \alpha = 75^\circ; \beta = 87,3^\circ; \gamma = 0^\circ.
 \end{aligned}$$

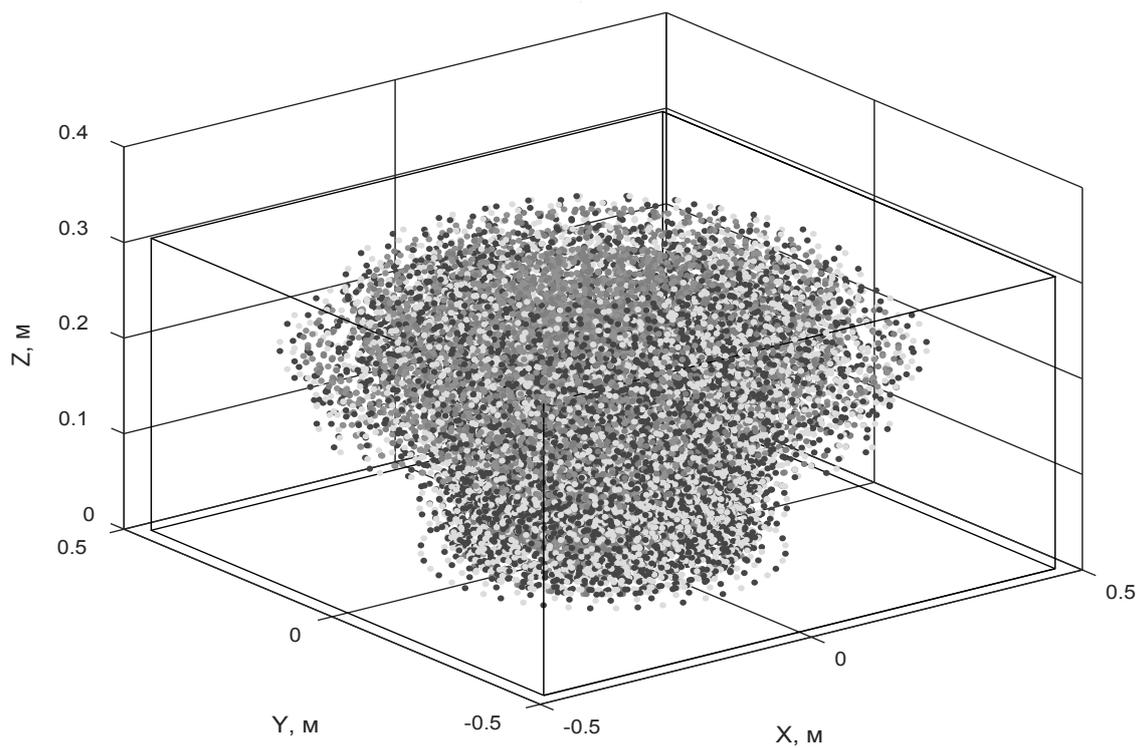


Рис. 5. Рабочая зона механизма

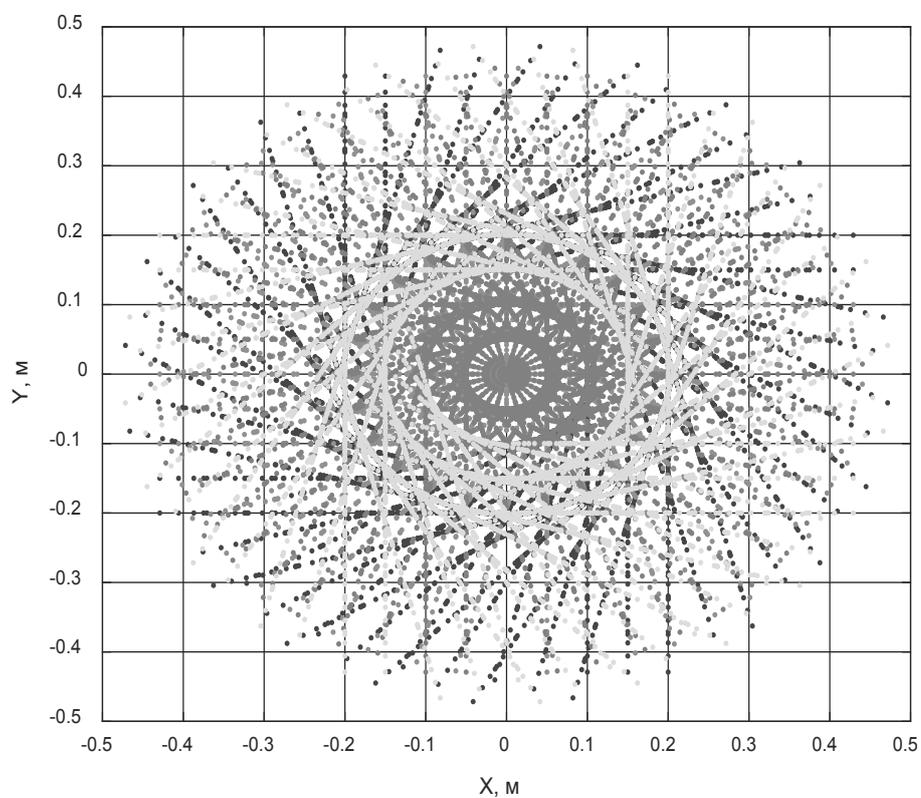


Рис. 6. Проекция рабочей зоны механизма на плоскость OXY

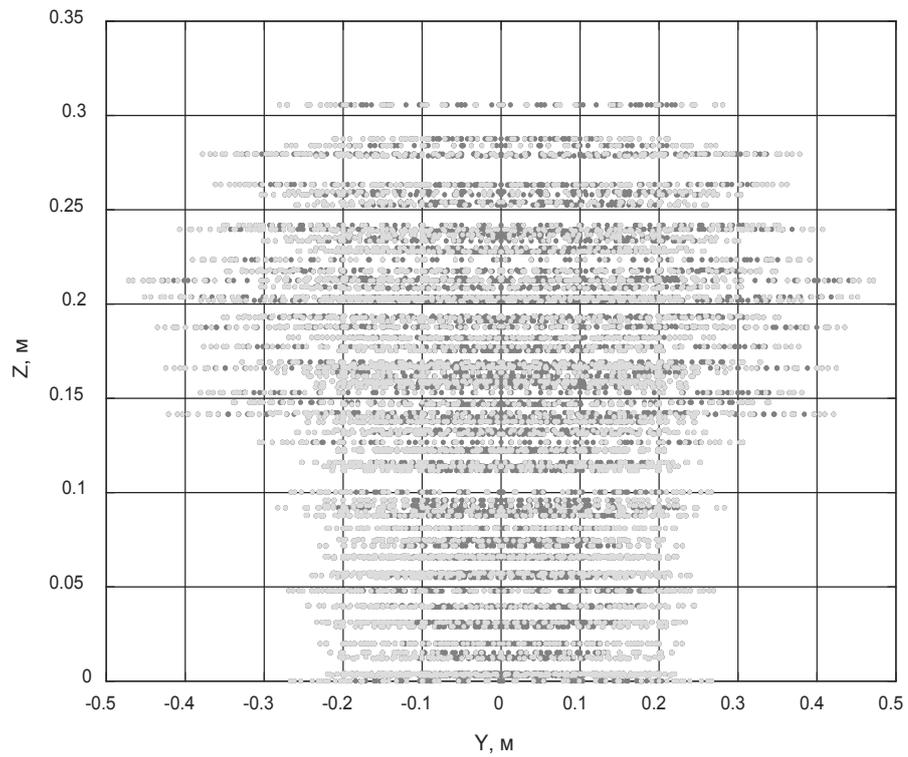


Рис. 7. Проекция рабочей зоны механизма на плоскость OXZ

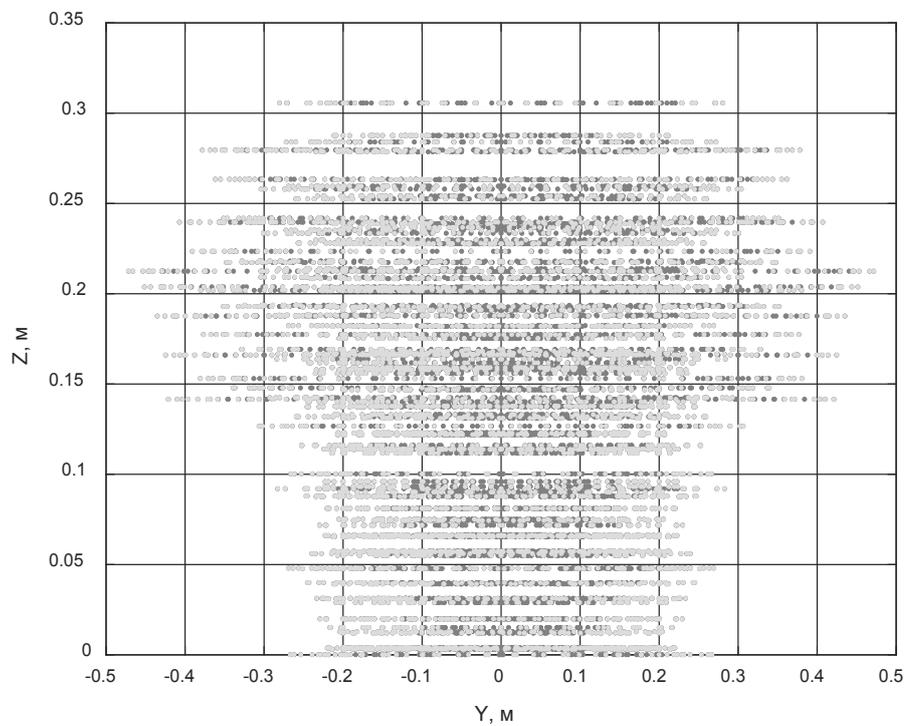


Рис. 8. Проекция рабочей зоны механизма на плоскость OYZ

10. Сравним полученные декартовы координаты со значениями, измеренными в среде SolidWorks (рисунок 4.): они равны  $x = 0,10768m$ ;  $y = 0,01551m$ ;  $z = 0,14651m$ , то есть значения с модели соответствуют вычисленным. Полученные результаты свидетельствуют о том, что прямая задача кинематики решена верно.

Решение обратной задачи кинематики

1. Решение обратной задачи кинематики сводится к решению системы:

$$\begin{cases} x_0 = T(1, 4); \\ y_0 = T(2, 4); \\ \alpha = \arccos\left(\frac{T(1, 3)}{\cos \beta}\right); \\ z_0 = T(3, 4); \\ \beta = \arcsin(-T(3, 3)). \end{cases}$$

2. В результате решения системы уравнений получили выражения, описывающие переход из про-

странства координат Эйлера в пространство приводных обобщённых координат: формулы 24.

3. Подставим в полученные выражения значения координат Эйлера, найденные в предыдущем пункте, и получим значения обобщённых координат:  $q_1 = -0,1m$ ;  $q_2 = 14,9998^\circ$ ;  $q_{13} = 77,7247^\circ$ ;  $q_{14} = 139,352^\circ$ ;  $q_{15} = 145,6218^\circ$ ;  $q_{r3} = 106,6422^\circ$ ;  $q_{r4} = 213,2002^\circ$ ;  $q_{r5} = 222,856^\circ$ . Посчитаем погрешность вычислений (проведём верификацию): формула 25.

Она составила 0,87%, т.е. координаты, полученные в прямой и обратной задачах, можно считать совпадающими с реальными.

Построение рабочей области

На основании полученного решения прямой задачи о положении подставим все возможные наборы обобщенных координат и получим все возможные положения выходного звена механизма (код для расчёта в среде Matlab) Результат вычисления рабочей зоны механизма представлен на рисунках 5–8.

ЛИТЕРАТУРА

1. Царева Г.Р. Выпускная квалификационная работа: учебно-методическое пособие / Г.Р. Царева, В.Б. Елагина; Поволжский государственный технологический университет. — Йошкар-Ола: ПГТУ, 2018. — 100 с.: ил. — Библиогр.: с. 82. — ISBN978–5–8158–1984–9; То же [Электронный ресурс]. — URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=494054> (14.05.2019).
2. Леонова О.В. Выпускная квалификационная работа: методические рекомендации. — Федеральное агентство морского и речного транспорта, Московская государственная академия водного транспорта. — Москва: Альтаир: МГАВТ, 2016. — 32 с.: табл.; То же [Электронный ресурс]. — URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=483853> (14.05.2019).
3. Вылегжанина А.О. Разработка проекта: учебное пособие / А.О. Вылегжанина. — Москва; Берлин: Директ-Медиа, 2015. — 291 с.: ил., схем., табл. — Библиогр. в кн. — ISBN978–5–4475–3936–8; То же [Электронный ресурс]. — URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=275277> (14.05.2019).
4. Лапиков А.Л., Масюк В.М. Специальные системы координат промышленных роботов. Метод Денавита-Хартенберга: Методические указания для выполнения домашнего задания по дисциплине «Кинематическое моделирование мехатронных и робототехнических систем». — Калуга: Издательство КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. — 30 с.

© Орехов Сергей Юрьевич ( [serg31057@mail.ru](mailto:serg31057@mail.ru) ), Скадин Артём Владимирович ( [a.skadin@mail.ru](mailto:a.skadin@mail.ru) ),  
Сахаров Владимир Валентинович ( [vlad.saharov2011@yandex.ru](mailto:vlad.saharov2011@yandex.ru) ), Глебов Сергей Александрович ( [saglebov@bmstu.ru](mailto:saglebov@bmstu.ru) ),  
Просвернин Андрей Андреевич ( [aprosvernin@mail.ru](mailto:aprosvernin@mail.ru) ).  
Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»