

К ИССЛЕДОВАНИЮ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С КОМБИНИРОВАННЫМ СУХИМ И ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ АСИМПТОТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

TOWARDS THE STUDY OF THE DYNAMICS OF A QUASI-HARMONIC OSCILLATOR WITH COMBINED DRY AND VISCOUS FRICTION BY AN ASYMPTOTIC METHOD

**O. Antonovskaya
A. Besklubnaya**

Summary. The paper presents a study of a quasi-harmonic oscillator with dry and viscous friction. A simplified (Coulomb) mathematical model of dry friction is used. The method of approximate point mappings, which is an asymptotic method, is used to study the dynamics of the system. The problem of the existence of a periodic solution for the oscillator is considered as the problem of the existence of a fixed point for an analytically constructed point mapping that approximates with sufficient accuracy the point mapping generated by the trajectories of the system on the cutting surface. The stability of the desired periodic solution is also determined by the stability of the fixed point of the auxiliary point mapping. The question of the applicability of the results of the approximate study is raised.

Keywords: quasi-harmonic oscillator, dry friction, periodic mode, point mapping method, cutting surface, stability.

Антоновская Ольга Георгиевна

кандидат физико-математических наук, доцент,
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный
архитектурно-строительный университет»
olga.antonovskaja@yandex.ru

Бесklubная Антонина Вячеславовна

кандидат педагогических наук, Федеральное
государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный
архитектурно-строительный университет»
antbesk@gmail.com

Аннотация. В работе приводится исследование квазигармонического осциллятора с сухим и вязким трением. Используется упрощенная (кулоновская) математическая модель сухого трения. Для исследования динамики системы используется метод приближенных точечных отображений, который является асимптотическим методом. Задача существования у осциллятора периодического решения рассматривается как задача существования неподвижной точки у аналитически построенного точечного отображения, приближающего с достаточной точностью точечное отображение, порождаемое траекториями системы на секущей поверхности. Устойчивость искомого периодического решения также определяется устойчивостью неподвижной точки вспомогательного точечного отображения. Ставится вопрос о применимости результатов приближенного исследования.

Ключевые слова: квазигармонический осциллятор, сухое трение, периодический режим, метод точечных отображений, секущая поверхность, устойчивость.

Введение

Механические колебательные системы с комбинированным сухим и вязким трением имеют важное значение для многих технических приложений динамики [1]. В случае чисто вязкого трения колебательные системы описываются линейными дифференциальными уравнениями и допускают полное аналитическое исследование. Наличие же сухого трения неизбежно приводит к нелинейности физической системы [1-2, 3 С. 175–182].

В настоящей работе рассматривается решение задачи о синхронизации квазигармонического осциллятора с сухим и вязким трением. Для этого используется асимптотический метод, основанный на применении метода

точечных отображений [4]. При таком подходе к изучению свойств точечного отображения существо вопроса смещается к оценке достоверности (практической применимости) результатов приближенного исследования.

Рассмотрим уравнение синхронизируемого осциллятора вида

$$\ddot{x} + x = \mu[-\dot{x} - \xi x - (\pi/4)E_0 \operatorname{sgn}[\dot{x}] + A \cos t], \quad (1)$$

где $0 < \mu \ll 1$, $A > 0$. Здесь вязкое трение пропорционально производной переменной x , а сила сухого трения описывается кусочно-постоянной моделью (закон Кулона). Если ввести $y = \dot{x}$, из (1) получим систему двух уравнений первого порядка

тельной оси в этом случае будет иметь вид двух гипербол

$$\xi = \pm E_0 / (2r). \quad (9)$$

Кроме того является очевидным тот факт, что при $0 < \mu\pi < 1$ действительная часть корней $P(z)$ всегда является положительной, а значит граница $N_- (z=-1)$ при $0 < \mu\pi < 1$ не существует.

Уравнения границ N_+ , N_ϕ области устойчивости на плоскости будут иметь следующий вид.

Для $N_+ (z=1)$ получаем уравнение (6), т.е. граница N_+ совпадает с кривой K .

Уравнение границы N_ϕ уходя через окружность единичного радиуса пары комплексно-сопряженных корней в предположении, что $\mu \neq 0$, есть

$$r = (1 - \mu\pi)E_0 / (2 - \mu\pi(1 + \xi^2)) \quad (r < E_0 / (2\xi)), \quad (10)$$

причем поскольку $r > 0$, следует рассматривать только часть кривой (10), расположенную между ее асимптотами $\xi = \pm \sqrt{2 / \mu\pi - 1}$.

Примерный вид кривых N_ω , N_+ , N_ϕ на плоскости r, ξ представлен на рисунке 2. Область устойчивости есть область $D=0$, поскольку это случай отсутствия у характе-

ристического полинома корней по модулю больших единицы. Для области $D=1$ такой корень один. В области $D=2$ оба корня характеристического уравнения имеют модуль больший единицы. То есть при попадании в области $D=1$ и $D=2$ устойчивость неподвижной точки теряется. В пределе при $\mu \rightarrow +0$ область устойчивости расширяется, при этом N_ϕ стремится к прямой $r = E_0 / 2$.

Факт существования неподвижных точек точечного отображения $\tilde{T}$ с некоторым характером устойчивости при $A = \text{const}$ и различных ξ может быть установлен наложением картины поведения границ областей существования различных типов неподвижных точек на плоскости ξ, r при заданном μ на плоскость с резонансной кривой при заданном A (рисунок 3).

Следует отметить, что интерес представляет также вопрос о «вырожденности-невырожденности» рассматриваемой модели [6], сводящийся к вопросу об устойчивости-неустойчивости бесконечности.

Рассмотрим простейшую функцию Ляпунова

$$V(x_0, y_0) = x_0^2 + y_0^2 = \rho_0. \quad (11)$$

Ее первая разность в силу формул (3) примет вид

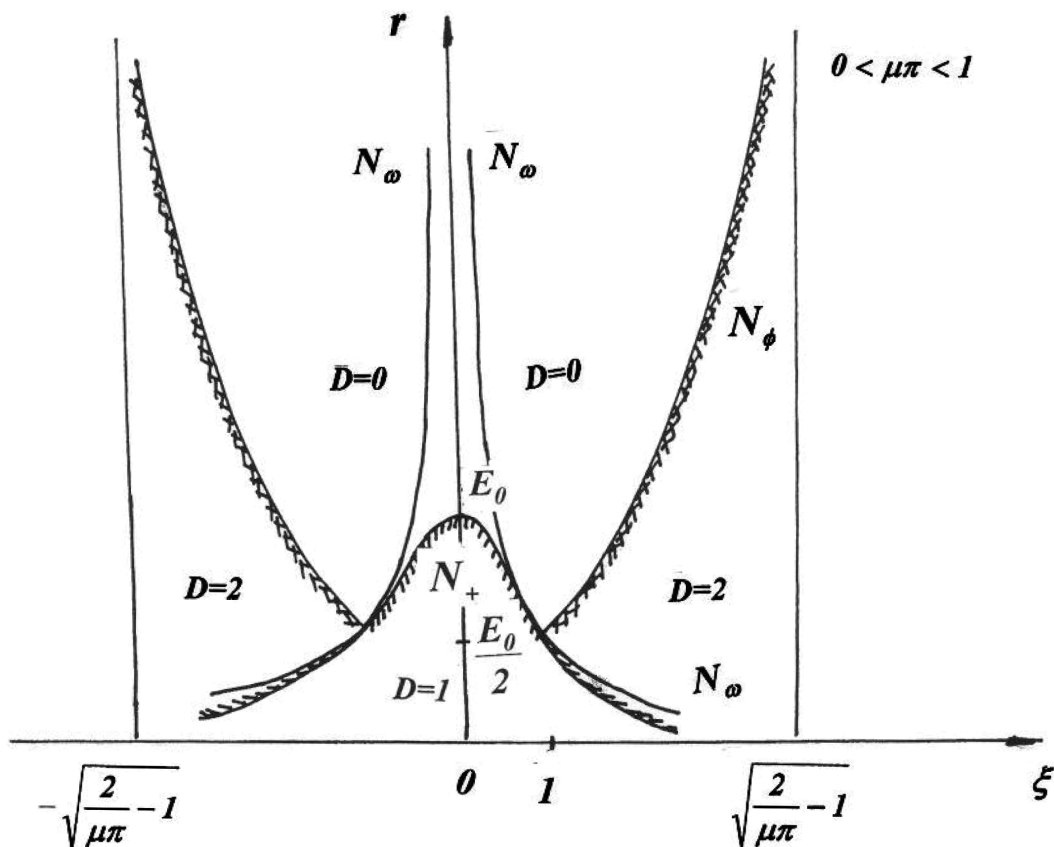


Рис. 2. Границы D-разбиения при малых μ

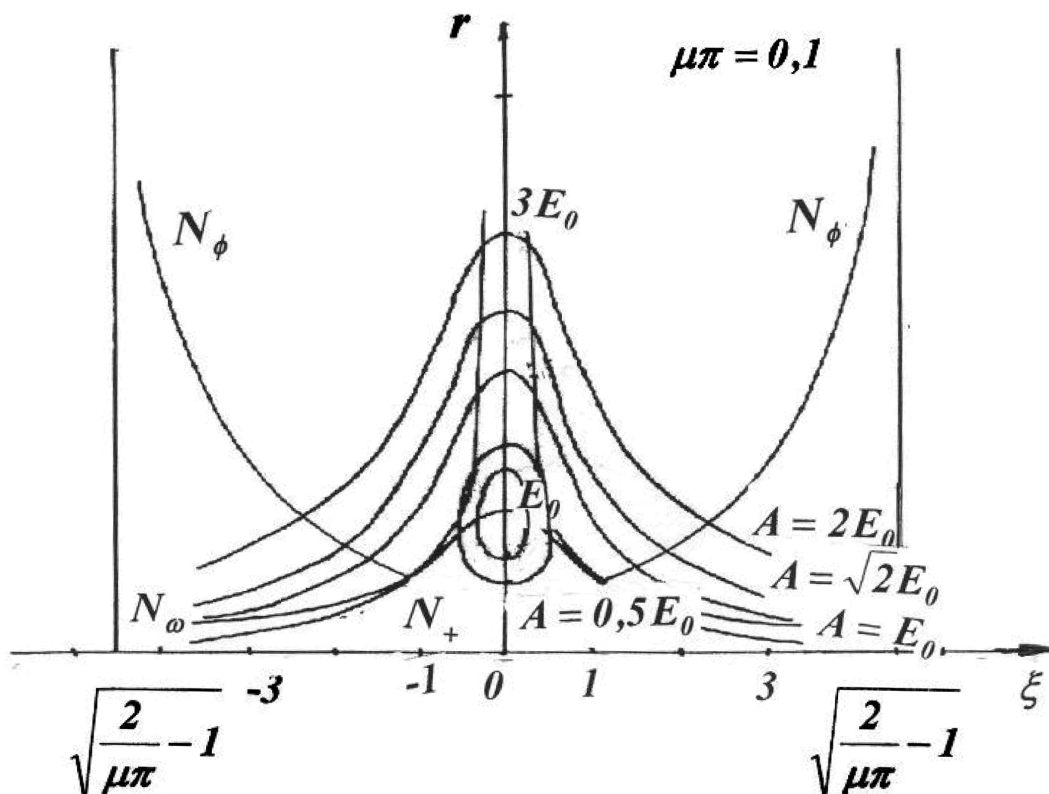


Рис. 3. Наложение картины поведения границ D-разбиения на плоскость с резонансными кривыми

$$\begin{aligned} \Delta V(x_0, y_0) &= V(\tilde{x}, \tilde{y}) - V(x_0, y_0) = \\ &= \mu\pi[-2 + \mu\pi(1 + \xi^2)](x_0^2 + y_0^2) + \\ &+ E_0\sqrt{x_0^2 + y_0^2} + Ay_0 + \\ &+ \mu\pi(E_0^2 - 2E_0 + A^2 + 2A(-\xi x_0 - y_0 + \\ &+ E_0 y_0 / \sqrt{x_0^2 + y_0^2})) = \mu\pi[-2 + \mu\pi(1 + \xi^2)]\rho_0 + \\ &+ E_0\sqrt{\rho_0} + Ay_0 + \mu\pi[E_0^2 - 2E_0 + A^2 + 2A(-\xi x_0 - \\ &- y_0 + E_0 y_0 / \sqrt{\rho_0})]. \end{aligned} \quad (12)$$

При любом конечном, хотя и малом значении μ определяющим членом $\Delta V(x_0, y_0)$ при $\rho_0 \rightarrow +\infty$ является $(-2 + \mu\pi(1 + \xi^2))\rho_0$, поскольку все прочие члены имеют порядок не выше, чем $\sqrt{\rho_0}$. Таким образом, поведение траекторий отображения $\tilde{T}$ в удаленных частях плоскости будет зависеть от знака коэффициента при ρ_0 . Так, при $-2 + \mu\pi(1 + \xi^2) < 0$ ($|\xi| < \sqrt{2/\mu\pi - 1}$, $\mu\pi < 2$) функция $\Delta V(x_0, y_0)$ будет удовлетворять условию

$$\begin{aligned} \Delta V(x_0, y_0) &\leq \mu\pi[-2 + \mu\pi(1 + \xi^2)]\rho_0 + \\ &+ 2(E_0 + A + \mu\pi(|\xi| + 1))\sqrt{\rho_0} + \\ &+ \mu\pi[(E_0 + A)^2 - 2E_0] < 0, \end{aligned} \quad (13)$$

как только

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho_0} &> [E_0 + A + \mu\pi A(|\xi| + 1) + \\ &+ ((E_0 + A + \mu\pi A(|\xi| + 1))^2 + \mu\pi((E_0 + A)^2 - \\ &- 2E_0)(2 - \mu\pi(1 + \xi^2)))^{1/2}][2 - \mu\pi(1 + \xi^2)]^{-1}, \end{aligned} \quad (14)$$

если подкоренное выражение неотрицательно (скажем, при $(E_0 + A)^2 \geq 2E_0$), либо неравенство (13) имеет место всегда, если подкоренное выражение в (14) отрицательно. При $-2 + \mu\pi(1 + \xi^2) > 0$ ($\xi^2 > 2 / \mu\pi - 1$) имеем

$$\begin{aligned} \Delta V(x_0, y_0) &> \mu\pi[-2 + \mu\pi(1 + \xi^2)]\rho_0 + \\ &+ 2(E_0 - A - \mu\pi(|\xi| + 1))\sqrt{\rho_0} + \\ &+ \mu\pi[(E_0 - A)^2 - 2E_0] > 0, \end{aligned} \quad (15)$$

как только $\sqrt{\rho_0} > \max\{0, r_1, r_2\}$, где

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= [A - E_0 + \mu\pi(|\xi| + 1) \pm ((E_0 - A + \mu\pi(1 + |\xi|))^2 + \\ &+ \mu\pi(2 - \mu\pi(1 + \xi^2))((E_0 - A)^2 - \\ &- 2E_0))^{1/2}][2 - \mu\pi(1 + \xi^2)]^{-1}, \end{aligned} \quad (16)$$

в случае положительности подкоренного выражения в (6). Если подкоренное выражение в (16) отрицательно, то (15) имеет место при всех $\rho_0 > 0$.

Если $-2 + \mu\pi(1 + \xi^2) = 0$ ($\xi = \pm \sqrt{2 / \mu\pi - 1}$, $\mu\pi < 2$),

$$\begin{aligned} \Delta V(x_0, y_0) &= \mu\pi[E_0\rho_0 + Ay_0 + \mu\pi(E_0^2 - 2E_0 + A^2 + \\ &+ 2A(-\xi x_0 - y_0 + E_0 y_0 / \sqrt{\rho_0}))] \end{aligned} \quad (17)$$

и вывод о знаке $\Delta V(x_0, y_0)$ при $\rho_0 \rightarrow +\infty$ сделать нельзя.

Из приведенных выше рассуждений следует, что при $\xi < \sqrt{2 / (\mu\pi) - 1}$ модель является невырожденной

(т.е. бесконечность в приближенной модели, как и в реальной системе, неустойчива). Таким образом, для системы (2) в пространстве параметров для любого конечного значения μ существует, хотя и ограниченная по ξ , область невырожденности математической модели (при $\mu \rightarrow +0$ область невырожденности приближенной модели все более расширяется и стремится к $-\infty < \xi < +\infty$, что соответствует результатам, получаемым методом усреднения [6]). Факт существования области невырожденности рассматриваемой приближенной модели связан с тем, что для случая нелинейности, обладающей насыщением, при $0 < \mu\pi < 1$ не существует границы $N_{\text{смены}}$ устойчивости неподвижных точек $\tilde{T}$ в пространстве параметров. А значит, появление сложных движений возможно только при переходе через границу N_{ϕ} . Тот факт, что граница N_{ϕ} располагается в ограниченной по ξ части плоскости параметров, определяет ограниченность по ξ области невырожденности рассматриваемой приближенной модели. При значении

ях $|\xi| < \sqrt{2 / (\mu\pi)} - 1$ приближенная модель является вырожденной для любого конечного, хотя и малого μ , т.к. при $|\xi| < \sqrt{2 / (\mu\pi)} - 1$ ограниченного притягивающего множества в фазовом пространстве приближенной модели не обнаружено.

Заключение

В заключение отметим, что т.к. метод приближенных точечных отображений является асимптотическим методом, при выработке рекомендаций по применению полученных результатов необходимо определять границы их применимости. Однако, поскольку в [7] дано обоснование метода приближенных точечных отображений как асимптотического метода, всегда возможно получить оценки величин малого параметра, при которых возможна локальная применимость результатов приближенного исследования [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутиков Е. И. Осциллятор с сухим трением. // Компьютерные инструменты в образовании. — 2015. — № 1. — С.28–47.
2. Фокин А. В. Исследование возможности существования несимметричных установившихся режимов вынужденных нелинейных колебаний осциллятора с сухим трением. // Ученые записки физического факультета. — 2014. — № 5. — 1–6.
3. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959. — 915 с.
4. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1972. — 472 с.
5. Антоновская О. Г. О влиянии насыщения нелинейности на результаты исследования принудительной синхронизации методом приближенных точечных отображений. // Математическое моделирование и оптимальное управление. Вестник ННГУ. — Нижний Новгород: ННГУ, 1999. — № 2(21). — С.198–208.
6. Андронов А.А., Витт А.А. К теории захватывания Ван-дер-Поля //Arch. f. Elektrotech. 247 99 (1930), Собрание трудов А.А.Андропова. Изд. АН СССР, 1956. — С.51–64.
7. Антоновская О. Г. Метод последовательных приближений в оценке близости приближенного и точного точечных отображений при учете неизохронности процессов в динамике систем ИФАПЧ. // Вестник ННГУ, Нижний Новгород. — 2013. — № 5(1). — С. 210–212.
8. Антоновская О.Г. О достоверности результатов исследования принудительной синхронизации методом приближенных точечных отображений // Математическое моделирование и оптимальное управление: Вестник ННГУ. — Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2001. — Вып.1(23). — С.243–254.

© Антоновская Ольга Георгиевна (olga.antonovskaja@yandex.ru); Бесклубная Антонина Вячеславовна (antbesk@gmail.com)

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»