

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ВОЗДУШНОГО ПРОСТРАНСТВА НА ОСНОВЕ ШЕСТИУГОЛЬНОЙ РЕШЕТКИ

MODELING THE STRUCTURE OF AIR SPACE BASED ON A HEXAGONAL GRID

**D. Novichkov
S. Fedko**

Summary. The peculiarity of the airspace, from the point of view of its use, is that it consists of separate elements. The combination of these elements makes up the structure of the airspace, which can change over time both for subjective reasons — when designed by specialists, and for objective reasons — due to changes in the parameters of individual elements, which is especially typical for wartime. The paper presents a technique for establishing the structure of the airspace using a hexagonal lattice graph. The influence of the safe distance on the cell size of the hexagonal lattice is considered. The dependence between the cell size and the flight parameters of aircraft has been determined. The impact of flight speed and acceleration on the safe distance between aircraft has been assessed. Numerical experiments have been carried out to calculate the size of the hexagonal lattice, taking into account various speeds and accelerations of aircraft.

Keywords: airspace structure, elements of airspace structure, modeling processes for establishing airspace structure, safe distance.

Новичков Денис Вячеславович

Преподаватель, Краснодарское высшее военное авиационное училище летчиков
dennovkrd@mail.ru

Федько Сергей Викторович

Кандидат военных наук, доцент, докторант,
Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил
«Военно-воздушная академия имени профессора
Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)
fedko.S.V.78@mail.ru

Аннотация. Особенностью воздушного пространства, с точки зрения его использования, является то, что оно состоит из отдельных элементов. Совокупность этих элементов составляет структуру воздушного пространства, которая может изменяться во времени как по субъективным причинам — при проектировании специалистами, так и по объективным причинам — в связи с изменением параметров отдельных элементов, что особенно характерно для военного времени. В работе представлена методика установления структуры воздушного пространства с помощью графа шестиугольной решетки. Рассмотрено влияние безопасной дистанции на размер ячейки шестиугольной решетки. Определена зависимость между размером ячейки и параметрами полета воздушных судов. Проведена оценка влияния скорости полета и ускорения на безопасную дистанцию между воздушными судами. Проведены численные эксперименты для расчета размера гексагональной решетки с учетом различных скоростей и ускорений воздушных судов.

Ключевые слова: структура воздушного пространства, элементы структуры воздушного пространства, моделирование процессов установления структуры воздушного пространства, гексагональная решетка.

Введение

Воздушное пространство (ВП) является средой для полётов летательных аппаратов, а также осуществления иной деятельности множеством разнородных пользователей ВП.

Для того, чтобы безопасно использовать ВП необходима организация его использования, которая предусматривает обеспечение безопасного воздушного движения и включает в себя несколько этапов, самый первым и важнейшим из которых является установление структуры ВП. Под структурой ВП будем понимать совокупность ограниченных в вертикальной и горизонтальной плоскости элементов ВП, предназначенных для осуществления деятельности по его использованию. Под элементами ВП подразумеваются маршруты и коридоры пролета, по которым перемещаются воздушные суда, границы запретных зон, зон ограничения полетов, районы аэродромов и другие.

Особенности установления структуры ВП в мирное и военное время будут отличаться следующим:

- сложностью структуры ВП из-за большого количества разнообразных пользователей ВП;
- динамикой структуры ВП за счет изменения положения элементов структуры ВП с определенной дискретностью;
- влиянием на структуру ВП вероятностей поражения авиации средствами ПВО.

Для учета этих особенностей в военное время необходимы новые подходы формирования структуры ВП из-за кардинальных отличий между мероприятиями установления структуры ВП в мирное и военное время, а также отсутствия методики установления структуры ВП в военное время. В связи с этим появляется необходимость разработки нового методического аппарата для военного времени.

Стоит отметить, что военное руководство США уделяет особое внимание установлению структуры ВП. Во

время операции «БУРЯ В ПУСТЫНЕ» была разработана общая система наложения сетки, известная как «kill box» для устранения конфликтов между авиацией и другими системами вооружения в перегруженном воздушном пространстве.

Результаты анализа показали, что для установления структуры ВП необходима основа, которую удобно представить в виде графа шестиугольной решетки (гексагональной сети), весовые коэффициенты вершин которого будут отражать вероятность поражения авиации системой ПВО. Методика установления структуры ВП будет включать:

1. Формализацию зоны полета (наложение на плоскость гексагональной сети пересечение линий которой будут формировать узлы, каждому из которых будут определены вероятности поражения);
2. Определение доступности ВП с учетом вероятностей поражения;
3. Формирование коридоров пролета и маршрутов полета, учитывая доступность ВП.

Метод формализации зоны полетов

В связи с этими особенностями появляется необходимость в разработке модели структуры ВП, которая будет отличаться действующей:

1. новой формализованной зоной полетов — основы для установления структуры ВП, в виде графа шестиугольной решетки, который будет рассматриваться не только как граф, но и геометрическая фигура, образованная точками, принадлежащими ребрам этого графа и внутренними точками всех внутренних граней, границы которых являются правильными шестиугольниками [1].
2. порядком деления ВП на отдельные элементы в зависимости от типов воздушных судов, а также их скорости.

С помощью графа шестиугольной решетки (гексагональной сети) можно определить минимально безопасную дистанцию между воздушными судами, а также устанавливать коридоры пролета, наиболее безопасные маршруты при ограниченности доступных объемов ВП в условиях, когда существует множество динамичных элементов ВП.

Известно, что центром правильной шестиугольной ячейки (гексагона) будет являться место пересечения ее диагоналей [2]. Нанесем на решетку положение двух воздушных судов в центрах соседних ячеек (рисунок 1).

Можно утверждать, что расстояние между центрами ячеек — является минимально безопасной дистанцией, которая будет зависеть от размера ячейки (рисунок 2),

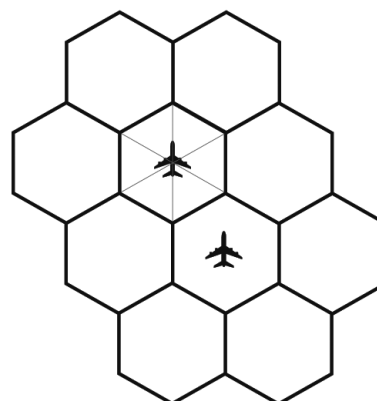


Рис. 1. Положение воздушных судов в ячейках графа шестиугольной решетки

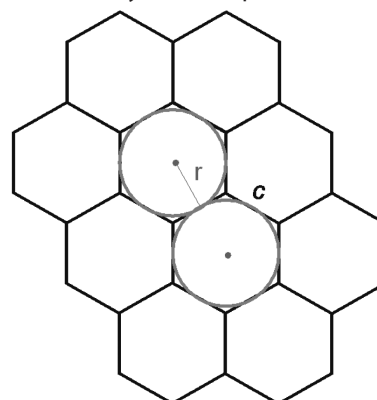


Рис. 2. Вписанные окружности ячеек, принадлежащих графу шестиугольной решетки

следовательно, от длины стороны c будет зависеть минимальная безопасная дистанция при моделировании установления структуры ВП.

Преобразовав классическую формулу нахождения радиуса вписанной окружности правильного многоугольника: $r = \frac{c}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$, в формулу для правильного ше-

стиугольника, получим: $r = \frac{c}{2 \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} c$, где r — радиус вписанной окружности; c — сторона правильного многоугольника; n — количество сторон многоугольника.

Так как дистанция между воздушными судами будет равна 2, выразим радиус вписанной окружности в следующей форме: $r = \frac{Do}{2}$; тогда сторона правильного шестиугольника будет вычисляться по формуле: $c = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{Do}{\sqrt{3}}$.

Таким образом выражена зависимость между размером шестиугольной ячейки и минимальным безопасным интервалом между воздушными судами.

Математическое моделирование

Далее необходимо определить зависимость размера ячейки гексагональной сети от параметров движения воздушных судов. В интересах моделирования введем следующие обозначения:

ВС — воздушное судно; $ВС_1$ — воздушное судно «Ведущий»; $ВС_2$ — воздушное судно «Ведомый»; t — время; D_0 — заданное расстояние (дистанция) между $ВС_1$ и $ВС_2$ во время полёта (км); V_0 — заданная скорость полёта (км/мин); $V(t)$ — мгновенная скорость (км/мин, скорость в момент времени t); ΔV — максимальный абсолютный прирост скорости во время полёта (км/мин); $V_{\min} = V - \Delta V$ — минимальная скорость полёта, до которой возможно непредвиденное (быстрое) уменьшение скорости V_0 (км/мин, например, выключение двигателей); τ — средний промежуток времени, в течение которого скорость V_0 уменьшается до значения V_{\min} ;

$V_{\max} = V_0 + \Delta V$ — максимальная скорость полёта, до которой возможно непредвиденное (быстрое) увеличение скорости V_0 (км/мин, например, движение на форсаже); a — ускорение, обеспечивающее увеличение скорости; τ_a — средний промежуток времени, в течение которого скорость V_0 увеличивается до значения V_{\max} с ускорением a .

Уменьшение дистанции D_0 между $ВС_1$ и $ВС_2$ во время полёта из-за непредвиденных обстоятельств может произойти, например, в случае, если скорость $ВС_1$ будет уменьшаться, а скорость $ВС_2$ будет увеличиваться. Такое изменение скоростей (с заданным выше максимальным абсолютным изменением ΔV) может привести *опасному сближению* $ВС_1$ и $ВС_2$, а в итоге к столкновению.

Поэтому возникает задача оценки безопасной дистанции полёта D_0 с возможностью её уменьшения не более чем на $\Pi\%$. При переходе к нормированной величине это составляет $0.01 \cdot \Pi \cdot D_0$. Обозначив текущую дистанцию между $ВС_1$ и $ВС_2$ через D , ясно, что в описанной ситуации будет $D < D_0$. Следовательно, математически требуется обеспечить выполнение неравенства: $|D - D_0| \leq 0.01 \cdot \Pi \cdot D_0$.

Предположенную выше возможность достаточно быстрого изменения скорости V_0 до значений V_{\min} и V_{\max} в течение времени τ выразим математически. Примем линейные законы уменьшения и увеличения скоростей [3] $ВС_1$ и $ВС_2$ при их изменении.

В терминах рассматриваемой модели линейная функция изменения скорости имеет вид: $y = V(t) = V_0 + kt$, где k — угловой коэффициент прямой (тангенс угла её наклона к оси Ot , отсчитываемый против часовой стрелки). Знак коэффициента k зависит от того, является функ-

ция $V(t)$ убывающей или возрастающей. Если $V(t)$ убывает, то $k < 0$, если возрастает, то $k > 0$ (рисунок 3):

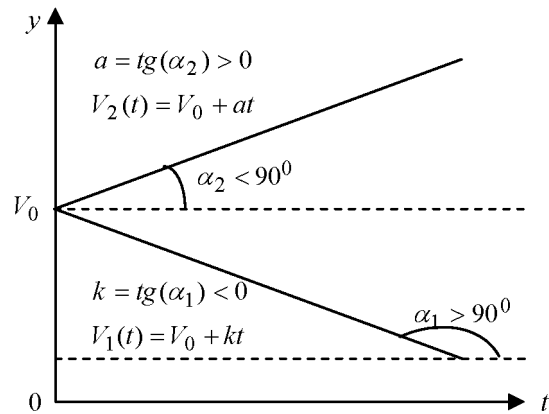


Рис. 3 Убывание и возрастание линейных функций

Постепенное уменьшение скорости $ВС_1$ выразим функцией: $V(t) = V_0 + kt = V_0 - |k|t$, модуль $|k|$ взят, чтобы подчеркнуть знаком «-» факт уменьшения скорости при $k < 0$; величина k_1 имеет смысл отрицательного ускорения, возникающего из-за трения воздуха при уменьшении поступления топлива в двигатель.

Постепенное увеличение скорости $ВС_2$ с ускорением a выразим функцией: $V_2(t) = V_0 + at$.

При $t = \tau$ и $t = \tau_a$ получим:

$$V_{\min} = V_0 - \Delta V = V_1(\tau) = V_0 - |k|\tau,$$

$$V_{\max} = V_0 + \Delta V = V_2(\tau_a) = V_0 + a\tau_a.$$

Выражая из обоих уравнений k и a , приходим к равенствам:

$$|k| = \frac{\Delta V}{\tau}; \quad a = \frac{\Delta V}{\tau_a}.$$

Расстояния S_1 и S_2 , пройденные $ВС_1$ и $ВС_2$ за времена τ и τ_a со скоростями $V_1(t)$ и $V_2(t)$, выражаются соответственно определёнными интегралами:

$$S_1 = \int_0^\tau V_1(t) dt = \int_0^\tau (V_0 - kt) dt = V_0\tau - \frac{1}{2}k\tau^2 = \left(V_0 - \frac{\Delta V}{2} \right) \tau,$$

$$S_2 = \int_0^{\tau_a} V_2(t) dt = \int_0^{\tau_a} (V_0 + at) dt = V_0\tau_a + \frac{\Delta V\tau_a}{2} = \left(V_0 + \frac{\Delta V}{2} \right) \tau_a,$$

Число

$$\sigma = S_1 + S_2 = \left(V_0 - \frac{\Delta V}{2} \right) \tau + \left(V_0 - \frac{\Delta V}{2} \right) \tau_a = 2V_0\tau - \frac{\Delta V}{2}(\tau + \tau_a)$$

примем за вероятное отклонение пары $BC_1 \leftrightarrow BC_2$ по дистанции при прямолинейном полёте в результате изменения их скоростей.

Изобразим ситуацию опасного сближения BC_1 и BC_2 (рисунок 4):

В теории вероятностей известно, что вероятность того, что непрерывная случайная величина \bar{x} отклонится от своего математического ожидания a меньше чем на ε , равна [4]: $P(|\bar{x} - a| < \varepsilon) = 2\bar{\Phi}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$, где $\bar{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — есть интегральная функция Лапласа [5].

В рассматриваемой нами модели $\bar{x} = D$, $a = D_0$, $\varepsilon = 0.01 \cdot \Pi \cdot D_0$. Так как должно выполняться требование $|D - D_0| < 0.01 \cdot \Pi \cdot D_0$, то имеем равенство $\bar{\Phi}\left(\frac{0.01 \cdot \Pi \cdot D_0}{\sigma}\right) = 0.005 \cdot \Pi$. Отсюда с помощью таблицы значений функции Лапласа [6] можно найти значение аргумента:

$$x = \frac{0.01 \cdot \Pi \cdot D_0}{\sigma}$$

Тогда безопасное расстояние D_0 вычисляется по формуле:

$$D_0 = \frac{100}{\Pi} \cdot \sigma \cdot x.$$

Численные эксперименты

Далее переходим к численным экспериментам. Проведём вычисления при следующих трёх значениях курсовых скоростей:

$$V_0 = 800 \text{ (км/ч)} = 13.33 \text{ (км/мин)},$$

$$V_0 = 850 \text{ (км/ч)} = 14.17 \text{ (км/мин)},$$

$$V_0 = 900 \text{ (км/ч)} = 15.00 \text{ (км/мин)}.$$

Выберем значение

$$\Delta V = 50 \text{ (км/ч)} = 0.833 \text{ (км/мин)}.$$

Промежуток времени τ , в течение которого происходит замедление BC_1 , зависит от его типа. Пусть $\tau = 20$ (сек) = $\frac{1}{3}$ (мин).

Для возможности построения таблиц безопасных расстояний между BC_1 и BC_2 выберем увеличение скорости BC_2 при фиксированном дискретном наборе ускорений $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Пусть $n = 5$. Тогда определяются промежутки времени τ_{aj} , $j = 1, 2, 3, 4, 5$, увеличения скорости V_0 до значения $V_{\max} = V_0 + \Delta V$ при заданном ускорении

$$a_j; \tau_{aj} = \frac{\Delta V}{a_j}.$$

Пусть

$$a_1 = 10, a_2 = 20, a_3 = 30, a_4 = 40, a_5 = 50 \text{ (км/мин}^2\text{)},$$

тогда получим таблицу значений соответствующих времён:

Таблица 1.

Набор ускорений и промежутки времени увеличения скорости

	1	2	3	4	5
a_j , км/мин ²	10	20	30	40	50
τ_{aj} , мин	1.1471	0.708	0.472	0.354	0.283

Соответствующие значения вероятных отклонений вычисляются по формуле: $\sigma_j = 2V_0\tau - \frac{\Delta V}{2}(\tau + \tau_{aj})$, $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ (таблица 2)

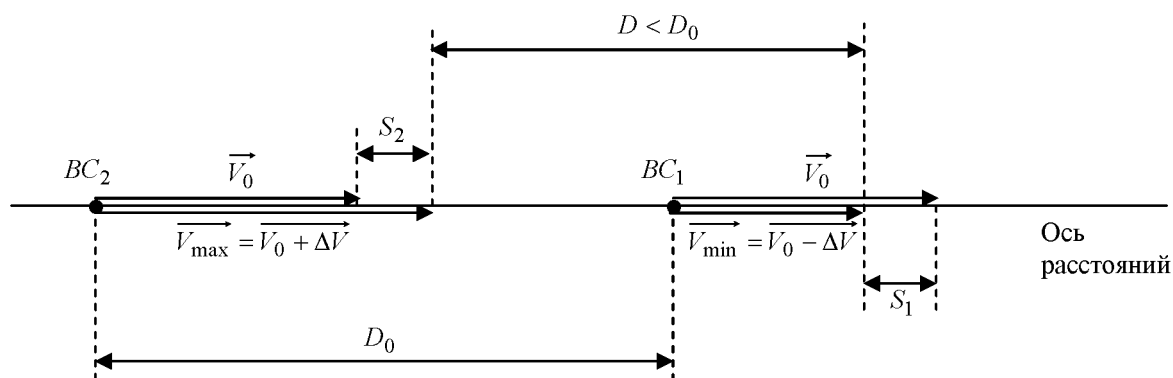


Рис. 4. Схема опасного сближения BC_1 и BC_2 из-за уменьшения и увеличения их курсовых скоростей соответственно

Таблица 2.

Значения вероятных отклонений

	1	2	3	4	5
$\sigma_j = 2V_0\tau - \frac{\Delta V}{2}(\tau + \tau_{aj}), \text{ км}$	8.160	8.455	8.553	8.602	8.632

Выберем значение $\Pi = 1$ (%). Тогда

$$\bar{\Phi}\left(\frac{0.01 \cdot D_0}{\sigma}\right) = 0.005.$$

Нужная нам часть таблицы значений функции $\bar{\Phi}(x)$ имеет вид (таблица 3):

Таблица 3.

Часть таблицы значений функции $\bar{\Phi}(x)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03
$\bar{\Phi}(x)$	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120

Значение функции $\bar{\Phi}(x) = 0.005$ попадает в интервал между значениями $F_1 = 0.004$ и $F_2 = 0.008$. Тогда соответствующее искомое значение аргумента x попадает в интервал между значениями $x_1 = 0.01$ и $x_2 = 0.02$.

Для нахождения значения x применим метод линейного интерполирования, заключающийся в следующем:

отрезок $[F_1 = 0.004, F_2 = 0.008]$ разделим на n (пусть $n = 10$) равных частей точками

$$f_0 = F_1 = 0.004, f_{j+1} = f_j + \Delta f,$$

$$\Delta f = \frac{F_2 - F_1}{n} = \frac{0.008 - 0.004}{10} = 0.0004,$$

$$j = 0, 1, 2, 3, \dots, 10.$$

От точки $f_0 = F_1 = 0.004$ до точки $f_{10} = F_2 = 0.008$ надо «пройти» некоторое расстояние, то есть сделать определенное число шагов, последний из которых может оказаться нецелым. Обозначим через $\alpha > 0$ множитель, на который необходимо умножить длину шага Δf и получим произведение $\alpha \cdot \Delta f$. С помощью равенства $\bar{\Phi}(x) = 0.005$ составим уравнение:

$$\bar{\Phi}(x) = F_1 + \alpha \cdot \Delta f = 0.004 + \alpha \cdot 0.0004 = 0.005,$$

отсюда находим:

$$\alpha = \frac{F_2 - F_1}{\Delta f} = \frac{0.005 - 0.004}{0.0004} = 2.5.$$

Аналогично разбив отрезок $[x_1 = 0.01, x_2 = 0.02]$ на $n = 10$ частей, получим шаг:

$$\Delta x = \frac{x_2 - x_1}{n} = \frac{0.02 - 0.01}{10} = 0.001..$$

Тогда искомое значение аргумента x равно:

$$x = x_1 + \alpha \cdot \Delta x = 0.01 + 2.5 \cdot 0.001 = 0.013.$$

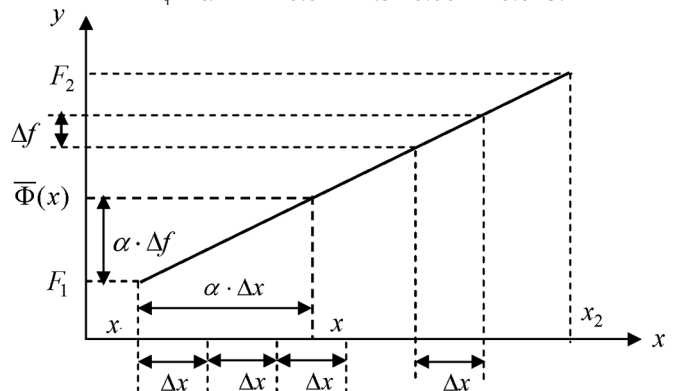


Рис. 5. Графическая иллюстрация метода линейного интерполирования

Теперь находим D_{0j} по формуле:

$$D_{0j} = \frac{100}{\Pi} \cdot \sigma_j \cdot x = 100 \cdot \sigma_j \cdot x.$$

После чего подставляем D_{0j} в формулу для расчета стороны ячейки $c = \frac{D_0}{\sqrt{3}}$ и получаем сводную таблицу (таблица 4):

Таблица 4.

Сводная таблица безопасных дистанций для курсовых скорости 800 (км/ч), 850 (км/ч), 900 (км/ч)

	1	2	3	4	5	
$a_j, \text{ км/мин}^2$	10	20	30	40	50	
$\tau_{aj}, \text{ мин}$	1.147	0.708	0.472	0.354	0.283	
$\sigma_j = 2V_0\tau - \frac{\Delta V}{2}(\tau + \tau_{aj}), \text{ км}$	800	8.160	8.455	8.553	8.602	8.632
	850	8.715	9.010	9.109	9.158	9.187
	900	9.271	9.566	9.664	9.714	9.743
$D_{0j} = \frac{100}{\Pi} \cdot \sigma_j \cdot x, \text{ км}$	800	10.200	10.569	10.692	10.753	10.790
	850	10.894	11.263	11.386	11.447	11.484
	900	11.589	11.957	12.080	12.142	12.179
$c, \text{ мм}$	800	5.89	6.1	6.17	6.2	6.23
	850	6.29	6.5	6.57	6.61	6.63
	900	6.69	6.9	6.97	7.01	7.03

На заключительном этапе, на основе расчетов строится гексагональная сеть вычисленного размера, являющаяся основой для дальнейшего установления структуры ВП.

Выводы

В результате работы была разработан метод формализации зоны полетов для дальнейшего установления

структуры ВП на основе графа шестиугольной решетки (гексагональной сети), рассчитана минимальная безопасной дистанции на основе метода линейного интерполирования, с помощью которой установлена зависимость размера шестиугольной решетки от параметров полета ВС.

Результат работы может быть использован в процессе моделирования процесса установления структуры ВП, расчета коридоров пролета и проектирования маршрутов полета ВС, основываясь на доступности ВП, вычисляемой с помощью расчета вероятностей поражения в вершинах графа шестиугольной решетки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иржавский П.А., Циклические свойства топологических графов шестиугольной решётки. Дискретный анализ и исследование операций. 2015, том 22, выпуск 2. С. 27–48.
2. Электронный ресурс. Режим доступа: <https://wiki.fenix.help/matematika/radius-okruzhnosti-vpisannoj-v-pravilnyj-shestiugolnik> (дата обращения 24.03.2024).
3. Электронный ресурс. Режим доступа: https://www.sch2.ru/images/Metod_materials/lin_func.pdf (дата обращения 24.03.2024)
4. Электронный ресурс. Режим доступа: <https://www.stat.cmu.edu/~larry/=stat325.01/chapter5.pdf> (дата обращения 24.03.2024).
5. Гутова, Е.В. Вычисление интегральной функции Лапласа с помощью ряда Маклорена. Актуальные вопросы фундаментальных наук в техническом ВУЗе: Сборник научных статей. Выпуск 3. 2021. С. 223–227.
6. Электронный ресурс. Режим доступа: <https://kvm.gubkin.ru/pub/fan/laplasetable2.pdf> (дата обращения 24.03.2024)

© Новичков Денис Вячеславович (dennovkrd@mail.ru); Федько Сергей Викторович (fedko.S.V.78@mail.ru)
Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»