

О СТРОГИХ И ПРАВДОПОДОБНЫХ РАССУЖДЕНИЯХ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ВЕКТОРОВ И МАТРИЦ В ВУЗОВСКОЙ МАТЕМАТИКЕ

ON RIGOROUS AND PLAUSIBLE REASONING IN THE STUDY OF VECTORS AND MATRICES IN UNIVERSITY MATHEMATICS

R. Fokin
E. Ershova

Summary: The article considers, firstly, the author's classification of reasonings used in mathematics. These reasonings are divided by the authors into rigorous (both in the sense of Euclid and Aristotle, and in the sense of Hilbert) and plausible (in the sense of Poya). Secondly, the article examines the main problems of studying mathematics by modern students. The first problem is related to the departure of modern higher education from the academic teaching style that had developed by the beginning of the 20th century. The second problem is related to a significant increase in the proportion of right-brainers among students of all professional fields over the past 30–40 years. Thirdly, various mathematical definitions of the terms «vector» and «matrix» are considered, and the innovations in the style of studying mathematics proposed in the article are described using the example of studying vectors and matrices. The teacher is offered methods for organizing two channels of perception of mathematical educational material: for right-hemisphere and for left-hemisphere students.

Keywords: mathematics, vector, matrix, learning style, problems, students, right hemisphere, left hemisphere, plausible reasoning.

Фокин Роман Романович

доктор педагогических наук, доцент, Федеральное Государственное Бюджетное Военное Образовательное Учреждение Высшего Образования «Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского», (г. Санкт-Петербург)
rrfokin@yandex.ru

Ершова Елена Викторовна

Преподаватель, Федеральное Государственное Бюджетное Военное Образовательное Учреждение Высшего Образования «Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского», (г. Санкт-Петербург)
vka@mail.ru

Аннотация: Статья рассматривает, во-первых, авторскую классификацию рассуждений, применяемых в математике. Эти рассуждения подразделяются авторами на строгие (как в смысле Евклида и Аристотеля, так и в смысле Гильберта) и правдоподобные (в смысле Пойа). Во-вторых, статья рассматривает основные проблемы изучения математики современными студентами. Первая проблема связана с отходом современной высшей школы от академического стиля преподавания, сложившегося к началу 20 века. Вторая проблема связана со значительным увеличением за последние 30–40 лет доли правополушарных среди студентов всех профессиональных направлений. В-третьих, рассматриваются различные математические определения терминов «вектор» и «матрица», описываются предлагаемые в статье инновации стиля изучения математики на примере изучения векторов и матриц. Преподавателю предлагаются методы организации двух каналов восприятия математического учебного материала: для правополушарных и для левополушарных студентов.

Ключевые слова: математика, вектор, матрица, стиль изучения, проблемы, студенты, правополушарные, левополушарные, правдоподобные рассуждения.

Введение в проблематику исследования

Актуальность статьи объясняется тем, что сложившийся приблизительно за последние 70–80 лет стиль изучения вузовской математики в настоящее время дает малоудовлетворительные результаты.

Цель исследования: Предложить некоторые инновации стиля изучения математики на примере изучения векторов и матриц.

Ставятся **задачи:** 1) разработать авторскую классификацию рассуждений, применяемых в математике; 2) изучить основные проблемы изучения математики современными студентами; 3) изучить сущность терминов «вектор» и «матрица» и разработать некоторые инновации стиля изучения математики на примере изучения векторов и матриц.

1. О рассуждениях в смысле Евклида и Аристотеля, в смысле Гильберта, о правдоподобных рассуждениях в смысле Пойа

Под рассуждением мы будем понимать конечную последовательность высказываний $V_1, V_2, \dots, V_n$, где предыдущие высказывания $V_1, \dots, V_k$ при $k < n$ обосновывают каждое последующее высказывание V_{k+1} .

С древних времен по настоящее время основой математики является [1, 2] аксиоматический метод Евклида. Вот пример простейшей Евклидо-подобной системы аксиом:

- 1 – натуральное число (1)
- n – натуральное $\Rightarrow (n+1)$ – натуральное (2)
- натуральное n является простым $\Leftrightarrow n$ делится только на 1 и на n (3)
- натуральное число является или простым, или составным (4)

натуральное n является четным $\Leftrightarrow n$ делится на 2 (5)
натуральное число является или четным, или
нечетным (6)

Комментарии: Аксиомы (1)-(6) неявно определяют понятия: (1) и (2) - натурального числа; (3) и (4) - простого и составного чисел; (5) и (6) - четного и нечетного чисел. Здесь и ниже считается известным смысл иных используемых понятий: «сложение» (+), «равенство» (=), «больше» (>), « m делится на n » и других. Система аксиом (1)-(6) – это по смыслу часть [1, 2] системы аксиом и постулатов Евклида, поскольку последняя охватывает все математические понятия тех времен. У историков математики нет общего мнения о том, чем у Евклида постулат отличается от аксиомы.

Теорема 1: 2, 3 - натуральные числа. Доказательство: (1) $\Rightarrow 1$ – натуральное и (2) $\Rightarrow 1 + 1 = 2$ – натуральное и (2) $\Rightarrow 2 + 1 = 3$ – натуральное.

Следствие: аналогично 4, 5, ... – тоже натуральные, поэтому 1, 2, 3, 4, 5, ... – натуральные.

Теорема 2: 1, 2, 3 - простые, 4 - составное. Доказательство: Следствие теоремы 1 $\Rightarrow 1, 2, 3, 4$ – натуральные; 4 делится на 2 и (3) $\Rightarrow 4$ не является простым и (4) $\Rightarrow 4$ – составное; 3 делится только на 3 и на 1 и (3) $\Rightarrow 3$ – простое; аналогично 1, 2 – простые.

Теорема 3: n – простое и $n > 2 \Rightarrow n$ – нечетное. Доказательство: Предположим, что n – четное и (5) $\Rightarrow n$ делится на 2 и n – простое число, и (3) $\Rightarrow n = 2$, но по условиям этой теоремы $n > 2$. Предположение, что n – четное привело к противоречию и (6) $\Rightarrow n$ – нечетное.

Теоремы 1–3 и их доказательства являются простейшим примером Евклидо-подобных рассуждений. Таковы почти все современные математические рассуждения. Выше можно видеть, что такие рассуждения имеют дело именно со смыслами высказываний и понятий внутри них.

Во введении многих учебников математики можно прочесть, что в основе современной математики лежит понятие [3] формальной аксиоматической теории (ФАТ). ФАТ – это тройка: алфавит (множество иероглифов); аксиоматика (множество последовательностей иероглифов); логика (формальные правила вывода из одних последовательностей иероглифов других). Направление, допускающее в математику, только ФАТ называется формализмом, оно основано Д. Гильбертом. Он [3] писал, что иероглифы и их последовательности в составе ФАТ смысла лишены и допускают любую интерпретацию, например термин «прямая» может быть интерпретирован как пивная кружка. По мнению авторов [4], Д. Гильберту без сомнения удалось описать как ФАТ только арифметику. Например, при описании геометрии [5], у него получилась фактически Евклидо-подобная си-

стема аксиом, в рамках которой термин «прямая» вовсе не может быть интерпретирован как пивная кружка, а теоремы выводятся фактически посредством Евклидо-подобных рассуждений. В современной математике есть и иное направление – интуиционизм, фактически и лежащее в основе современной математики. Его развивали Л.-Э. Брауэр, Б.-А. Рассел, А. Гейтинг, А. Тарский, А.Н. Колмогоров и другие. Почему-то о нем в учебниках обычно не упоминается.

Заметим, что формалисты без сомнения заложили реальные основы современной КОМПЬЮТЕРНОЙ математики. Современная компьютерная программа именно манипулирует иероглифами по формальным правилам, их смысл она понять не способна. Ее теоретическая модель – это программа для машины Тьюринга. А последняя – это частный случай ФАТ. Современная математика почти полностью развивается за счет интеллектуальных усилий людей, а не компьютерных программ, причем прогресс искусственного интеллекта (ИИ) в последние годы, в частности, есть результат [6] существенного снижения требований к тому, что ИИ называть.

$A \vee \neg A$	(7)
$A \& \neg A$	(8)

Приведенные выше аксиомы (1)-(6) обслуживают исключительно узкую тематику. Древнегреческий мыслитель Аристотель попытался сформулировать общие правила логических рассуждений, независимо от их тематики. Как и Евклид он тоже имел в виду манипулирование смыслами понятий. У него было только одно правило, которое возможно математически точно описать — это правило (7) – A или не A , где A – некоторое высказывание. Это правило носит название закона исключенного третьего. Пусть A означает, что в данное время и в данном месте идет дождь. То, что там и тогда дождь идет или не идет – это обязательно истинное высказывание, причем исключено что-то третье.

Закон исключенного третьего считается общепринятым, хотя есть основания и в нем сомневаться. В математике существуют парадоксы (Рассела, Хаусдорфа, Банаха-Тарского и другие), где без логических ошибок приходят к противоречию (8) – A и не A . Чтобы с очередным парадоксом «справиться» приводящее к нему рассуждение далее использовать запрещают.

В конце доказательства теоремы 3 мы неявно использовали (7) в наших рассуждениях. Другие правила логики Аристотеля (например, закон достаточных оснований) математически точно описать невозможно. Следовательно, в общем случае не существует математического метода точного определения достаточности оснований или их недостаточности. Правила Аристотеля – суть гуманитарной научной дисциплины «Логика», которая не

тождественна математической дисциплине «Математическая логика». Последняя развивается на описанной выше формалистической основе.

Понятие правдоподобного рассуждения [7] ввел Д. Пойа. Это антипод строгого математического рассуждения, описанного выше. Но иногда оно все же в чем-то близко к правде. Изобретатели, специалисты в областях техники, физики, биологии и других, да и математики [8, 9] решают проблемы и делают научные открытия в результате именно правдоподобных рассуждений. Такие рассуждения иногда помогают почувствовать решение и приблизиться к нему. Строгие математические рассуждения используются математиками-первооткрывателями только в самом конце работы над проблемой. Эти работы Д. Пойа [7, 8, 9] можно отнести к эвристике – так называется дисциплина, включающая анализ случаев нахождения нетривиальных решений проблем в различных областях и поиск закономерностей в этой деятельности.

Правдоподобные рассуждения студентов также могут служить и источниками ошибок, что подробно анализирует статья [4], где для этого используется авторское понятие псевдо-логики и дается классификация ее источников. Правдоподобные рассуждения создают психологические ощущения близости к решению проблемы. Авторы наблюдали над собой и другими – так называемая «интуиция» чаще является тем или иным неявно выраженным общественным стереотипом и ведет человека в неправильном направлении, а в правильном – очень редко. Общественные стереотипы генерируют эмоции, страсти, ведущие человека чаще в предсказуемом направлении, это не интуиция, а скорее ее антипод. Йоги и суффии, например, предлагают длительную интенсивную практику концентрации и медитации для пробуждения истинной интуиции.

2. Основные проблемы изучения математики современными студентами.

Почему результаты изучения математики студентами [4, 10, 11] стали малоудовлетворительными? Еще в середине 20 века такого не отмечалось. Укажем 2 причины. Их нельзя считать независимыми друг от друга.

1. В первой половине 20 века сложился академический стиль преподавания в вузах (математики – в частности), когда для творческой работы студента, управляемой научным руководителем (обычно доктором наук, профессором) с 1 курса отводилось время, сравнимое с отводимым на лекции. Во второй половине 20 века фактически сложился иной стиль преподавания. Очень существенно расширилась тематика обучения. Суть нового стиля преподавания – это минимизация временного ресурса для изучения конкретной темы. Лекций

стало больше, они стали читаться «скороговоркой». Стали увеличивать удельное количество студентов на 1 преподавателя. Творческая работа в основном свелась к написанию диплома на последнем курсе, причем она приобретала все более формальный характер. К научному руководству и чтению лекций стали допускать кандидатов наук, доцентов, а часто – и преподавателей без ученых степеней и званий. Далее в результате внедрения «Болонской системы» и «компетентностного подхода» будущие математики, физики, инженеры стали главным образом изучать гуманитарные дисциплины. Отводимое на математику учебное время существенно уменьшилось при сохранении той же тематики, отсюда еще сильнее выраженная «скороговорка» на лекциях. Например, на тему «Предел последовательности» в 1970 годы отводилось обычно около 20 часов, в настоящее время – 2 часа. Эта тема дает (или не дает) студенту фундаментальные основы высшей математики.

2. В 1960 годы среди будущих математиков, физиков, инженеров доля правополушарных (у них более активно правое полушарие мозга, они более приспособлены к восприятию невербальной информации) была менее 1/3, в настоящее время – более 2/3, доля левополушарных (у них более активно левое полушарие мозга, они более приспособлены к восприятию вербальной информации) стала менее 1/3, гармоничных – возросла с 1,5-2% до 5-6%. Среди студентов-гуманитариев всегда существенно преобладали правополушарные (особенно – сейчас), для них издавна сложился соответствующий стиль преподавания математики. А стиль преподавания математики для негуманитариев в настоящее время надо менять! Мы близки сейчас к тому, чтобы стиль преподавания математики стал единым для гуманитариев и негуманитариев, но это совсем не тот стиль, что сейчас считается классическим для негуманитариев. Профессор Ю.А. Пичугин [12] на основе многолетнего опыта преподавания математики гуманитариям заметил, что им интереснее концептуальное ее изучение с элементами философии. Это, например, материал по основаниям математики, а не вычисление конкретных производных.

Таким образом, современный единый стиль преподавания должен быть насыщен наглядно-образными технологиями, в чем могут существенно помочь мультимедийные компьютерные технологии. Но не все должно сводиться к последним. Преимущественно наглядно-образным должен быть сам стиль общения преподавателя и студента. Однако, желательно, чтобы преподаватель организовал 2 параллельных канала общения (и наглядно-образный, и с рассуждениями), учитывая наличие и левополушарного меньшинства, и концептуаль-

но-философскую направленность правополушарных. Желательно, чтобы преподаватель математики был бы специалистом не только в математической области, но и в психолого-педагогической, был бы нетривиальной творческой личностью.

В описанных выше условиях базовыми должны стать правдоподобные рассуждения в смысле Пойа, но нельзя исключать также преобразования смыслов в смысле Евклида и Аристотеля (это фактическая основа всей современной математики) и иногда - даже формалистские преобразования последовательностей иероглифов в смысле Гильберта. При этом принцип концептуализма должен непременно соблюдаться. Нельзя с «методическими» целями подменять ни одну концепцию, лежащую в основе математики. Если дедуктивный подход слишком сложен для понимания студентами, следует применить индуктивный - объяснить сложную концепцию на простом примере.

Для исключения «скариговорки» материал лекции следует по объему минимизировать. Рассказывать доказательство математической теоремы можно только в том случае, если (строго придерживаясь преобразований смыслов) это можно сделать не более, чем за 10 минут без «скариговорки». Большинство теорем следует рассказывать без доказательства. Нельзя доказательство логическое подменять псевдо-доказательством - «доказательством» психологическим, что встречается [13] даже в учебниках. Наиболее способный студент такого «доказательства» не поймет в силу нормально работающего мозга. Так у него разовьется комплекс неполноценности по отношению к его математическим способностям. Вероятно, шаблонно мыслящий преподаватель будет считать именно его близким к неуспевающим.

3. О сущности векторов и матриц, об инновациях стиля изучения математики на их примере

Что такое вектор? Скалярная величина может быть описана одним числом, векторная - несколькими числами. Множество векторов - это векторное (линейное) пространство. Например, $\mathbf{R}^2$ - множество пар действительных чисел, что соответствует координатам точек на плоскости, такая пара чисел (3.1; -1.7) - это двумерный вектор, а $\mathbf{R}^2$ - двумерное векторное пространство.

$$A \otimes B = \{(a; b): a \in A \text{ \& } b \in B\} \quad (9)$$

$\mathbf{R}^2$ легко обобщается на $\mathbf{R}^n$ - n-мерное векторное пространство. Тем самым, термин «вектор» фактически определяется с помощью термина $A \otimes B$ - Декартова произведения (9) двух множеств A и B, это множество упорядоченных пар (a; b), таких что $a \in A$ и $b \in B$.

$$\forall x, y \in V \quad x + y = y + x \quad (10)$$

$$\forall x, y, z \in V \quad (x + y) + z = x + (y + z) \quad (11)$$

$$\exists \theta \in V: \forall x \in V \quad x + \theta = x, \text{ здесь и далее } \theta - \text{ нулевой вектор} \quad (12)$$

$$\forall x \in V \quad \exists y \in V: x + y = \theta, \text{ здесь } y - \text{ вектор, противоположный к } x \quad (13)$$

$$\forall x \in V \quad 1 \cdot x = x \quad (14)$$

$$\forall a, b \in \mathbf{R} \quad \forall x \in V \quad (ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x) \quad (15)$$

$$\forall a, b \in \mathbf{R} \quad \forall x \in V \quad (a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x \quad (16)$$

$$\forall a \in \mathbf{R} \quad \forall x, y \in V \quad a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y \quad (17)$$

Существует и второе - более общее определение вектора. Вектор - это абстрактная сущность, которая допускает: 1) сложение (+) двух векторов; 2) умножение ($\cdot$) действительного числа на вектор. В обоих случаях результат - вектор. От такого векторного пространства V над $\mathbf{R}$ требуется выполнение свойств (10)-(17).

Например, C [0; 1] - множество непрерывных функций на отрезке [0; 1], это векторное пространство. Первое определение вектора предпочтительнее, поскольку оно проще для понимания. Его следует использовать при изучении, например, аналитической геометрии и линейной алгебры. Второе определение вектора следует использовать лишь в случае необходимости, например, в функциональном анализе.

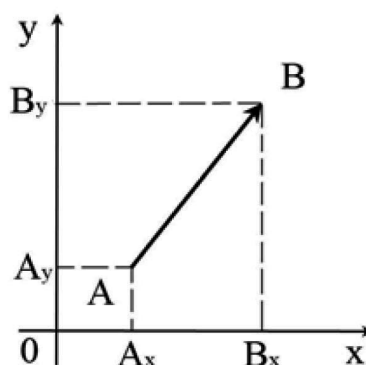


Рис. 1. Геометрический вектор (A; B) на $\mathbf{R}^2$

Упомянем и об определении геометрического вектора - это направленный отрезок прямой. Он направлен (рис. 1) от его начальной точки A к его конечной точке B, следовательно, может быть представлен как упорядоченная пара точек (A; B). Вектора в смысле первого определения также называют арифметическими. Эти точки могут принадлежать $\mathbf{R}^2$ (плоскости) или $\mathbf{R}^3$ (пространству). Будем для определенности считать, что они принадлежат $\mathbf{R}^2$. Пусть $A = (A_x; A_y)$, $B = (B_x; B_y)$. Координаты геометрического вектора (A; B) по осям x и y соответственно - это действительные числа $B_x - A_x$ и $B_y - A_y$. Вектор $(B_x - A_x; B_y - A_y)$ назовем координатным вектором геометрического вектора (A; B). Говорят, что геометрические вектора (A; B) и (C; D) конгруэнтны, если равны их координатные вектора: $(B_x - A_x; B_y - A_y) = (D_x - C_x; D_y - C_y)$.

В соответствующих учебниках обычно говорят о ра-

венстве геометрических векторов вместо того, чтобы говорить об их конгруэнтности. Это не совсем верно. В математике обычно принято два объекта называть равными, если это один и тот же объект. Например, пусть $m=5$ и $n=5$, тогда $m=n$, поскольку m и n – это 2 имени (идентификатора) числа 5 – того же самого математического объекта. Если 2 объекта чем-то похожи, то говорят, что они связаны отношением эквивалентности. Например, конгруэнтность – это частный случай эквивалентности.

$$A = \begin{bmatrix} 3.7; & -2.1; & 0; & -5.4 \\ -1.2; & 0; & -3.8; & 6 \\ 4.3; & 5; & 7; & 3.1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{3 \times 4} \quad (18)$$

Что такое матрица? Это прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов. Пример (18) – это матрица A , содержащая числа из $\mathbf{R}$ (действительные) и состоящая из 3 строк и 4 столбцов, $\mathbf{R}^{3 \times 4}$ – это множество всех таких матриц. При этом, например, $a_{2,3} = -3.8$ – это элемент, стоящий во 2 строке и 3 столбце. Именно так определяется матрица почти во всех учебниках математики.

Однако, такое определение матрицы не совсем корректно. Чем строка отличается от столбца? Строка расположена горизонтально, а столбец – вертикально. Горизонтальное направление не отличить от вертикального без рассмотрения силы тяжести. Так для определения математических объектов используются понятия физики! Именно математически продвинутый студент может при этом испытывать трудности «в понимании» учебного материала. Он пытается видеть логику в смысле Евклида и Аристотеля там, где ее нет. Получается, что математика – это один из разделов физики.

$$A = [[3.7; -2.1; 0; -5.4]; [-1.2; 0; -3.8; 6]; [4.3; 5; 7; 3.1]] \quad (19)$$

Можно определить матрицу иначе. Например, так: A – это вектор, состоящий из 3 векторов (19). При этом если взять 2 вектор $[-1.2; 0; -3.8; 6]$, а в нем 3 элемент, то мы получим $a_{2,3} = -3.8$. При этом $A =$ Теперь мы не зависим от понятий вертикали и горизонтали. Второе определение матрицы является математически точным.

Однако, в рамках второго определения матрицы будут другими определения терминов «строка», «столбец», «транспонирование матрицы», «умножение двух матриц», «определитель матрицы», «ранг матрицы» и других. Определения этих терминов математически будут выражаться тогда значительно более громоздко, а следовательно, станут непонятными для почти всех современных студентов. Опыт авторов статьи показывает, что среди студентов, только что прослушавших курс аналитической геометрии и линейной алгебры, где использовалось более простое первое определение матрицы,

тем не менее понимают термин «умножение двух матриц» менее 30%, а термин «ранг матрицы» – менее 10%.

$$A = \{a_{ij}\} \quad i=1 \dots 3; j=1 \dots 4 \quad (20)$$

$$B = \{b_{ijk}\} \quad i=1 \dots 3; j=1 \dots 4; k=1 \dots 3 \quad (21)$$

Также можно определить матрицу как 2-мерный тензор. Согласно (20), матрица A есть $3 \times 4 = 12$ чисел a_{ij} при всевозможных индексах $i=1, 2, 3$ и $j=1, 2, 3, 4$. Третье определение матрицы (как 2-мерного тензора) легко обобщается (21) на случай, например, 3-мерного тензора B . Здесь B – это 36 чисел b_{ijk} при всевозможных указанных индексах i, j, k .

Если есть матрица во втором смысле, то легко построить соответствующую матрицу в третьем смысле. Если есть матрица в третьем смысле, то легко построить соответствующую матрицу во втором смысле. Отсюда, второе и третье определения матрицы эквивалентны. Следовательно, третье определение матрицы также является математически точным.

Выше были рассмотрены: авторская классификация рассуждений, применяемых в математике; основные проблемы изучения математики современными студентами; сущность терминов «вектор» и «матрица». На базе этого ниже описываются предлагаемые авторами инновации стиля изучения математики на примере изучения векторов и матриц. Эти описания легко обобщаются для произвольной математической тематики.

Какие же из указанных выше определений вектора и матрицы рассказывать студентам и как это делать? Авторы статьи на лекциях по аналитической геометрии и линейной алгебре рассказывают все эти определения в приведенном выше порядке, делая главный акцент на первом определении вектора и на первом определении матрицы, как на наиболее наглядных. Рассказ про прочие определения по содержанию такой же, как приведен выше, он предназначен именно для тех математически продвинутых студентов, которые в противном случае могут испытывать трудности в понимании учебного материала. Думается, большинство из них – левополушарные, а сейчас – это меньшинство по сравнению с правополушарными. Но этот рассказ не может использовать только строгие рассуждения (в смысле Евклида-Аристотеля), поскольку, например, первое определение матрицы не совсем корректно. Поэтому большая доля рассказа – это правдоподобные рассуждения в смысле Поля, что и делается почти во всех учебниках, если говорить о матрицах.

При этом левополушарное меньшинство студентов представляет себе, как эти рассуждения можно превратить в строгие. Главное – они и не ждут строгих рассуждений там, где их нет. Это левополушарное меньшинство

вместе с правополушарным большинством пользуются некоторыми объективными преимуществами своего образного ассоциативного мышления перед смысловым понятийным. Выше изложен пример организации преподавателем двух параллельных каналов восприятия учебного материала – для правополушарного большинства и левополушарного меньшинства.

Системы линейных уравнений – это ближайшая область приложения векторов и матриц, но также они – источник средств для изучения самих векторов и матриц. Теорема Кронекера-Капелли состоит в том, что система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы. Эта теорема имеет очень объемное и сложное для понимания студентами доказательство – особенно правополушарными студентами. Такие теоремы современным студентам на лекциях лучше давать без доказательств. Чтобы объем этого доказательства сократить во многих учебниках оно приводится с использованием правдоподобных рассуждений, а говоря точнее – с логическими дырками и ошибками, фактически это и не является доказательством. Как отмечалось выше,

именно ориентированный на строгие математические рассуждения студент это «доказательство» не может понять. В [14] предлагается общий способ оптимизации доказательства сложной математической теоремы для облегчения его понимания студентами на примере доказательства теоремы Кронекера-Капелли. Вместо одной сложной теоремы предлагается доказывать несколько простых теорем. При этом могут также вводиться дополнительные понятия.

Где же современный студент может использовать строгие рассуждения в смысле Гильберта? При изучении дисциплин, в основе которых может лежать формалистская парадигма математики: основания математики; математическая логика; теория формальных грамматик и языков; теория алгоритмов; программирование и тому подобные дисциплины.

Заключение

Разделами 1–3 настоящей статьи соответственно задачи 1–3 были успешно решены, чем и была достигнута цель исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Евклид. Начала. Книги I–XV. Перевод с греческого Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М.: Ленанд, 2021 – 616с.
2. Комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского к книге Евклида. Начала. Книги I–XV. – М.: Ленанд, 2021 – 656с.
3. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. – М.: Наука, 1979 – 557с.
4. О некоторых проблемах в групповом обучении студентов математике и информатике. / Р.Р. Фокин, Д.А. Булекбаев, А.А. Атоян, М.А. Абиссова // Педагогический научный журнал – 2023 – Том 6, № 6 – С. 124–131.
5. Гильберт Д. Основания геометрии. – М.: Л: ОГИЗ, 1948 – 492с.
6. Некоторые содержательные проблемы преподавания в вузах теории открытых систем. / Р.Р. Фокин, М.А. Абиссова, Е.В. Ершова // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Гуманитарные науки. – 2024–№ 11 – С. 179–184.
7. Д. Пойа Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: Наука, 1975. – 464 с.
8. Д. Пойа. Как решать задачу. – М.: Учпедгиз, 1959. – 208 с.
9. Д. Пойа Математическое открытие. – М.: Наука, 1976. – 448 с.
10. Фокин Р.Р. О перспективах применения некоторых инновационных концепций обучения студентов математике. // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Гуманитарные науки. – 2025–№ 3–2 – С. 140–145.
11. Фокин Р.Р. Некоторые психологические и статистические аспекты преподавания дисциплин из областей математики и информатики в современной высшей школе. // Современные наукоемкие технологии – 2019–№9 – С.175–179.
12. Новые образовательные технологии и оценка статистической надежности обучения студентов / Ю.А. Пичугин, М.Л. Никонорова, Н.Р. Карелина // Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. – 2013. – № 154. – С. 138–145.
13. Фокин Р.Р. О содержательном аспекте обучения математике и информатике в современной высшей школе // Современные наукоемкие технологии – № 6 (часть 2), 2021. – С.340–344.
14. Фокин Р.Р. О содержательном аспекте изучения математического доказательства на примере теоремы Кронекера-Капелли в курсе линейной алгебры // Современные наукоемкие технологии – № 2, 2022. – С.231–235.

© Фокин Роман Романович (rrfokin@yandex.ru), Ершова Елена Викторовна (vka@mail.ru).

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»