DOI 10.37882/2223-2966.2023.10.26

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ДОХОДА ОДНОРОДНОЙ МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ

CONVERGENCE RATE ESTIMATION INCOME OF A HOMOGENEOUS MARKOV CHAIN

K. Orlova

Summary. The article provides an analytical expression for the income vector of a homogeneous Markov chain for a finite number of «steps». In this case, the type and magnitude of the deviation of the income in question from its assessment based on the stationary characteristics of the chain is indicated. This formula for the magnitude of the deviation allows us to obtain an analytical expression for the rate of convergence of income to its estimate as the number of «steps» increases.

Keywords: homogeneous Markov chain with income, step of the Markov chain, stationary characteristics of the Markov chain with income, income estimate for a finite number of steps, convergence rate of the sequence.

Орлова Ксения Петровна
К.т.н., доцент, Российский государственный университет нефти и газа (национальный исследовательский университет) имени И.М. Губкина (Москва)
sherksu@mail.ru

Аннотация. В статье приводится аналитическое выражение для вектора дохода однородной Марковской цепи за конечное число «шагов». При этом указывается вид и величина отклонения рассматриваемого дохода от его оценки, основанной на стационарных характеристиках цепи. Эта формула для величины отклонения позволяет получить аналитическое выражение для скорости сходимости дохода к его оценке при увеличении числа «шагов».

Ключевые слова: однородная Марковская цепь с доходом, «шаг» Марковской цепи, стационарные характеристики Марковской цепи с доходом, оценка дохода за конечное число шагов, скорость сходимости последовательности.

Введение

Прежде всего, отметим, что в настоящее время однородная Марковская цепь с доходом часто представляется однородным Марковским процессом с доходом (ОМПД) и с дискретным временем. Именно такое представление будет использоваться в рамках данной статьи.

Теперь обозначим через $\zeta(t_k) = \bar{\zeta}(t_k,[p(0),P,\sigma])$ ОМПД с дискретным временем и конечным множеством состояний n, заданный следующей совокупностью исходных данных [1,4]:

$$\left(p(0),P,\sigma\right), \tag{1}$$

где t_k — дискретное время, k — номер шага процесса, $k = 1,2,\ldots, \tau = t_k - t_{k-1}$ — интервал времени, соответствующий одному шагу, $t_0 = 0$, $p(0) = (p_1(0),\ldots,p_n(0))$ — начальное распределение, $P = \{p_{i,j}\} \in \Omega_n$,, Ω_n— множество всех стохастических матриц порядка n за исключением единичной матрицы E, $n \in \{2,3,\ldots\}, p_{i,j}$, $p_{i,j}$ — вероятность перехода процесса $\zeta(t_k)$ из состояния i в состояние j за интервал времени τ, $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,n$, $\sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_n)^T$ — вектор среднего дохода, приносимого процессом $\zeta(t_k)$ на одном интервале времени τ. Координата σ_i вектора σ удовлетворяет соотношениям:

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} l_{i,j},\ |\sigma_i| \le \beta_0,\ i = 1,\ldots,n, \tag{2}$$

где $l_{i,j}$ — доход при переходе процесса из состояния i в состояние j, β_0 — положительное число.

В дальнейшем будут рассматриваться характеристики ОМПД $\zeta(t_k)$ из следующего множества ОМПД:

$$Z = \left\{\zeta(t_k) = \bar{\zeta}\left(k,[J,p(0),P,\sigma]\right) \middle| P \in \Omega_n\right\}, \tag{3}$$

где компоненты вектора σ удовлетворяют выражению (2).

Для каждого процесса $\zeta(t_k) \in Z$ определим следующие матрицы и вектора, являющиеся основными характеристиками этого процесса:

1. π — матрица финальных вероятностей, которая имеет вид [2]:

$$\pi = \lim_{k\to\infty}(k+1)^{-1}(E + P^1 + \ldots + P^k), \tag{4}$$

где E — единичная матрица.

2. B — фундаментальная матрица вида [3]:

$$B = (E - P + \pi)^{-1}. \tag{5}$$

Отметим, что $B \ne 0$, если $(P - \pi) \ne E$. (6)

3. Вектора $r = \pi\sigma$ и $w = (B - \pi)\sigma$ именуются в работе [1] стационарными характеристиками процесса $\zeta(t_k)$. При этом выполняется равенство:

$$B\sigma = w + \pi\sigma \quad . (7)$$

Для каждого процесса $\zeta(t_k) \in Z$ справедливы следующие утверждения, доказанные в работах [2,3]:

1. Предел, определяемый выражением (4), существует, т.е. матрица π существует и единственна.

2. Выполняется соотношение:

$$P\pi = \pi P = \pi\pi = \pi. \quad (8)$$

3. Матрица B является невырожденной матрицей для любого $P \in \Omega_n$. Таким образом, существует матрица $A = B^{-1}$, для которой выполняется следующее соотношение:

$$BA = E. \quad (9)$$

Соотношение характеристик ОМПД с дискретным временем

Аналитические зависимости между выше определёнными основными характеристиками ОМПД $\zeta(t_k)$ устанавливаются следующими леммами.

Лемма 1. Для каждого процесса $\zeta(t_k) \in Z$ справедливы следующие соотношения:

$$A\pi = \pi = \pi A, \quad (10)$$

$$\pi B = \pi = B\pi, \quad (11)$$

$$(\mathrm{E} - \pi)A = \mathrm{E} - \mathrm{P} = A(\mathrm{E} - \pi), \quad (12)$$

$$(\mathrm{E} - \mathrm{P})B = \mathrm{E} - \pi = B(\mathrm{E} - \mathrm{P}). \quad (13)$$

Доказательство.

1. $A\pi = [E - P + \pi]\pi = \pi - P\pi + \pi\pi$. (14)

Из соотношения (14), с учётом выражения (8), следует справедливость левого равенства в соотношении (10). Аналогично доказывается справедливость правого равенства в (10).

2. Правое равенство (10) умножим справа на матрицу B. При этом, с учётом выражения (9), получаем выполнение левого равенства в соотношении (11). Аналогично доказывается выполнение правого равенства в (11).

3. Т.к. $(E - \pi)A = A - \pi A = A - \pi = [E - P + \pi] - \pi = E - P$, то справедливо левое равенство в соотношении (12). Аналогично доказывается выполнение правого равенства в (12).

4. Умножим левое равенство в выражении (12) справа на матрицу B. При этом получим следующее соотношение:

$$(E - \pi)AB = E - \pi = (E - P)B. \quad (15)$$

Из соотношения (15) следует справедливость левого равенства в выражении (13). Аналогично доказывается выполнение правого равенства в (13).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Для каждого процесса $\zeta(t_k) \in Z$ справедливо уравнение:

$$w + r = \sigma + Pw, \quad (16)$$

где $r = \pi\sigma$.

Доказательство. Из определения матрицы A, вектора w и выражения (11) следует, что

$$Aw = (E - P + \pi)(B - \pi)\sigma = (E - P)B\sigma = (E - \pi)\sigma = \sigma - \pi\sigma. \quad (17)$$

Из выражений (11) и (7) следует, что

$$\pi w_1 = \pi(B - \pi)\sigma = 0$$

и, таким образом, выполняется следующее соотношение:

$$Aw = (E - P + \pi)w = w - Pw, \quad (18)$$

Из равенств выражений (17) и (18) непосредственно следует, что $\sigma - \pi\sigma = w - Pw$, т.е. выполняется уравнение (16). Лемма 2 доказана.

Замечание 1. Уравнение (16) приводится в работе [4], *где служит для определения векторов $r = \pi\sigma$ и w, введённых Р. Ховардом при рассмотрении свойств ОМПД $\zeta(t_k)$; в работе* [4], *на странице 80* координаты вектора w именуются «весами».

Лемма 3. Для каждого процесса $\zeta(t_k) \in Z$ и каждого $\mu = 1, 2, \ldots$ выполняются равенства:

$$(E - A)^\mu\pi = \pi(E - A)^\mu = 0, \quad (19)$$

$$(P - \pi)^\mu\pi = \pi(\pi - P)^\mu = 0. \quad (20)$$

Доказательство. Из выражений (8) следует, что

$$\pi^\mu = \pi. \quad (21)$$

Равенство (21), с учётом выражения (10), влечёт справедливость следующих соотношений:

$$(E - A)^\mu\pi = (E - A)^\mu\pi^\mu = ((E - A)^\mu\pi)^\mu = \pi - \pi = 0, \quad (22)$$

$$\pi(E - A)^\mu = \pi^\mu(E - A)^\mu = (\pi(E - A))^\mu = \pi - \pi = 0, \quad (23)$$

т.е. выполняется соотношение (19).

Аналогично, с учётом выражений (21) и (10), доказывается выполнение равенств (20). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Для каждого процесса $\zeta(t_k) \in Z$ и каждого $\mu \in \{1, 2,\ldots\}$ выполняется равенство:

$$P^{\mu} = (E - A)^{\mu} + \pi, \tag{24}$$

Доказательство леммы проведем методом индукции.

1. Пусть $\mu = 1$, тогда $(E - A)^1 + \pi = (E - E + P - \pi)^1 + \pi = P^1$, т.е. выполняется равенство (24).

2. Пусть равенство (24) выполняется для $\mu = n$, т.е. $P^n = (E - A)^n + \pi$.

3. Пусть $\mu = n + 1$, тогда докажем, что при этом выполняется равенство (24). С учётом пунктов 1 и 2, выражений (8) и (19), где $\mu = 1$, выполняется следующее соотношение:

$$P^{n+1} = P \cdot P^n = (E - A + \pi)((E - A)^n + \pi) = (E - A)^{n+1} + (E - A)\pi + \\ + \pi (E - A)^n + \pi = (E - A)^{n+1} + \pi,$$

что доказывает лемму 4.

Аналитический вид дохода от ОМПД на конечном интервале дискретного времени

Вектор дохода $D(k) = [d_1(k),\ldots,d_n(k)]^T$,, приносимого каждым процессом $\zeta(t_k) \in Z$ за k шагов, т.е. на интервале дискретного времени $[0, t_k]$, имеет вид [2]:

$$D(k) = \sigma + P^1\sigma + \ldots + P^{k-1}\sigma = \sum_{i=0}^{k-1} P^i\sigma, \tag{25}$$

где $P^0 = E$, $k \in \{1, 2, \ldots\}$. При этом координата $d_i(k)$ вектора $D(k)$ является доходом, приносимый Марковским процессом $\zeta(t_k)$ при условии, что i-ая координата вектора начального распределения $p(0)$ равна 1, а остальные нулю,

Используя лемму 4, вектор $D(k)$ можно представить в виде:

$$\begin{gathered} D(k) = \left(E + \sum_{i=1}^{k-1}(E - A)^i\right)\sigma + (k-1)\pi\sigma = \\ = (k-1)\pi\sigma + \sum_{i=0}^{k-1}(P - \pi)^i\sigma, \end{gathered} \tag{26}$$

где $(P - \pi)^0 = E$.

Лемма 5. Для каждого процесса $\zeta(t_k) = \bar{\zeta}(k,[p(0),P,\sigma]) \in Z$ справедливо утверждение: для того, чтобы $\sum_{i=0}^{\infty}(P - \pi)^i = B$ необходимо и достаточно, чтобы $(P - \pi)^m \to 0$ при $m \to \infty$, (27)

где $B = (E - P + \pi)^{-1}$— фундаментальная матрица процесса $\zeta(t_k)$.

Доказательство.

1. Необходимость. Если $(P - \pi)^m \to 0$ при $m \to \infty$, то по теореме 13.5 работы [4] выполняется соотношение — $\sum_{i=0}^{\infty}(P - \pi)^i = [(E - (P + \pi))]^{-1} = B$.

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\sum_{i=0}^{\infty}(P - \pi)^i = B$. (28)

Тогда для любого $m \in \{1,2,\ldots\}$ справедливо следующее соотношение:

$$\begin{gathered} \sum_{i=0}^{m}(P - \pi)^i[E - (P - \pi)] = \\ = \sum_{i=0}^{m}(P - \pi)^i A = E - (P - \pi)^{m+1} \end{gathered}. \tag{29}$$

Если правое равенство в соотношении (29) умножить справа на матрицу B, то, с учётом равенства $A \cdot B = E$, справедливо следующее выражение:

$$\sum_{i=0}^{m}(P - \pi)^i = B - (P - \pi)^{m+1}B. \tag{30}$$

Теперь, если исключить тривиальный случай, когда $B = 0$ (см. выражение (6)), то из равенства (30) при $m \to \infty$ получаем, с учётом равенства (28), что $\lim_{m\to\infty}(P - \pi)^{m+1} = 0$, т.е. лемма 5 доказана.

Теорема 1. Для любого числа шагов $k \in \{1,2,\ldots\}$, т.е. для любого конечного интервала дискретного времени $[0, t_k]$, вектор дохода $D(k)$ каждого ОМПД $\zeta(t_k) \in Z$ имеет следующий вид:

$$D(k) = rk + w - (P - \pi)^k w, \tag{31}$$

где $r = \pi\sigma$.

Доказательство.

Из леммы 5 следует, что выражение (26) можно представить в виде:

$$\begin{gathered} D(k) = r \cdot (k-1) + \sum_{i=0}^{\infty}(P - \pi)^i\sigma - \sum_{i=k}^{\infty}(P - \pi)^i\sigma = \\ = r \cdot (k-1) + B\sigma - \sum_{i=k}^{\infty}(P - \pi)^i\sigma = \\ = r \cdot (k-1) + B\sigma - (P - \pi)^k B\sigma \end{gathered}. \tag{32}$$

где

$$\sum_{i=k}^{\infty}(P - \pi)^i\sigma = (P - \pi)^k\sum_{i=0}^{\infty}(P - \pi)^i\sigma = (P - \pi)^k B\sigma. \tag{33}$$

Если учесть выражение (7) , т.е. $B\sigma = w + \pi\sigma = w + r$, и соотношение

$$(P - \pi)^k\pi\sigma = (P - \pi)^k\pi^k\sigma = ((P - \pi)\pi)^k\sigma = (\pi - \pi)^k\sigma = 0,$$

то выражение (32) примет следующий вид:

$$D(k) = \pi\sigma k + w - (P - \pi)^k w = r \cdot k + w - (P - \pi)^k w,$$

т.е. теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 следует, что для случая простых собственных значений матрицы $(P - \pi)$ сходимости $D(k)$ к вектору $\bar{D}(k) = r \cdot k + w$ оценивается вектором $\Delta(k) = (P - \pi)^k$w. При этом сферическая норма [5] вектора $\Delta(k)$ удовлетворяет следующему выражению:

$$\|\Delta(k)\| = \|D(k) - r \cdot k - w\| \le \|(P - \pi)\|^k \|w\| = \\ = \lambda_0^k \cdot \|w\|, \quad (34)$$

где $\|(P - \pi)\| = \lambda_0$ — спектральная норма вещественной матрицы $(P - \pi)^T(P - \pi)$ и $0 < \lambda_0 < 1$, $\|w\| = |w \circ w|^{0,5}$— сферическая норма вектора w, ° — символ скалярного произведения векторов.

При этом, справедливо выражение $\Delta(k) \to 0$ при $k \to \infty$. (35)

Замечание 2.

1. Условие наличия простых собственных значений матрицы $(P - \pi)$ не является критическим по отношению к применению формулы (34). Поскольку на стр. 67 работы [5] указывается, что «в вычислительной математики … резкая грань между случаями простых и кратных собственных значений стирается, т.к. при малых деформациях элементов матрицы всегда можно перейти от матрицы с кратными собственными значениями к матрице с простыми собственными значениями». При этом в работе [5] приводится аналитический вид таких «малых деформаций».

2. Для каждого ОМПД с дискретным временем $\zeta(t_k) \in Z$ при $k \to \infty$ из выражения (34), с учётом (35), получаем асимптотическую оценку $\bar{D}(k)$ для вектора $D(k)$, приведённую в работе [4], — $\bar{D}(k) = r \cdot k + w$..

Скорость сходимости $D(k)$ к $\bar{D}(k)$

Вектор $[D(k) - \bar{D}(k)]$ удовлетворяет выражению (31), поэтому скорость сходимости вектора $D(k)$ к $\bar{D}(k)$ оценивается вектором $-\Delta(k)$, где $\Delta(k) = (P - \pi)^k w$. При этом оценка скорости сходимости удовлетворяет соотношению (34).

Заключение

Для любого числа шагов $k \in \{1, 2,…\}$, т.е. для любого конечного интервала дискретного времени $[0,t_k]$, вектор дохода $D(t_k) = D(k)$ каждого ОМПД $\zeta(t_k) \in Z$ сходится к вектору $\bar{D}(k) = rk + w$ со скоростью, определяемой выражением $\Delta(k) = (P - \pi)^k w$. При этом сферическая норма вектора $\Delta(k)$, удовлетворяет, с учётом замечания 2, следующему неравенству: $\|\Delta(k)\| \le \lambda_0^k \cdot \|w\|$, где λ_0 — спектральная норма матрицы $(P - \pi)$ и $0 < \lambda_0 < 1$.

Таким образом, в данной работе получено аналитическое выражение для оценки скорости сходимости дохода ОМПД с дискретным временем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карманов А.В. Исследование управляемых конечных марковских цепей с неполной информацией (минимаксный подход). — М.: ФИЗМАТЛИТ. — 2002. — 176 с.
2. Майн Х., Осаки С. Марковские процессы принятия решений. — М.: Наука. — 1977. —175с.
3. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. — М.: Наука. — 1970, — 271с.
4. Ховард Р. Динамическое программирование и Марковские процессы. — М.: Советское Радио. — 1964. — 189с.
5. Фадеев Д.К., Фадеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Издание 3-е, стереотипное. — СПб.: Издательство «Лань». — 2002. — 736 с.
6. Программный модуль для оптимизации линейной формы с интервально заданными исходными данными. Авторы: Орлова К.П., Карманов А.В., Серкин В.Е., Токарев М.А. Правообладатель: Российский государственный университете (НИУ) нефти и газа имени И.М. Губкина, регистрация 30 марта 2022 года, №2022615055.
7. Программный модуль выделения классов возвратных сообщающихся состояний и класса невозвратных состояний Марковской цепи. Авторы: Орлова К.П., Карманов А.В., Серкин В.Е., Токарев М.А. Правообладатель: Российский государственный университет (НИУ) нефти и газа имени И.М. Губкина, регистрация 04 августа 2022 г., № 2022664251.
8. Программный модуль расчёта стационарных характеристик Марковских процессов с доходом. Авторы: Карманов А.В., Орлова К.П., Серкин В.Е., Токарев М.А. Правообладатель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский государственный университет нефти и газа (национальный исследовательский университет) имени И.М. Губкина», регистрация 06 марта 2023 г., № 2023613406.
9. Ширяев А.Н. Вероятность. — М.: Наука,1980.
10. Емельянов А.А., Власова Е.А., Дума Р.В. Имитационное моделирование экономических процессов / Под ред. А.А. Емельянова. — М.: Финансы и статистика, 2009. — 480 с.