ОБЗОР ПО ДИСКРЕТНЫМ СИСТЕМАМ УПРАВЛЕНИЯ

OVERVIEW OF DISCRETE MANAGEMENT SYSTEMS

A. Boryaev
Zhu Yuqing

Summary. The review presents the scope of discrete control systems. The mathematical apparatus used in the theory of discrete automatic control systems for aircraft is considered. Transformations are presented, including the discrete Laplace transform, its connection with the Laplace transform of continuous functions, elements of the theory of difference equations. The definition of mathematical models of discrete automatic systems is given. The concepts of transfer functions and frequency characteristics of discrete systems, methods for their determination are considered. The methods of analysis and synthesis of discrete systems are described. The analysis of stability and quality of discrete systems is given.

Keywords: discrete control systems; mathematical model; analysis methods.

Боряев Александр Александрович
К.т.н., доцент, Санкт-Петербургский Политехнический университет им. Петра Великого; доцент, Санкт-Петербургский Государственный архитектурно-строительный университет, г. Санкт-Петербург
Sasa1953@yandex.ru
Чжу Юйцин
Аспирант, Санкт-Петербургский Политехнический университет им. Петра Великого, г. Санкт-Петербург

Аннотация. В обзоре представлена область применения дискретных систем управления. Рассмотрен математический аппарат, применяемый в теории дискретных систем автоматического управления летательных аппаратов. Представлены преобразования, в том числе дискретное преобразование Лапласа, его связь с преобразованием Лапласа непрерывных функций, элементы теории разностных уравнений. Дано определение математических моделей дискретных автоматических систем. Рассмотрены понятия передаточных функций и частотных характеристик дискретных систем, способы их определения. Изложены методы анализа и синтеза дискретных систем. Приводится анализ устойчивости и качества дискретных систем.

Ключевые слова: дискретные системы управления; математическая модель; методы анализа.

Введение

В технике управления наряду с непрерывными широко применяются дискретные системы, в которых контур управления замыкается только на определенные промежутки времени, осуществляя воздействие на исполнительный орган импульсами (1–4). В паузах между импульсами цепь управления остается разомкнутой.

Рассмотрим некоторые примеры дискретных систем автоматического управления летательными аппаратами.

Автодальномер — автоматическая система определения дальности до обнаруженного объекта, применяемая в радиолокационных станциях импульсного типа.

Принцип радиолокационного измерения дальности основан на определении промежутка времени τ от момента посылки зондирующего импульса передатчиком до момента прихода отраженного импульса от объекта (эхо-импульса)

$$\tau = 2L/c,$$

где L,— дальность до объекта, c — скорость распространения электромагнитного излучения.

Импульсные системы широко применяются в радиолокационных установках, предназначенных для обнаружения подвижных объектов и определения их координат. Использование импульсного радиоизлучения позволяет увеличить дальность обнаружения и резко сократить габариты и массу радиолокационной аппаратуры, что особенно важно для бортовых радиолокационных систем.

Цифровая комплексно-автоматизированная система управления. Рассмотрим основные задачи, которые решает бортовая цифровая вычислительная машина (БЦВМ) в процессе подготовки пуска и в течение полета летательного аппарата (ЛА).

На БЦВМ возлагается обслуживание целого ряда зависимых и независимых каналов управления. При этом БЦВМ выполняет функции многоканального регулятора, обслуживающего последовательно во времени отдельные подсистемы, образующие в совокупности комплексно-автоматизированную систему управления. Кроме того, во время предстартовой подготовки БЦВМ используется для проверки самого ЛА и его системы управления. Сформированные БЦВМ управляющие сигналы преобразуются в непрерывные и поступают на рулевые приводы управляющих органов самого ЛА, в результате чего обеспечивается движение по заданной траектории с требуемой точностью.

Назначение, принципы построения и основные особенности дискретных систем управления

Современная тенденция развития систем управления основана на использовании в качестве устройств управления специализированных или универсальных компьютеров (5). Компьютерные системы управления имеют ряд важных преимуществ:

- минимальное потребление энергии;
- малые габариты и масса устройств управления;
- возможность реализации любых сложных законов управления, в том числе многоканальных, оптимальных и адаптивных;
- универсальная программная реализация произвольных законов управления.

В системе управления летательного аппарата присутствуют устройства состояние и поведение которых характеризуется сигналами с принципиально разным характером изменения: объект управления, измерительные и исполнительные устройства — непрерывного действия; устройство управления — дискретного действия.

Для учета особенностей процессов в таких системах при решении задач их анализа и синтеза используют специальный математический аппарат (6).

Рассмотрим основные виды систем автоматического управления (САУ) с устройствами дискретного действия.

Дискретные САУ — это системы, в которых содержится одно или несколько звеньев, производящих квантование непрерывного сигнала в дискретный.

В зависимости от вида квантования различают релейные, импульсные и цифровые системы. В релейных системах осуществляется квантование по уровню, в импульсных — по времени, в цифровых — по времени и уровню. Импульсными называются системы, включающие в себя хотя бы один импульсный элемент.

Релейными называются системы, включающие в себя хотя бы один релейный элемент. Здесь сигнал, поступающий на непрерывную часть системы с релейного элемента может принимать только фиксированные значения (уровни), определяемые характеристикой релейного элемента. В этом случае преобразование сигнала, выполняемое релейным элементом, является квантованием по уровню.

В системах компьютерного управления (цифровых автоматических системах) устройство управления строится на основе микропроцессоров, характерными особенностями которых являются работа в дискретном времени и представление сигналов в цифровой (дискретной) форме — в виде двоичных кодов. Следовательно, в цифровых системах управления присутствуют оба вида квантования сигнала: по времени и по уровню,

Следовательно, компьютерная или цифровая система управления должна рассматриваться как нелинейная дискретная система, что приводит к усложнению математического аппарата, применяемого для ее анализа или синтеза (7). Для таких систем применяется термин «дискретные системы».

Виды модуляции сигнала. Выполняемое импульсным элементом преобразование сигнала из непрерывной в импульсную форму (квантование по времени) называют также модуляцией сигнала. Перечислим основные виды модуляции.

Амплитудно-импульсная модуляция (АИМ) — формирование последовательности импульсов постоянной частоты и длительности, амплитуда которых пропорциональна величине входного сигнала.

Частотно-импульсная модуляция (фазоимпульсная модуляция — ФИМ) — формирование последовательности импульсов постоянной амплитуды и длительности, частота следования (или интервал дискретизации) которых пропорциональна величине входного сигнала.

Выбор такта квантования по времени. В результате квантования непрерывного сигнала по времени неизбежна потеря информации о входном сигнале импульсного элемента, так как значения сигнала внутри такта не влияют на его выходной сигнал.

Выбор величины такта T_0 или частоты квантования

$$\omega = \frac{2\pi}{T_0}$$

обычно осуществляется на основе теоремы Котельникова — Шеннона, определяющей условие теоретической возможности восстановления исходного непрерывного сигнала по дискретной последовательности его значений. В соответствии с указанной теоремой при известной максимальной частоте, ограничивающей спектр непрерывного сигнала $\omega_{\max}$, точное его восстановление возможно при условии $\omega > 2\omega_{\max}$. Отсюда получаем условие для выбора величины такта: $T_0 < \pi/\omega_{\max}$.

Основные сведения о математическом аппарате, применяемом для импульсных и дискретных систем

Математическая модель импульсного элемента обычно рассматривается в форме последовательного соединения ключа, замыкающегося и размыкающегося с периодом T_0, и непрерывной части (8). Принимается, что ключ замыкается на время, значительно меньшее по сравнению с T_0. Поэтому сигнал на выходе ключа может рассматриваться как решетчатая функция, значения которой совпадают со значениями входного сигнала $x(t)$ в моменты времени $t = nT_0$, где

$$n = 0,1,2,\cdots \left(x[nT_0]\right).$$

Непрерывная часть импульсного элемента (экстраполятор) обеспечивает формирование импульсов определенной формы и длительности

$$\left(x^*(t)\right).$$

Импульсы можно классифицировать по форме: прямоугольные, треугольные, синусоидальные и т.д.

Несмещенная решетчатая функция $f[nT_0]$, в сокращенной записи $f[n]$,— это функция, значения которой определены в дискретные моменты времени $t = nT_0$, где n — номер такта, T_0 = const — период дискретности.

Роль первой производной непрерывной функции для решетчатой функции может выполнять первая

$$\Delta f[n] = f[n+1] - f[n]$$

или первая обратная разность

$$\nabla f[n] = f[n] - f[n-1].$$

Роль второй производной для решетчатой функции выполняют вторая прямая разность:

$$\Delta^2 f[n] = \Delta f[n+1] - \Delta f[n] =$$

$$= f[n+2] - 2f[n+1] + f[n]$$

или вторая обратная разность:

$$\nabla^2 f[n] = \nabla f[n] - \nabla f[n-1] =$$

$$= f[n] - 2f[n-1] + f[n-2].$$

Высшие прямая и обратная разности определяются с помощью рекуррентных соотношений;

$$\Delta^k f[n] = \Delta^{k-1} f[n+1] - \Delta^{k-1} f[n], \nabla^k f[n] =$$

$$= \nabla^{k-1} f[n] - \nabla^{k-1} f[n-1]. \qquad (1)$$

При вычислении обратных разностей значения $f[m]$ для $m < 0$ следует брать равными нулю.

Роль определенного интеграла для решетчатой функции могут выполнять неполная сумма:

$$\sigma[n] = \sum_{m=0}^{n-1} f[m] = \sum_{l=1}^{n} f[n-1]$$

или полная сумма:

$$\sigma_0[n] = \sigma[n] + f[n] = \sigma[n+1] = \sum_{m=0}^{n} f[m].$$

Для смещенных решетчатых функций все перечисленные соотношения аналогичны.

В качестве аналогов дифференциальных уравнений для решетчатых функций используются разностные уравнения (уравнения в конечных разностях) (9). Для прямых разностей может быть составлено неоднородное линейное разностное уравнение

$$b_0 \Delta^m y[n] + b_1 \Delta^{m-1} y[n] + \ldots + b_m y[n] = f[n]. \qquad (2)$$

где $y[n]$ — искомая, $f[n]$ — заданная решетчатые функции. На основе (1) уравнение (2) может быть преобразовано к виду

$$a_0 y[n+m] + a_1 y[n+m-1] + \ldots + a_m y[n] = f[n]. \qquad (3)$$

Уравнения для обратных разностей:

$$b_0 \nabla^m y[n] + b_1 \nabla^{m-1} y[n] + \ldots + b_m y[n] = f[n].$$

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \ldots + a_m y[n-m] = f[n]. \qquad (4)$$

Наиболее удобны уравнения вида (3) и (4), так как они легко преобразуются в рекуррентные формулы для пошагового вычисления решетчатой функции $y[n]$, удобные для реализации на компьютере:

$$y[n+m] = \frac{1}{a_0} f[n] - \frac{a_1}{a_0} y[n+m-1] - \ldots - \frac{a_m}{a_0} y[n],$$

$$y[n] = \frac{1}{a_0} f[n] - \frac{a_1}{a_0} y[n-1] - \ldots - \frac{a_m}{a_0} y[n-m].$$

При $f[n] = 0$ получим однородные разностные уравнения. Их решение аналогично решению однородных дифференциальных уравнений. Составляется характеристическое уравнение:

$$a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m = 0 \qquad (5)$$

и определяются его корни $z_i, i = 1,2,\ldots m.$

Общее решение однородного разностного уравнения при вещественных некратных корнях характеристического уравнения:

$$y[n]=C_1 z_1^n + C_2 z_2^n + \ldots + C_m z_m^n, \tag{6}$$

где C_i — произвольные постоянные, определяемые через начальные условия.

Дискретная система устойчива, если все корни ее характеристического уравнения лежат внутри круга единичного радиуса.

Если хотя бы один корень лежит вне круга единичного радиуса, то система неустойчива.

Окружность единичного радиуса представляет собой границу устойчивости.

Второй вариант математического описания импульсного звена предполагает, что на выходе ключа формируется последовательность δ-функций, площадь каждой из которых совпадает со значением входного сигнала звена $x(t)$ в моменты времени $t=nT_0$:

$$x^*[n]=x(t)\delta(t-nT_0), n=0,1,2,\ldots$$

Дискретное преобразование Лапласа решетчатой функции $f[n]$ определяется формулой

$$F^*(s)=D\{f[n]\}=\sum_{n=0}^{\infty} f[n]e^{-snT_0}. \tag{7}$$

Как видно из (7), изображение $F^*(s)$ является функцией величины e^{-sT_0}.

На основе подстановки $e^{sT_0}=z$; может быть получено более удобное для решения практических задач z-преобразование:

$$F(z)=Z\{f[n]\}=\sum_{n=0}^{\infty} f[n]z^{-n}.$$

Таким образом, изображения $F^*(s)$ и $F(z)$ взаимно однозначно связаны. Переход от одного из них к другому или обратно осуществляется путем указанной подстановки.

Свойства дискретного преобразования Лапласа и z-преобразования одинаковы. Рассмотрим их на основе z-преобразования.

Свойство линейности:

$$Z\left\{\sum_{k=1}^{N} c_k f_k[n]\right\}=\sum_{k=1}^{N} c_k Z\{f_k[n]\}.$$

Теорема смещения

$$Z\left\{e^{\lambda nT_0} f[n]\right\}=F\left(\frac{z}{d}\right), d=e^{\lambda T_0}.$$

Изображение первой прямой разности:

$$Z\{\Delta f[n]\}=(z-1)F(z)-zf[0].$$

Изображения прямых разностей второго й более высоких порядков имеют сложный вид и неудобны для практического использования.

Для обратных разностей благодаря $f[m]=0$ для $m<0$ изображения имеют простой вид:

$$Z\{\nabla f[n]\}=\frac{z-1}{z}F(z), \tag{8}$$

$$Z\left\{\nabla^k f[n]\right\}=\left(\frac{z-1}{z}\right)^k F(z). \tag{9}$$

Отметим, что соотношения (8), (9) аналогичны теоремам дифференцирования для непрерывного преобразования Лапласа в случае нулевых начальных условий.

На основе теоремы запаздывания можно построить процедуру перехода от разностных уравнений к алгебраическим уравнениям для z-изображений решетчатых функций и далее к передаточным функциям, аналогичную известной для дифференциальных уравнений (11).

Рассмотрим линейное разностное уравнение, полученное на основе обратных разностей, в наиболее общем виде:

$$a_0 y[n]+a_1 y[n-1]+\ldots+a_m y[n-m]=$$
$$=b_0 f[n]+b_1 f[n-1]+\ldots+b_l f[n-l].$$

Принимая $f[k]=0$ и $y[k]=0$ для $k<0$, получаем

$$a_0 y[n]+a_1 y[n-1]+\ldots+a_m y[n-m]=$$
$$=b_0 f[n]+b_1 f[n-1]+\ldots+b_l f[n-l]$$

Теперь изображение искомой решетчатой функции $Y[z]$ можно выразить через изображение заданной для правой части уравнения решетчатой функции $F[z]$:

$$Y[z]=\frac{b_0+b_1 z^{-1}++b_l z^{-l}}{a_0+a_1 z^{-1}++a_m z^{-m}}F[z]=\frac{B[z]}{D[z]}Y[z]=$$
$$=W[z]F[z]$$

Таким образом, введена дискретная передаточная функция $W[z]$ как отношение изображений выходной и входной переменных

$$W[z]=\frac{Y[z]}{F[z]}$$

при нулевых начальных условиях.

Решение разностных уравнений. Перечислим способы решения разностных уравнений.

1. Классический метод:

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \ldots + a_m y[n-m] = f[n]$$

дает решение в форме

$$y[n] = y_{\Pi}[n] + y_B[n]$$

где $y_{\Pi}[n]$ — переходная составляющая (свободное движение) находитя как общее решение уравнения в соответствии с (5)—(8), $y_B[n]$ — вынужденная составляющая — как частное решение уравнения.

2. Использование рекуррентных формул:

$$y[n] = \frac{b_0}{a_0} f[n] + \frac{b_1}{a_0} f[n-1] + \ldots + \frac{b_l}{a_0} f[n-l] -$$

$$- \frac{a_1}{a_0} y[n-1] - \ldots - \frac{a_m}{a_0} y[n-m].$$

Переход от изображения известной (заданной) функции $F(z)$ к изображению искомой функции $Y(z)$ и использование таблиц z-изображений для получения оригинала $y[n]$. Если изображение $Y(z)$ получается сложным и не содержится в таблицах, его раскладывают в сумму табличных изображений и получают результат в виде суммы оригиналов в соответствии со свойством линейности z-преобразования.

Формы математических описаний дискретных систем управления

Для дискретных систем автоматического управления применяются все формы математического описания, аналогичные известным для непрерывных систем: структурно-динамическая схема, передаточные функции, разностные уравнения, система разностных уравнений, векторно-матричная форма.

Проведем их обзор, обращая внимание на основные особенности составления моделей дискретных систем, связанные прежде всего с наличием процесса квантования по времени (12).

На практике встречаются системы как полностью состоящие из дискретных звеньев, так и содержащие дискретную и непрерывную части.

В первом случае при получении всех видов передаточных функций системы как для задающих, так и для возмущающих воздействий сохраняется набор соотношений для вариантов типового соединения звеньев, преобразования структурных схем и получения передаточных функций замкнутых систем, известных из теории непрерывных систем.

При наличии в системе непрерывной части, прежде всего непрерывного объекта управления, необходимо корректно выполнить дискретизацию модели — переход от дифференциальных к разностным уравнениям и от обычных к дискретным передаточным функциям.

Наиболее простым методом дискретизации модели, заданной в форме дифференциальных уравнений, является метод Эйлера. Он основан на приближенном представлении производной непрерывной функции в форме прямой:

$$\dot{x}(nT_0) = \Delta x[nT_0] = \frac{x[(n+1)T_0] - x[nT_0]}{T_0}$$

или обратной разности:

$$\dot{x}(nT_0) = \nabla x[nT_0] = \frac{x[nT_0] - x[(n-1)T_0]}{T_0}$$

Для второй производной указанные соотношения применяются к первой производной и т.д.

Значительная часть задач анализа и синтеза импульсных систем решается с помощью дискретных передаточных функций, так как при их получении полностью учитываются характеристики импульсной части системы, включая шаг дискретизации по времени.

Объединение непрерывных последовательно соединенных звеньев и получение общей передаточной функции должно быть выполнено в рамках преобразования Лапласа, и только потом может быть найдена дискретная передаточная функция всего непрерывного участка системы.

Особенности дискретных передаточных функций проявляются и при описании замкнутых систем. При наличии единичной отрицательной обратной связи передаточные функции замкнутой системы определяются аналогично непрерывным системам.

Основная передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{G(z)} = \frac{W(z)}{1+W(z)}.$$

Передаточная функция замкнутой системы по ошибке

$$\Phi_x(z) = \frac{Y(z)}{G(z)} = \frac{1}{1+W(z)}.$$

В случае гибкой обратной связи без дополнительного импульсного элемента в обратной связи указанные передаточные функции определяются следующим образом:

$$\Phi(z)=\frac{Y(z)}{G(z)}=\frac{W(z)}{1+W_1(z)}.$$

где $W_1(z)=Z\{W(s)W_{\text{ос}}(s)\}, \Phi_x(z)=1-\Phi(z).$

Передаточная функция замкнутой системы по возмущению в общем случае может быть получена только при наличии ключа сразу после точки приложения возмущающего воздействия, что на практике встречается редко.

При определении передаточной функции непрерывной части ее рассматривают совместно с экстраполятором. При этом экстраполятор стараются строить таким образом, чтобы ослабить влияние эффекта дискретизации по времени на работу системы (12).

Передаточная функция экстраполятора может быть найдена как изображение по Лапласу его весовой функции, которая имеет вид прямоугольного импульса $1(t)-1(t-T_0)$. Его изображение с учетом теоремы смещения для второго слагаемого:

$$F_{\text{И}}(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}\cdot e^{-sT_0}=\frac{1-e^{-sT_0}}{s}=W_{\text{Э}}(s).$$

В экстраполяторе первого порядка сигнал на выходе в течение всего такта изменяется по линейному закону:

$$x_1(t-nT_0)=x[n]+\frac{\nabla x[n]}{T_0}(t-nT_0).$$

В результате в конце такта на выходе экстраполятора будет сигнал

$$x_1[n+1]=x[n]+\nabla x[n]\neq x[n+1],$$

т.е. здесь также есть погрешность восстановления непрерывного сигнала, хотя и меньшая, чем в экстраполяторе нулевого порядка.

Дискретная передаточная функция непрерывной части системы в этом случае должна определяться следующим образом:

$$W(z)=\frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{(1+T_{\text{И}}s)W_{\text{И}}(s)}{T_{\text{И}}s^2}\right\}.$$

$$y[n]=\mathrm{C}(z\mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}\mathrm{B}u[n].$$

Анализ устойчивости и качества дискретных систем

Если представить дискретную передаточную функцию замкнутой импульсной системы в форме

$$\Phi(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_lz^{-l}}{a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_mz^{-m}}, \quad (10)$$

то можно перейти к разностному уравнению, связывающему входной и выходной сигналы системы.

Асимптотическая устойчивость системы определяется корнями характеристического полинома. Для устойчивости дискретной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни $z_i, i=1,2,\ldots,m$ характеристического полинома удовлетворяли условию: $|z_i|<1$. Область устойчивости на комплексной плоскости будет иметь вид круга единичного радиуса.

Возможность использования математического аппарата для импульсных систем обеспечивается на основе дополнительного преобразования дискретной передаточной функции. Преобразование выполняется на основе подстановки:

$$z=\frac{1+w}{1-w}, \quad (11)$$

где w — новая комплексная переменная.

Может быть так же получена новая дискретная передаточная функция замкнутой системы:

$$\Phi(w)=\frac{d_0w^l+d_lz^{l-1}+\ldots+d_l}{c_0w^m+c_1w^{m-1}+\ldots+c_m}, \quad (12)$$

с характеристическим полиномом

$$D(w)=c_0w^m+c_1w^{m-1}+\ldots+c_m. \quad (13)$$

Определим требование к корням полинома (13) для обеспечения устойчивости системы. Оно может быть получено на основе неравенства

$$|z|=\left|\frac{1+w}{1-w}\right|<1$$

или

$$|1+w|<|1-w|.$$

С учетом записи $w=\alpha+j\beta$ получим

$$\sqrt{(1+\alpha)^2+\beta^2}<\sqrt{(1-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Очевидно, что неравенство может быть выполнено только при $\alpha<0$.

Таким образом, область устойчивости для корней характеристического полинома $D(w)$ импульсной системы совпадает с областью устойчивости для корней характеристического полинома $D(s)$ непрерывной системы.

Необходимое условие устойчивости: все коэффициенты характеристического полинома должны быть одного знака. Для систем с характеристическим полиномом первого или второго порядка это условие является необходимым и достаточным.

Для систем с характеристическим полиномом более высокого порядка при выполнении необходимого условия для обеспечения устойчивости требуется выполнение какого-либо достаточного условия (критерия устойчивости).

Критерий Гурвица и другие алгебраические критерии могут быть использованы для полинома $D(w)$ непосредственно.

Частотный критерий устойчивости Найквиста и связанные с ним методы анализа качества и синтеза систем применяются для импульсных систем с использованием псевдо частотных характеристик, получаемых из передаточной функции разомкнутой системы $W(z)$:

$$w = j\frac{T_0}{2}\lambda.$$

Для оценки качества дискретных систем используется тот же набор показателей качества, что и для непрерывных.

1. Применение алгебраического критерия устойчивости Гурвица для определения устойчивости дискретной САУ

Аналог алгебраического критерия устойчивости Гурвица, разработанный для дискретных систем, позволяет анализировать устойчивость замкнутой системы по ее характеристическому полиному $D(w)$. Удобство применения критерия обусловлено тем, что вся процедура анализа сводится к работе с алгебраическими неравенствами, составляемыми из коэффициентов $D(w)$ по простым правилам (13).

Пусть известен характеристический полином замкнутой системы:

$$D(w) = a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Критерий предусматривает работу с матрицей, составленной из коэффициентов полинома $D(w)$ по следующим правилам:

- матрица квадратная размерностью $n \times n$;
- главная диагональ заполняется коэффициентами, начиная с a_1, в порядке возрастания;
- в строки с нечетными номерами заносятся коэффициенты с нечетными номерами в порядке возрастания;
- в строки с четными номерами заносятся коэффициенты с четными номерами, начиная с a_0, в порядке возрастания;
- коэффициенты в строках располагают вблизи главной диагонали, остальные элементы матрицы принимают равными нулю:

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-2} & a_n \end{Vmatrix} \quad (14)$$

При положительном коэффициенте a_0 для устойчивости системы достаточно, чтобы все определители Гурвица были положительны: $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$

Определители Гурвица — это угловые определители матрицы (14), получаемые по известным правилам:

$$\Delta_1 = |a_1| = a_1, \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \ldots$$

Соответственно определитель $\Delta_{n-1} > 0$ получают, отбрасывая n-й столбец и n-ю строку матрицы; определитель Δ_n соответствует всей матрице.

Отметим следующие свойства определителей Гурвица:

1. Если выполнено необходимое условие устойчивости, то всегда $\Delta_1 > 0$.
2. При раскрытии Δ_n по последнему столбцу получим $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$, так как все элементы данного столбца, кроме a_n, равны нулю. Если выполнено необходимое условие устойчивости, то $a_n > 0$. Следовательно, знак Δ_n, совпадает со знаком Δ_{n-1}, и отдельно проверять его также не требуется. В результате применение критерия Гурвица сводится к проверке n-2 неравенств, получаемых на основе определителей с Δ_2 по Δ_{n-1}.

На основе критерия Гурвица могут быть обнаружены границы устойчивости. Признаком нахождения системы на Границе устойчивости является равенство нулю последнего определителя ($\Delta_n = 0$. С учетом соотношения $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$ это может быть вызвано равенством нулю любого из сомножителей. Доказано, что при $a_n = 0$ имеет место апериодическая граница устойчивости, при $\Delta_{n-1} = 0$ — колебательная граница устойчивости.

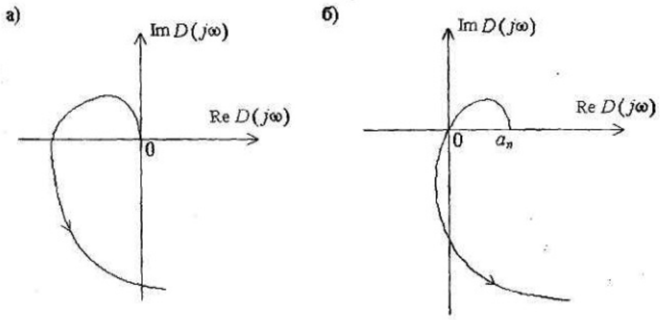

Рис. 1

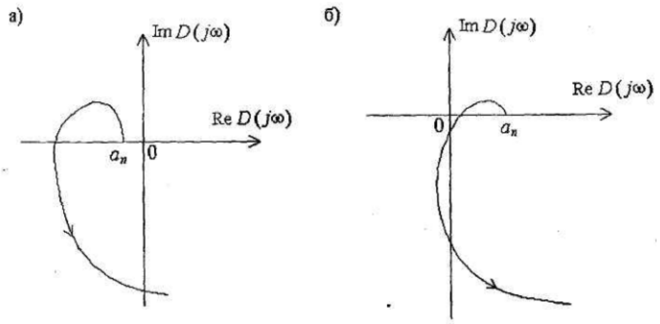

Рис. 2

2. Применение частотного критерия устойчивости Михайлова для определения устойчивости дискретной САУ

Наиболее широкие возможности анализа устойчивости дискретных САУ предоставляют аналоги частотных критериев устойчивости Михайлова и Найквиста.

Аналог критерия устойчивости Михайлова предусматривает работу с характеристическим полиномом замкнутой системы $D(w) = a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \ldots + a_n$

В результате некоторых преобразований получим так называемый характеристический комплекс:

$$D(j\lambda) = a_0 (j\lambda)^n + a_1 (j\lambda)^{n-1} + \ldots + a_{n-1} j\lambda + a_n =$$
$$= X(\lambda) + jY(\lambda) = D(\lambda) e^{j\varphi D(\lambda)},$$

где $X(\lambda) = a_n - a_{n-2}\lambda^2 + a_{n-4}\lambda^4 - \ldots,$

$$Y(\lambda) = a_{n-1}\lambda - a_{n-3}\lambda^3 + \ldots,$$

$D(\lambda) = |D(j\lambda)|, \varphi_D(\lambda) = \arg D(j\lambda),$ — соответственно вещественная и мнимая части, модуль и аргумент характеристического комплекса.

Для устойчивой системы при изменении частоты от 0 до ∞ полное приращение аргумента характеристического комплекса составит $\Delta\varphi_D = n\pi/2$, где n — порядок характеристического полинома системы, В этом И состоит необходимое и достаточное условие устойчивости замкнутой системы, называемое критерием устойчивости Михайлова (14).

Если обратиться к комплексной плоскости, можно сформулировать рассматриваемый критерий следующим образом: для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы полный угол поворота изображающего вектора $D(j\lambda)$ на комплексной плоскости при изменении частоты от 0 до ∞ составил $n\pi/2$, где n— порядок характеристического полинома системы.

Выполнение этого условия можно проверять путем построения кривой Михайлова

Для системы, находящейся на апериодической границе устойчивости ($a_n = 0$), кривая Михайлова выходит из начала координат (рис. 1, *а*), для системы, находящейся на колебательной границе устойчивости, пройдет через начало координат (рис. 1, *б*): $D(j\lambda_0) = X(\lambda_0) + jY(\lambda_0) = 0$, т.е. одновременно $X(\lambda_0) = 0$ и $Y(\lambda_0) = 0$.

Примеры кривых Михайлова для неустойчивых систем приведены на рис. 2.

3. Применение частотного критерия устойчивости Найквиста для определения устойчивости дискретной САУ

Критерий Найквиста наиболее широко используется на практике по следующим причинам:

1. передаточная функция и частотные характеристики для разомкнутой системы могут быть получены проще, чем для замкнутой;
2. кроме анализа устойчивости обеспечивается определение ряда показателей качества системы;
3. для анализа устойчивости и качества системы не требуется математическая модель, так как критерий допускает работу с экспериментально полученными частотными характеристиками;
4. критерий Найквиста положен в основу достаточно простых и удобных процедур синтеза систем;
5. «классический» вариант критерия разработан для случая единичной отрицательной обратной связи, но легко распространяется и на общий случай.

Критерий Найквиста проще всего может быть получен как следствие критерия Михайлова.

Отметим следующие обстоятельства:

1. Для системы с единичной отрицательной обратной связью имеет место соотношение

$$1+W(j\lambda)=\frac{W(j\lambda)}{\hat{O}(j\lambda)}=\frac{R(j\lambda)/Q(j\lambda)}{R(j\lambda)/D(j\lambda)}=\frac{D(j\lambda)}{Q(j\lambda)}.$$

   Следовательно, при любом изменении частоты полное приращение аргумента $\Delta\varphi_{1-W}$ комплексной функции $1+W(j\lambda)$ равно разности полных приращений аргумента $\Delta\varphi_D$ характеристического комплекса замкнутой системы $D(j\lambda)$ и $\Delta\varphi_Q$ характеристического комплекса разомкнутой системы Q: $\Delta\varphi_{1+W}=\Delta\varphi_D-\Delta\varphi_Q$.
2. Для устойчивой замкнутой системы при изменении частоты от $-\infty$ до ∞ полное приращение аргумента $D(j\lambda)$ составит $\Delta\varphi_D=n\pi$.
3. Полное приращение аргумента Q при изменении частоты от $-\infty$ до ∞ составит $\Delta\varphi_Q=n\pi-2l\pi$, где l — количество корней знаменателя передаточной функции разомкнутой системы, лежащих в правой полуплоскости.

В результате получим необходимое и достаточное условие устойчивости замкнутой системы в следующей форме: полное приращение аргумента $1+W(j\lambda)$ при изменении частоты от $-\infty$ до ∞ должно составлять $\Delta\varphi_{1-W}=\Delta\varphi_D-\Delta\varphi_Q=n\pi-n\pi+2/\pi=2/\pi$ где l — количество корней знаменателя передаточной функции разомкнутой системы, лежащих в правой полуплоскости.

Таким образом, получаем основную формулировку критерия устойчивости Найквиста: для устойчивости замкнутой дискретной системы необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты $-\infty$ до ∞, угол поворота изображающего вектора ЧПФ разомкнутой системы $W(j\lambda)$ относительно точки с координатами $(-1;0j)$ составил $2l\pi$, где l — количество корней знаменателя передаточной функции разомкнутой системы, лежащих в правой полуплоскости.

Заключение

В обзоре представлена область применения дискретных систем управления. Дано определение математических моделей дискретных автоматических систем. Рассмотрены понятия передаточных функций и частотных характеристик дискретных систем, способы их определения. Изложены методы анализа и синтеза дискретных систем. Приводится анализ устойчивости и качества дискретных систем

ЛИТЕРАТУРА

1. Деменков Н. П. Управление в технических системах: учебник для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 27.03.04 «Управление в технических системах». / Н. П. Деменков, Е. А. Микрин. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. — 452 с.
2. Дискретные модели в теории управляющих систем: тр. IX Междунар. конф. (Москва и Подмосковье, 20–22 мая 2015 г.) / Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова; [отв. ред.: В. Б. Алексеев, Д. С. Романов, Б. Р. Данилов]. — М.: Макс Пресс, 2015. — 284 с.
3. Рубанов В. Г. Проектирование непрерывных и дискретных систем автоматического управления: учеб. пособие для студентов направлений бакалавриата 27.03.04 –Управление в технических системах, 15.03.04 — Автоматизация технологических процессов и производств, 15.03.06 — Мехатроника и робототехника / В. Г. Рубанов, Е. М. Паращук; М-во образования и науки РФ, Белгород. гос. технол. ун-т им. В. Г. Шухова. — Белгород: Изд-во БГТУ, 2015. — 105 с.
4. Севастьянов Б. Г. Теория и практика реализации дискретных систем управления // Материалы XI Межрегион. науч.-практ. конф., (Волжский, 8–11 дек. 2015 г.) / М-во образования и науки РФ; Администрация Волгогр. обл.; Администрация гор. округа. г. Волжский. — Волжский, 2015. — С. 9–10.
5. Ермешев М. И. Обзор методов исследования дискретных систем автоматического управления / М. И. Ермешев, В. Ф. Шишлаков // Завалишенские чтения 16, (Санкт-Петербург, 11–15 апр. 2016 г.) / С.-Петерб. гос. ун-т аэрокосм. приборостроения: сб. докл. — СПб., 2016. — С. 108–113.
6. Абу-Абед Ф. Н. Моделирование динамических и дискретных систем: учеб. пособие: [для студентов, обучающихся по направлению 09.03.01 Информатика и вычислительная техника] / Ф. Н. Абу-Абед, В. А. Григорьев; Тверской гос. техн. ун-т (ТвГТУ). — Тверь, 2015. — 151 с.
7. Голик С. Е. Вычислитель вектора состояния дискретных систем управления / С. Е. Голик, А. В. Никоза, А. А. Самсонов // Современные тенденции развития образования, науки и технологий: сб. науч. тр. по материалам VI Междунар. науч.-практ. конф. (Москва, 30 нояб. 2018 г.) / под общ. ред. А. В. Туголукова. — М., 2018. — С. 193–196.
8. Голиков К. А. Алгоритм обучения систем с дискретным управлением // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — М., 2019. — Т. 23, № 1. — С. 7–38.
9. Даник Ю. Э. Регулирование нелинейных дискретных систем управления // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. — Воронеж, 2015. — Т. 3, № 7–1 (18–1). — С. 334–338.
10. Иванов В. А. Теория дискретных систем автоматического управления: учеб. пособие / В. А. Иванов, А. С. Ющенко. — 2-е изд. — М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. — 352 с.
11. Истратов Р. А. Исследование функционирования непрерывно-дискретных систем управления // Динамические системы в науке и технологиях (DSST-2018): Междунар. конф. (Крым, Алушта, 17–21 сент. 2018 г.): тез. докл. / Крымский федер. ун-т им. В. И. Вернадского [и др.; отв. ред. О. В. Анашкин]. — Симферополь, 2018. — С. 114–115.

12. Минимаксная задача для дискретной модели системы управления с параметрами [Электронный ресурс] / С. Отакулов, Ф. Х. Холиярова, О. П. Жиянов, Э. Б. Курбонов // Точная наука: электронный журнал.— 2018.— № 23.— С. 5–8.— Режим доступа свободный: https://t-nauka.ru/wp-content/uploads/v23.pdf (дата обращения 31.05.2019).
13. Пулатова М. И. Определение области притяжения нелинейных дискретных систем управления / М. И. Пулатова., А. Хадиев // Научно-технический прогресс: актуал. и перспектив. направления будущего: VII Междунар. науч.-практ. конф. (Кемерово, 6 марта 2018 г.) / Западно-Сибир. науч. центр: сб. докл.: в 2 т.— Кемерово, 2018.— Т. 2.— С. 47–48.
14. Разностные уравнения дискретных систем / М. В. Жиров, В. В. Макаров., В. Н. Хохловский., А. В. Гончаров // Современные проблемы и пути их решения в науке, производстве и образовании.— Темрюк, 2018.— № 7.— С. 21–28.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого