DOI **10.37882/2223–2974.2023.03.09**

ОЦЕНКА ВОЛАТИЛЬНОСТИ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК НА РОССИЙСКОМ ФИНАНСОВОМ РЫНКЕ

VALUATUION OF INTEREST RATES VOLATILITY IN THE RUSSIAN FINANCIAL MARKET

A. Gukovskaya

Summary. The paper discusses methods for modeling the price volatility of zero-coupon bonds and their use for forecasting market volatility. Based on the method of modeling interest rates using the one-factor Hull-White model or the generalized Vasicek model, a formula was obtained for calculating volatility, on the basis of which the interest rate model was calibrated using time series of OFZ price changes. The results obtained made it possible to make a forecast of changes in volatility for two months in advance with 95% reliability, which indicates the possibility of further using the apparatus of stochastic interest rate models for analyzing and forecasting the Russian bond market.

Keywords: volatility, term structure of interest rates, government bond market, generalized Vasicek model.

Гуковская Анастасия Алексеевна
К.э.н., доцент, Российский Государственный гуманитарный Университет (Москва)
gukovskaya.a@rggu.ru

Аннотация. В работе рассматриваются методы моделирования волатильности цен бескупонных облигаций и их использование для прогноза рыночной волатильности. На основе метода моделирования процентных ставок с использованием однофакторной модели Халла-Уайта или обобщенной модели Васичека была получена формула для вычисления волатильности, на основе которой была осуществлена калибровка модели процентных ставок с помощью временных рядов изменения цены ОФЗ. Полученные результаты позволили сделать прогноз изменения волатильности на два месяца вперед с 95% надежностью, что свидетельствует о возможности дальнейшего использования аппарата стохастических моделей процентных ставок для анализа и прогнозирования российского рынка облигаций.

Ключевые слова: волатильность, временная структура процентных ставок, рынок государственных облигаций, обобщенная модель Васичека.

Введение

Изучение и моделирование волатильности стало важной областью исследований в прикладных финансах по целому ряду причин. Волатильность широко используется в качестве простого параметра риска во многих моделях оценки стоимости активов. Динамика волатильности рынка является опережающим индикатором и может быть использована как мера эффективности рынка [1, 2]. Наконец, волатильность имеет широкий спектр применений: от ценообразования экзотических деривативов до моделей ценообразования активов [3] и имеет решающее значение для ценообразования опционов.

Различают четыре типа волатильности:

- волатильность как стандартное отклонение доходности активов, существует в каждый момент времени, с ней не связана никакая «временная шкала».
- историческая (реализованная) волатильность основана на эмпирических данных о ценах;
- подразумеваемая волатильность связана с эмпирическими ценами опционов;
- форвардная волатильность получена от какого-либо форвардного инструмента.

Общепринятыми и чаще всего используемыми в практике являются три метода моделирования волатильности: исторический, метод Монте-Карло или метод стохастического программирования и параметрический. В количественных финансах разработано и успешно применяется огромное количество методов оценки волатильности [4], среди которых можно выделить следующие основные группы — авторегрессионные модели скользящего среднего (ARMA), авторегрессионные гетероскедастичные модели (ARCH), модели стохастической волатильности, модели с переключением (Regime Switching), пороговые модели (Threshold model). Выбор той или иной модели для оценки волатильности обусловлен спецификой анализируемого актива, рынка, решаемой задачей.

Задача оценки и моделирования волатильности процентных ставок усложняется так как необходимо учитывать временную структуру процентных ставок и ее параметры. Оценивание параметров — один из наиболее важных этапов в моделировании временной структуры и здесь также существует несколько подходов, отличающиеся выбором данных для моделирования/анализа и методов для оценивания [5]. Выявить преимущества и недостатки тех или иных моделей и определить границы их применимости позволяют эмпирические тесты. Так, например, анализ волатильности процентных ставок на рынках Латинской Америки и Азии с помощью одномерных и двумерных моделей переключения волатильности показал их преимущество перед моделями скользящего стандартного отклонения [6]. Оценка волатильности процентных ставок на денежном рынке еврозоны с помощью показателя подразумеваемой мгновенной волатильности консольной облигации, которая оценивалась по кривой свопов EONIA показала хорошие результаты и позволяет отслеживать историческую волатильность, при этом почти полностью устраняет избыток эксцесса и кластеризации волатильности, приближая их к обычному гауссовскому белому шуму [7].

В управлении долгом распространено использование современных теорий временных структур, основанных на фундаментальных работах Васичека [8, 9] и Кокса, Ингерсолла и Росса [10, 11]. Эти модели успешно использовались для анализа структуры государственного долга по срокам погашения[1].

Материалы и методы

В качестве базовой модели для оценки волатильности процентных ставок выбрана модель Дж. Халла и А. Уайта или обобщенная модель Васичека [12, 13]. В этой модели процентные ставки рассматриваются как нормально распределенные и используются мгновенные краткосрочные ставки[2], т.е. параметры модели не являются константами в отличие от классической модели Васичека. Эта модель подходит для случаев, когда есть некоторая функция $x = f(r)$ краткосрочной ставки r, которая следует арифметическому процессу с возвращением к среднему [14] .

В общем случае модели Халла — Уайта функция краткосрочных ставок подчиняется гауссовому распределению. Если считать, что случайным фактором является не краткосрочная ставка, а какой-либо другой параметр, модель всегда может быть преобразована таким образом, что единственным случайным фактором будет являться именно краткосрочная ставка. Динамика краткосрочной ставки в модели Халла — Уайта может быть представлена как:

$$dr(t) = (\theta(t) - \alpha(t) + \sigma(t)dW(t)), \alpha(t) > 0$$

$\theta(t)$ — определяет изменение во времени долгосрочного уровня мгновенной ставки;

$\alpha(t)$ — определяет изменение скорости корректировки ставки;

$\sigma(t)$ — изменение во времени волатильности процесса;

$W(t)$ — стандартный винеровский процесс.

В практических приложениях часто используется частный случай модели Халла- Уайта, когда параметры $\alpha(t)=\alpha$ и $\sigma(t)$ =σ являются константами. Наиболее важным преимуществом модели Халла- Уайта по сравнению с классической моделью Васичека является возможность точного отображения фактических рыночных цен (рыночной структуры процентных ставок во времени). Это достигается за счет подбора соответствующей функции $\theta(t)$. В нашей работе наоборот $\theta(t)=\gamma$, то есть является постоянной величиной, а $\alpha(t)$ и $\sigma(t)$ функции времени. В оценку волатильности процентных ставок параметр γ не входит, он входит только в оценку изменения во времени долгосрочного уровня мгновенной ставки. Поэтому для оценки волатильности процентных ставок, необходимо будет произвести оценку параметров $\alpha(t)$ и $\sigma(t)$ за один месяц и за весь период наблюдения по классической модели Васичека, аппроксимировав их временными функциями, вычислить изменения во времени волатильности процентных ставок.

На основании временного ряда значений мгновенной процентной ставки могут быть оценены параметры α, γ и ρ классической модели Васичека. Для этого можно использовать дискретный (с шагом Δt) вариант процесса:

$$d(r + \Delta t) - r(t) = \alpha(\gamma - r(t))\Delta t + \varepsilon(t)\rho\sqrt{\Delta(t)} \quad (1)$$

где $\varepsilon(t)$ -нормально распределенные случайные величины с нулевым средним и дисперсией равной единице.

Дифференциал от стандартного винеровского процесса $dW(t)$ можно записать как: $dW(t) = \vartheta(t)dt$, где $\vartheta(t)$ белый шум. Тогда уравнение Васичека примет вид:

$$dr(t) = \alpha(t)\big(\gamma - r(t)\big)dt + \rho(t)\vartheta(t)dt$$

или

$$dr(t)\Big/_{dt} = \alpha(t)\big(\gamma - r(t)\big)dt + \rho(t)\vartheta(t) \quad (2)$$

1 См. например Danish government borrowing and debt 2001. pp 105–121 available at https://www.nationalbanken.dk/en/publications/Documents/2002/02/dgbd-2001.pdf (Accessed 12 Dec 2022)

2 В других моделях возможно использование других ставок — в Хита-Джарроу-Мортона (HJM) — мгновенной форвардной ставки, в модели Brace Gatarek Musiela (BGM) — наблюдаемых ставок.

Таблица 1. Результаты расчётов параметров модели

Период	α скорость возвращения к среднему	Среднее значение цены%	M^2	M^2 расч
1/12	0,78085	98,97685	3,26385E-06	3,2639E-06
2/12	0,59572	97,68735	7,53393E-06	4,6969E-05
3/12	0,09455	95,6353	1,34493E-05	1,9741E-04
4/12	0,25189	94,5127	1,23E-05	3,1105E-04
5/12	0,54194	94,85635	1,26E-06	3,0365E-04
6/12	0,52333	94,5612	8,12E-06	2,9803E-04
7/12	0,36580	94,6666	1,76867E-06	2,7875E-04

Записав обобщенное уравнение Васичека таким образом, мы не будем определять стоимость дисконтной облигации, а будем искать распределение условной плотности вероятности мгновенной процентной ставки $r(t)$ во времени. Зная плотность вероятности мгновенной процентной ставки, можно вычислить ее математическое ожидание и волатильность.

Для того, чтобы получить выражение для условной плотности вероятности мгновенной процентной ставки $r(t)$, описываемой уравнением (2), необходимо решить систему дифференциальных уравнений, что даст условную плотность вероятности следующего вида:

$$W(t_0, r_0, r) = {}^{1}\Big/_{\sqrt{(2\pi)\sigma}}\, e^{[-{}^{(r-M(r))^2}/_{2\pi\sigma^2}]} \quad (3),$$

где: $\sigma = \sigma(t_0, \tau)$, $M(r)$ — математическое ожидание мгновенной процентной ставки:

$$M(r) = (r_0 - \gamma)({}^{y}/_{x})\beta + \gamma \quad (3.1),$$

где: $r_0 = r(0)$ — начальное значение мгновенной процентной ставки;

γ — среднее значение мгновенной процентной ставки модели Васичека;

t_0 — начальное время отсчета;

τ — текущее время мгновенной процентной ставки;

$$y = \alpha t_0 + 1;\ x = \alpha\tau + 1;\beta = {}^{\alpha}/_{a}$$

Волатильность мгновенной процентной ставки будет определяться как:

$$\sigma^2(t_0, \tau) = \left({}^{\rho_0^2}/_{4\alpha}\right) P(t_0, \tau) \quad (4),$$ где

$$P(t_0, \tau) =$$

$$= 2\beta\{k[x^2 - ({}^{y}/_{x})^2\beta + 2] - c[x - ({}^{y}/_{x})^2\beta + 1)]\}$$

$k = {}^{1}/_{2(\alpha + a)}$ и $c = {}^{1}/_{(2\alpha + a)}$

Накопленная волатильность за период времени T при $t_0 = 0$, вычисляется по формуле:

$$\sigma^2(0, T) = {}^{1}/_{T} \int_0^T \sigma^2\,(t_0, \tau)d\tau$$

$$\sigma^2(0, T) = \left({}^{\rho_0^2}/_{4\alpha}\right) Q(0, T) \quad (5).$$

Результаты

Методом простого случайного бесповторного отбора из генеральной совокупности данных о котировках ОФЗ с датами погашения с 2019 г. по 2034 г, торгуемых на площадке Мосбиржи была выбрана ОФЗ SU26209RMF-S5 с началом торгов 01.08.2012 г. и датой погашения 20.07.2022 г, таким же образом был выбран временной период с 14.05.2018 г. по 26.04.2019 г. Далее этот временной период был разделен на 11 месяцев по 20 рабочих дней. Так как для анализа необходимо использовать бескупонные облигации, из ежедневных котировок облигаций необходимо удалить стоимости купонов (стоимость купона для данной облигации составляет 3,79% от номинала).

Для оценки волатильности процентных ставок произведена оценка параметров α *(t)* и σ *(t)* за один месяц и за весь период наблюдения (табл. 1, рис.1 и 2). Аппроксимировав их временными функциями, вычислены изменения во времени волатильности процентных ставок по формуле (4). Далее оценивается волатильность по описанной модели (5), и осуществляется проверка ее адекватности сравнением с волатильностью, рассчитанной методом исторического моделирования по выборке эволюции цены облигации ОФЗ.

По результатам расчетов волатильности историческим способом за 7 месяцев была откалибрована математическая модель и проведено прогнозирова-

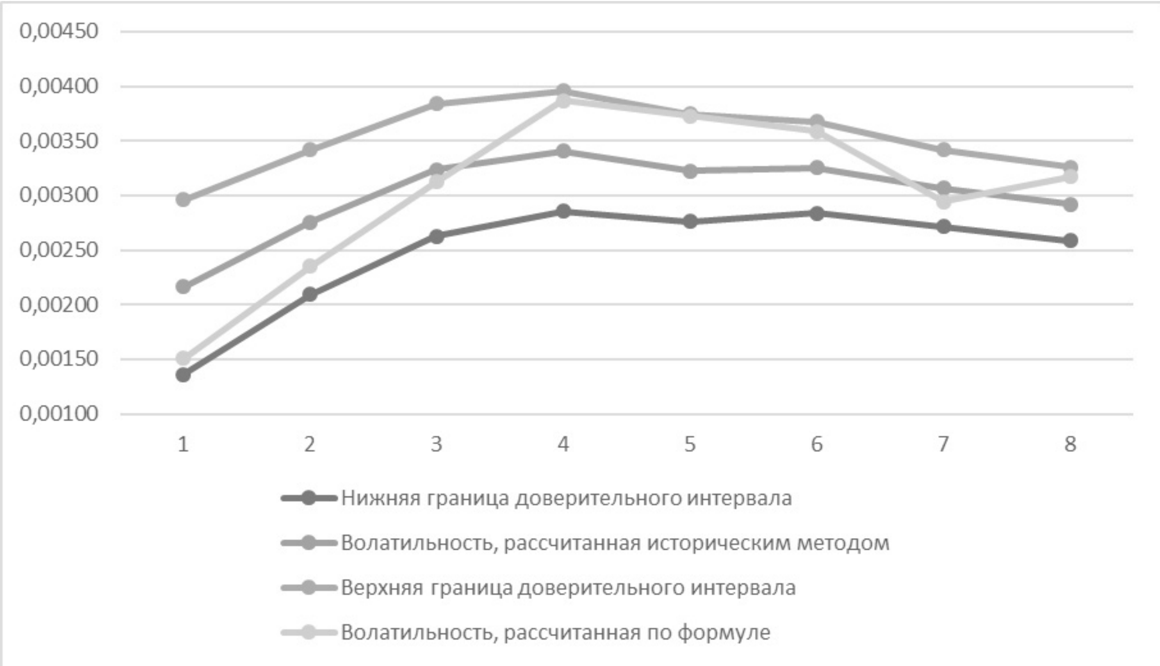

Рис. 1. Историческая и спрогнозированная волатильность за 8 месяцев

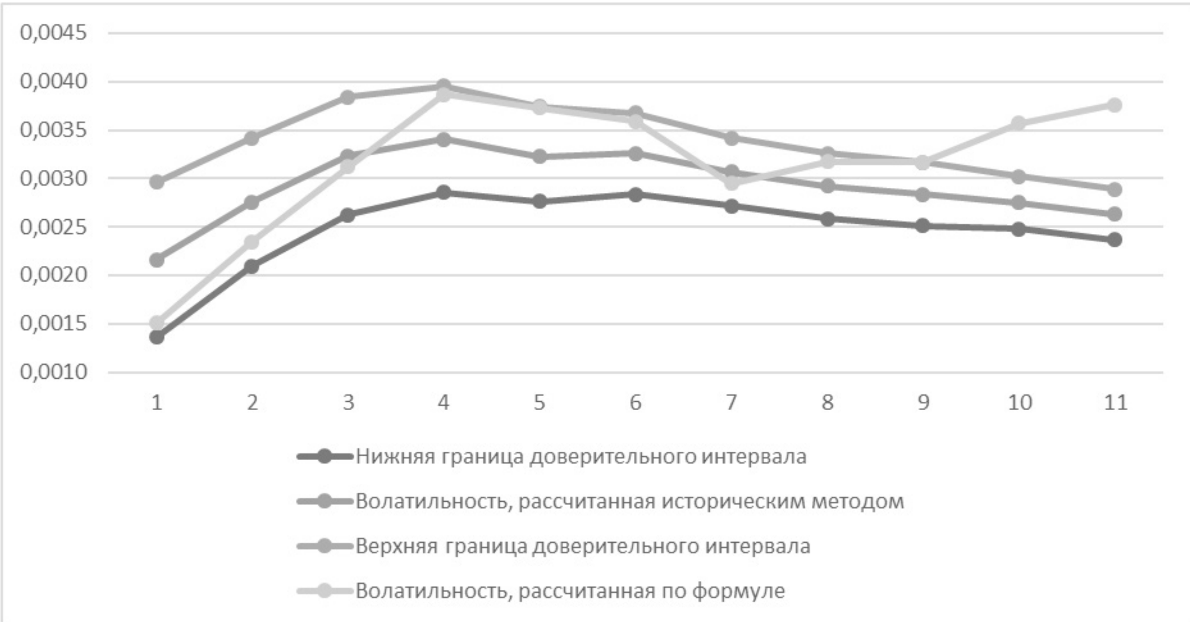

Рис. 2. Прогноз волатильности в доверительном 95% интервале за 10 и 11 месяцев

ние по выведенной формуле (5) на один месяц вперед (сделан расчет на восьмой месяц) уже без калибровки данной модели и проведен расчёт волатильности историческим способом за 8 месяцев. Изменения волатильности, построенной историческим способом и волатильности, вычисленной по формуле в пределах доверительного интервала с надежностью γ = 0,95 на один месяц вперед (восьмой месяц) по откалиброванной модель процентной ставки за предыдущие 7 месяцев (рис. 1) демонстрируют надежность модели.

Таким же образом была рассчитана волатильность на 9-й месяц (прогноз на два месяца вперед) с такими же результатами. Для прогноза волатильности на 10-й и 11-й месяцы (рис. 2) результаты хуже — волатильность, рассчитанная по модели после 9-го месяца, выходит за пределы 95% доверительного интервала. И эта тенденция только усиливается. Это можно объяснить тем, что за последующие 2 месяца (10-й и 11-й месяцы) корреляционные связи между ценами облигаций сильно ослабели и волатильность, рассчитанная по формуле и волатильность, рассчитанная историческим методом стали вести себя независимо. Поэтому, после месяца, когда наступает рассогласование (в нашем случае после 9-го месяца) необходимо сделать новую калибровку модели. Например, с 7-го месяца и по 11-й. Однако вопрос, по какому количеству месяцев делать новую калибровку, требует дополнительной проработки.

Полученные результаты позволяют сделать прогноз изменения волатильности на два месяца вперед с 95% надежностью, что в целом свидетельствует о надежности предложенной оптимизации усовершенствованной модели Васичека для анализа волатильности процентных ставок по данным о ценах государственных облигаций на российском рынке.

Заключение

Выведенное выражение для оценки волатильности в рамках модели Халла — Уайта / обобщенной модели Васичека позволило провести эмпирический тест, в результате которого была решена задача оценки волатильности процентных ставок на основе цен облигаций, торгуемых на российском рынке. Данные расчетов по предложенной формуле показали, что, используя анализ предыдущей волатильности можно дать оценку будущей волатильности процентных ставок на 2 месяца вперед с надежностью $\gamma = 0{,}95$. Более глубокие прогнозы требуют дополнительной калибровки модели.

Проведенное исследование позволяет сделать заключение о возможности дальнейшего использования аппарата стохастических моделей для анализа и прогнозирования российского рынка облигаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schiller, R.J. The Uses of Volatility Measures in Assessing Market Efficiency // Journal of Finance. 36 (2). 1981. pp. 291–304.
2. Shiller, R.J. Market Volatility // MIT Press. 1989
3. Rebonato, R. Volatility and Correlation: The Perfect Hedger and the Fox / Wiley & Sons. 2004. Chichester, UK
4. Knight J. and Satchell S. (ed) Forecasting volatility in the financial markets / Butterworth-Heinemann Finance. 2-nd ed. 2002
5. Лукасевич, И.Я., Моделирование временной структуры процентных ставок // Экономика и управление. № 1. 2016. с.43–51
6. Edwards, S., and Raul, S. Interest-Rate Volatility in Emerging Markets // The Review of Economics and Statistics. vol. 85. no. 2. 2003. pp. 328–48.
7. Brousseau V. and Durré A. Interest rate volatility. A consol rate-based measure European Central Bank. Working Paper Series 2013. No 1505
8. Vasicek O.A., Oldrich An Equilibrium Characterization of the Term Structure // Journal of Financial Economics. no. 5. 1977. pp. 177–188.
9. Vasicek O.A. and Fong H.G. Term Structure Modelling Using Exponential Splines // Journal of Finance. no. 37. 1982. pp. 339–356
10. Cox J., Ingersoll J., and Ross S. A Re-examination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates // The Journal of Finance. Vol. 36. No. 4. 1981. pp. 769–799.
11. Cox J., Ingersoll J., and Ross St. A Theory of the Term Structure of Interest Rates // Econometrica. Vol. 53. no. 2. 1985. pp. 385–407.
12. Hull J., White A. Prising Interest rate derivatives securities // Review of Financial Studies. vol.3. no. 4. 1990.pp. 573–592.
13. Hull J. and White A. The General Hull-White Model and Super Calibration // Financial Analysts Journal. November/December 2011. pp. 34–43.

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»