DOI 10.37882/2223–2966.2020.09.05

ОПЕРАЦИИ НАД K-ОДНОРОДНЫМИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫМИ ГИПЕРГРАФАМИ

Берецкий Игорь Сергеевич
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
ISberetskij@mai.ru
Ирбитский Илья Сергеевич
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
ILSirbitskij@mai.ru
Егорова Евгения Кирилловна
К.ф.-м.н., доцент, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
egorovaek@mati.ru
Мокряков Алексей Викторович
К.ф.-м.н., доцент, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет); доцент, Российский государственный университет имени А. Н. Косыгина
MokryakovAlVik@gmail.com

OPERATIONS ON K-HOMOGENEOUS EXTREME HYPERGRAPHS

I. Beretskiy
I. Irbitskiy
E. Egorova
A. Mokryakov

Summary. This paper considers perfect and extreme hypergraphs that have special properties. One of them is an additional form of description, the database. The base is a shorter and more understandable form of writing an extreme hypergraph. Since only one database uniquely corresponds to a single hypergraph, you can work with them without any danger of misinterpreting the data. When interacting with hypergraphs, you often need to perform some arithmetic operations with them. In this paper, we consider how various operations affect such properties of hypergraphs as perfection and extremality.

Keywords: hypergraph, logic algebra, complex, extreme hypergraph, k-homogeneous hypergraph.

Аннотация. В работе рассматриваются совершенные и экстремальные гиперграфы, которые обладают особыми свойствами. Одним из них является дополнительная форма описания, база. База — это более краткая и понятная форма записи экстремального гиперграфа. Так как одному гиперграфу однозначно соответствует только одна база, с ними можно работать без какой-либо опасности неправильной интерпретации данных. В процессе взаимодействия с гиперграфами часто появляется необходимость провести с ними какие-либо арифметические операции. В данной работе рассматривается то, как различные операции влияют на такие свойства гиперграфов как совершенность и экстремальность.

Ключевые слова: гиперграф, алгебра логики, комплекс, экстремальный гиперграф, k-однородный гиперграф.

Введение

Теория графов применяется в различных областях человеческой деятельности: химии, логистике, маршрутизации данных в интернете, информатике, программировании. Гиперграфы имеют не менее широкое применение: в производстве [1], радиоэлектронике [2], информационно-коммуникационных технологиях [3], образовании [4], программировании [5], экономике [6], оптимизации [7], алгебраической теории [8], криптографии [9].

Как видно, гиперграфы используются повсеместно. При этом вы каждой из сфер над ними выполняются те или иные арифметические операции [10]. На их анализ и направлена данная работа.

Математический аппарат

Гиперграф [11–12] — это обобщение графа, в котором каждым ребром могут соединяться не только две вершины, но и любые подмножества вершин [13].

Для обозначения количества вершин, которое соединяет ребро графа, введено понятие *однородности* [14]. Однородность означает то, что у рассматриваемых гиперграфов размерность всех рёбер одинакова. Например, граф без петель это 2-однородный гиперграф,

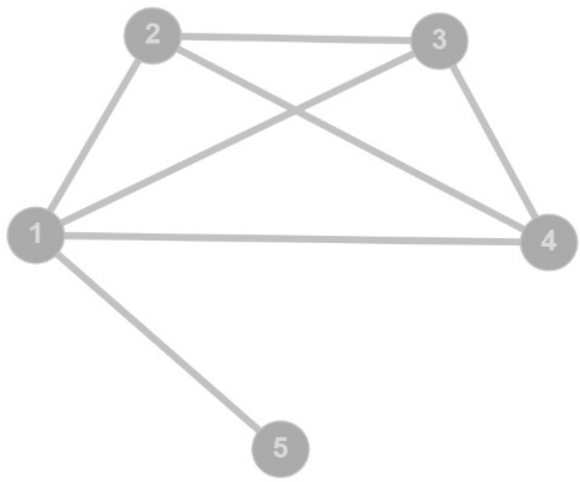

Рис. 1. Гиперграф G_3

у которого каждое ребро соединяет 2 вершины. У 3-однородного гиперграфа каждое ребро соединяет 3 вершины, и так далее.

В данной работе исследуются операции над совершенными и экстремальными гиперграфами. *Совершенность* [15] проявляется тогда, когда не существует изоморфного гиперграфа с тем же вектором степеней, как у рассматриваемого графа. *Экстремальность* [16] проявляется тогда, когда выполняется совершенность и вектор степеней вершин гиперграфа упорядочен по не возрастанию.

Для определения совершенности и экстремальности гиперграфов мы будем рассматривать их вектора с помощью алгоритма Мокрякова [17–18]. Для этого добавим несколько понятий.

Пусть вектор A из $\mathbb{Z}_+^n$ есть реализуемый в граф вектор и {G(A)} — множество его реализаций.

Вектор A из $\mathbb{Z}_+^n$, где n ≥ 2, называется *совершенным*, если |{G(A)}|=1. При этом единственная реализация G(A) называется *совершенным графом*.

Вектор A из $\overline{\mathbb{Z}}_+^n$где n ≥ 2, называется *экстремальным*, если A — совершенный вектор. При этом единственная реализация G(A) называется *экстремальным графом*.

Операции над гиперграфами

Мы рассмотрели экстремальные и совершенные гиперграфы. Возникает вопрос, как изменятся свойство экстремальности при операциях над экстремальными гиперграфами.

Для проведения операций над гиперграфами мы будем использовать матрицы смежности. Матрица смежности графа G с конечным числом вершин n (пронумерованных числами от 1 до n) — это квадратная матрица A размера n, в которой значение элемента a_{ij} равно числу рёбер из i-й вершины графа в j-ю вершину.

В работе рассматривается следующие операции и их влияние на свойства экстремальности и совершенности результирующих однородных гиперграфов.

Список операций:
1. Дополнение (Отрицание).
2. Объединение (Дизъюнкция).
3. Пересечение (Конъюнкция).
4. XOR.
5. Эквивалентность.
6. Штрих Шеффера.
7. Стрелка Пирса.

Далее применим указанные операции к экстремальным 2-однородным гиперграфам, и выясним, какого вида будут результирующие гиперграфы и их гиперрёбра.

Рассмотрим 2-однородные экстремальные гиперграфы G_3 и G_4.

Для гиперграфа G_3 имеем вектор степеней — (4,3,3,3,1). Матрица смежности:

0	1	1	1	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	0	0	0	0

Для гиперграфа G_4 имеем вектор степеней — (4,4,2,2,2). Матрица смежности:

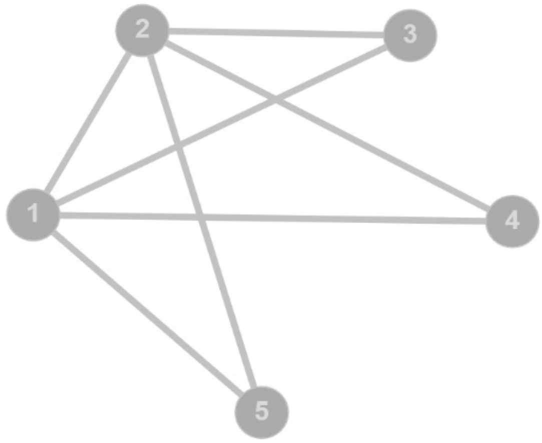

Рис. 2. Гиперграф G_4

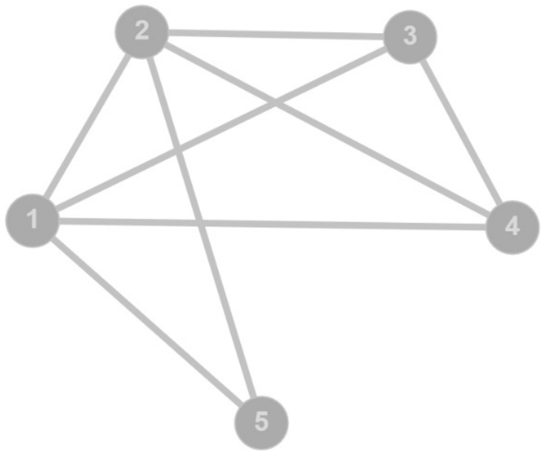

Рис. 3. Результат операции объединение

0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	0	0
1	1	0	0	0

Результаты операций:

1. **Дополнение:** известно, что дополнение экстремального гиперграфа — есть совершенный гиперграф.
2. **Объединение**.

$G \cup G = \{\{3,4\},\{1,5\}\} \cup \{2,5\} = \{\{3,4\},\{2,5\}\}$

0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	0	0	0

Вектор получившегося графа — (4,4,3,3,2). Проверим его на совершенность посредством алгоритма Мокрякова [14]:

A 4 4 3 3 2
A' 3 2 2 1
A'' 1 1 0

Вектор совершенный, а значит результирующий граф является экстремальным.

3. **Пересечение**.

$G \cap G = \{\{3,4\},\{1,5\}\} \cap \{2,5\} = \{\{1,5\}\}$

0	1	1	1	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	0	0
1	0	0	0	0

Вектор получившегося графа — (4,3,2,2,1). Проверим его на совершенность:

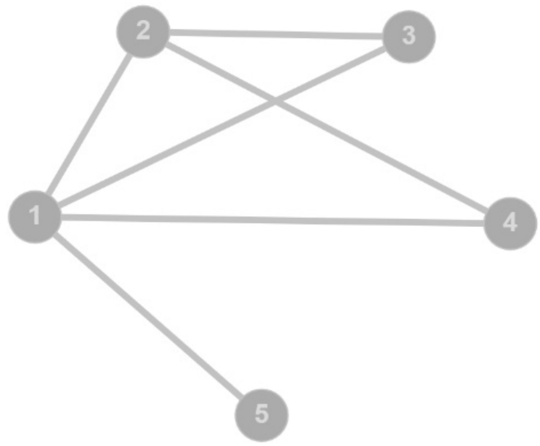

Рис. 4. Результат операции пересечение

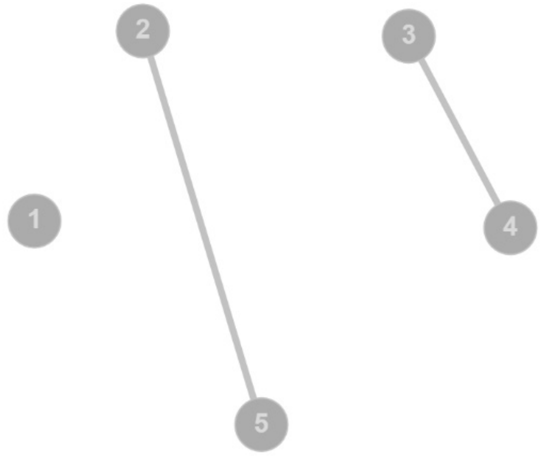

Рис. 5. Результат операции XOR

A 4 3 2 2 1
A' 2 1 1 0

Вектор совершенный, а значит результирующий граф является экстремальным.

4. **XOR**.

$G \oplus G \ = \{\{3{,}4\}, \{1{,}5\}\} \oplus \{2{,}5\} = \{\{2{,}5\}, \{3{,}4\}\}$

0	0	0	0	0
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0

Вектор получившегося графа — (0,1,1,1,1). Очевидно, что получившийся гиперграф не является совершенным, а соответственно и экстремальным.

5. **Эквивалентность**.

$$G_3 \equiv \ G_4 = \left(\{\{3{,}4\}, \{1{,}5\}\} \equiv \{2{,}5\}\right) =$$

$$= \{\{1{,}2\}, \{1{,}3\}, \{1{,}4\}, \{1{,}5\}, \{2{,}3\}, \{2{,}4\}, \{3{,}5\}, \{4{,}5\}\}$$

0	1	1	1	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0

Вектор получившегося графа — (4,3,3,3,3). Проверим его на совершенность:

A 4 3 3 3 3
A' 2 2 2 2
A'' 1 1 2

На 2м шаге мы получили не совершенный вектор, значит и искомый таковым не является. Соответственно результирующий граф является графом общего вида.

6. **Штрих Шеффера**.

$G \mid G \ = \{\{3{,}4\}, \{1{,}5\}\} | \{2{,}5\} = \{\{2{,}5\}, \{3{,}4\}, \{3{,}5\}, \{4{,}5\}\}$

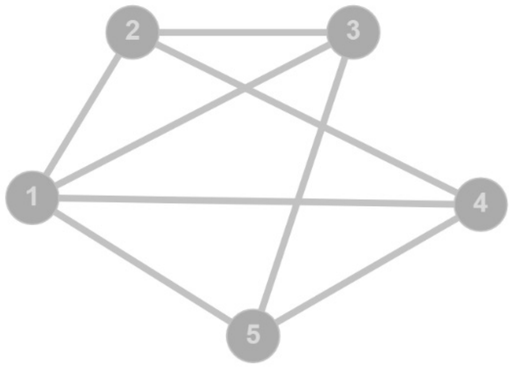

Рис. 6. Результат операции эквивалентность

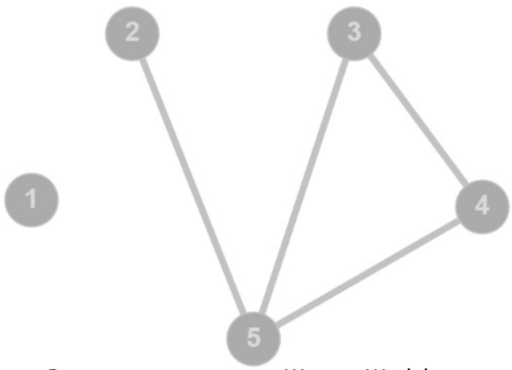

Рис. 7. Результат операции Штрих Шеффера

0	0	0	0	0
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	1	1	1	0

Вектор получившегося графа — (0,1,2,2,3). Проверим его на совершенность:

A 3 2 2 1 0
A' 1 1 0 0

Вектор совершенный, а значит результирующий граф является совершенным, но не экстремальным.

7. **Стрелка Пирса** будет выглядеть аналогично, так как это дополнение к пересечению. Так как результат пересечения экстремальных гиперграфов будет экстремальным гиперграфом, то его дополнение будет совершенным.

Заключение

На основе вышесказанного можно разделить двоичные операции на три категории:

1. Экстремальность результата сохраняется: объединение, пересечение.
2. Экстремальность сменяется совершенностью: дополнение, штрих Шефера, стрелка Пирса.
3. Экстремальность и совершенность не наследуются: эквивалентность, XOR.

Стоит отметить, что если мы не нумеруем вершины гиперграфа, то совершенность и экстремальность суть одно и тоже.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сычев В. А. Автоматизация управления производством на базе методов объектно-ориентированного проектирования // XII всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014 — М.: ИПУ РАН. 2014.— С. 4998–5005.
2. Батищев Д. И. Компоновка радиоэлектронного оборудования ПО блока / Власов С. Е., Старостин Н. В., Филимонов А. В. // Вестник нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2007. № 1. С. 183–188.
3. Васенков А.В., Николаев А. В., Стародумов В. С. Аналитические приложения для управления виртуальной корпорацией // Информационные технологии в проектировании и производстве. 2004. № 1. С. 38–48.

4. Богатенков С. А. Математическая модель управления образовательными траекториями для внедрения информационных технологий // Управление инвестициями и инновациями. 2018. № 2. С. 17–24.
5. Головкин Ю. Б. Применение нечётких гиперграфов в моделях генерации WEB-компонентов / Гусаренко А. С. // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2014. № 9. С. 47–53.
6. Муноз А.Л.Ф. Современные проблемы обеспечения притока иностранных инвестиций в регионы российской федерации // Современные научные исследования и разработки 2015. Сборник трудов I Научно-практической конференции аспирантов, преподавателей, ученых конференции. 2015. С. 1–12.
7. Kostyanoi D.S., Mokryakov A. V., Tsurkov V. I. Hypergraph Recovery Algorithms from a Given Vector of Vertex Degrees // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2014. Т. 53. No 4. P. 511–516.
8. Mokryakov A. V. Hypergraphs as Algebraic Structures // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2011. Т. 50. No 5. P. 734–740.
9. Egorova E.K., Mokryakov A. V., Suvorova A. A. The Concept of Data Encryption Using Extreme Uniform Hypergraphs // Abstracts18th International Conference "Aviation and Cosmonautics — 2019". 2019. P. 409.
10. Егорова Е.К., Есенков А. С., Мокряков А. В. Операции над k-однородными гиперграфами и их векторы степеней вершин // Известия РАН. Теория и системы управления. 2020. № 3. С. 75–80.
11. Зыков А.А. О некоторых свойствах линейных комплексов // Мат. сб. 1949. Вып. 24 (2). С. 163–188.
12. Зыков А. А. Гиперграфы // УМН. 1974. Т. XXIX. № 6 (180). С. 89–154.
13. Egorova E.K., Mokryakov A. V., Vang L. Development of Hypergraph Theory // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2018. V. 57. P. 109–114.
14. Мокряков А.В., Селин П. С., Цурков В. И. Минимакс и восстановление по вектору в графах. М.: Физматлит, 2017. 309 с.
15. Mironov A.A., Mokryakov A. V., Sokolov A. A. About Realization of Integer Non-Negative Numbers Tuple Into 2-Dimensional Complexes // Applied and Computational Mathematics. 2007. Т. 6. No 1. P. 58–68.
16. Миронов А.А., Мокряков А. В. Двумерные комплексы полностью описываемые степенями вершин // Труды Института системного анализа Российской академии наук. 2006. № 10. С. 178–188.
17. Mokryakov A.V., Tsurkov V. I. Reconstructing 2_Comlexes by a Nonnegative Integer_Valued Vector // Automation and Remote Control. 2011. V. 72. No 12. P. 2541–2552.
18. Гурченков А.А., Костяной Д. С., Мокряков А. В. Редукционные методы восстановления некоторого класса гиперграфов // Инженерный журнал: наука и инновации. 2014. № 6 (30). С. 1.