DOI 10.37882/2223-2966.2025.10-2.23

НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫБОРА ИНВЕСТИЦИЙ

SOME APPROACHES TO SOLVING THE PROBLEM OF OPTIMAL INVESTMENT SELECTION

H. Shungarov
R. Botashev

Summary. The problem of attracting investments today is a key issue in the development of modern domestic production. The effective use of investments is carried out through the selection and implementation of optimal investment projects. The article is devoted to assessing the degree of complexity of the task of choosing the optimal investment project in general and developing new effective algorithms to solve it in cases of incomplete information.

Keywords: investment, investment project, probability, integer programming, linear programming, Boolean variable, income, expenses, net profit, profitability level, investment coefficient.

Шунгаров Хамид Джашауевич
к.ф-м.н, доцент, Карачаево-Черкесский государственный университет имени У.Д. Алиева
hamidsh@rambler.ru
Боташев Руслан Азаматович
Доцент, Карачаево-Черкесский государственный университет имени У.Д. Алиева
botashevruslan@mail.ru

Аннотация. Проблема привлечения инвестиций сегодня является ключевым вопросом развития современного отечественного производства. Эффективное использование инвестиций осуществляется через выбор и реализацию оптимальных инвестиционных проектов. Статья посвящена оценке степени сложности задачи выбора оптимального проекта инвестиций в общем виде и разработке новых эффективных алгоритмов для её решения в случаях неполной информации.

Ключевые слова: инвестиции, инвестиционный проект, вероятность, целочисленное программирование, линейное программирование, булева переменная, доходы, расходы, чистая прибыль, уровень рентабельности, коэффициент инвестирования.

Для развития национальной экономики на современном этапе и для улучшения экономической деятельности предприятий важное значение имеют инвестиции. Благоприятный инвестиционный климат и эффективно действующая система инвестирования, как правило, позволяют решить целый комплекс экономических задач. Такая инвестиционная система создает также условия для оптимизации структуры производства.

Для нормального функционирования инвестиционного процесса необходимо привлечение и эффективное распределение денежных средств. Посредником в распределении денежных средств между субъектами экономических отношений является финансовый рынок, основной функцией которого становится привлечение финансовых ресурсов в реальный сектор экономики посредством внесения инвестиций.

Использование инвестиционных ресурсов осуществляется через реализацию инвестиционных проектов, которые направлены на достижение стратегических целей государства в целом и отдельного предприятия (организации). Проблема привлечения инвестиций всегда остается приоритетной для развития экономики и бизнеса.

Каждое предприятие с целью получения прибыли должно постоянно вкладывать капитал на обновление или расширение производства. Трудность заключается в том, что необходимо выбирать оптимальный проект инвестиций с целью учёта вероятности банкротства предприятия. Оптимальный проект инвестиций содержит такие параметры как: период инвестирования, объём инвестиций, а также прибыльность объекта инвестирования. Одной из проблем исследования является поиск и нахождение ответов на выяснение связей между периодом инвестирования, объёмом инвестиций и прибыльностью, поскольку принцип «чем больше вложений-тем больше прибыли» не всегда срабатывает.

В данной работе исследуются вопросы поиска новых возможностей применения и выбора оптимального инвестиционного проекта экономико-математической модели в условиях неполной информации. Для решения задачи выбора оптимального проекта инвестиций существует два основных метода проведения расчетов в условиях неполной информации:

1) использование обычных показателей экономической эффективности;
2) разработка и использование новых экономико-математических моделей и методов (алгоритм α_3).

Первый метод не позволяет выбрать оптимальный вариант внесения инвестиций. Второй метод обеспечивает получение максимально возможной прибыли от внесения этих инвестиций даже в задачах с неполной информацией.

В данной работе изложение методов решения различных моделей задачи оптимального инвестирования приводится для сравнения с методом решения задачи инвестирования в условиях неполной информации.

1. Постановка задачи

Инвестор намерен свободные денежные средства в сумме А инвестировать в n производств $P_i, i = 1,2,...,n$ в течение m периодов $j : j = 1,2,...,n$. Задача состоит в том, чтобы из всех производств $P_i, i = 1,2,...,n$ выбрать такие, чтобы общая сумма чистой прибыли, полученная всеми производствами за весь период, была максимальной.

Обозначим через:

a_{ij} — инвестиционные затраты i-го производства (i = 1,2,.. n) за j-период (j = 1,2,… m);

u_{ij}— доход i-го производства за j-период;

w_{ij} — чистая прибыль i-го производства за j-период, $w_{ij} = u_{ij} — a_{ij}$;

z_j— коэффициент выбора варианта чистой прибыли;

w^*_{ij} — пороговое значение прибыли ($u_{ij} - x_{ij}$) i-го производства на j-ом этапе, i=1,2,.. n; j = 1, 2, … m.

Пусть задана линейная целевая функция

$$F(z) = \sum_{i=1}^{n} w_{ij} \sum_{j=1}^{m} z_j \to \max \qquad (1)$$

при выполнении следующих условий:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} z_j \le b_j, \; j = 1,2,...,m \qquad (2)$$

$$z_j \in \{0,1\} \qquad (3)$$

где $z_j = \begin{cases} 1, \text{если } w_{i,j} \le w*_{i,j} \\ 0, \text{если } \; w_{i,j} > w*_{i,j} \end{cases}$

Допустимым решением задачи оптимизации (1–3) является n-мерный вектор $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, который удовлетворяет условиям (2)–(3). Множество всех допустимых решений обозначим через $Z = \{z\}$.

Таким образом, задача оптимального инвестирования заключается в том, что среди всех наборов 0,1-векторов (решений) найти вектор с k единицами, который удовлетворяет (2) и доставляет целевой функции $F(z)$ максимальное значение.

Известно, что задача выбора оптимального инвестирования в общем случае сводится к NP-полной задаче целочисленного булева программирования [1] и её можно решить методом построения последовательности планов [2]. При этом надо отметить, что при малых значениях n эту задачу можно решить методом полного перебора, причём число всех допустимых решений можно вычислить по формуле: $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$, где k — число единиц в 0, 1 векторе.

Сформулированную, таким образом, задачу решим на простом примере методом перебора. Найдём число всех решений для n=3 производств, которое равно 2^3= 8: (1,1,1), (1,1,0), (1,0,0), (0,1,1), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,1), (0,0,0). Для решения этой задачи предлагается алгоритм α_1, основанный на процедурах полного перебора.

Алгоритм α_1.

1. Найти все допустимые решения задачи (1)–(3).
2. Найти значение целевой функции $f(z)$, подставив вместо z последовательно значения допустимых решений $z_j \in Z$
3. Сравнить все полученные значения $f(z_j)$ и среди них выбрать $z_j \in Z : F^*(z_k) = \max_{z_j \in Z} F(z_j), k \le k_0$.
4. Вывести полученные решения, т.е. осуществить выбор.

2. Предположим, что известны суммы предполагаемых вложений в каждое производство $P_i, i = 1,2,...,n$ в каждом периоде $j : j = 1,2,...,m$. Также известны суммы предполагаемых доходов, получаемых каждым предприятием в каждом периоде.

Отметим, что задача выбора оптимального инвестирования в этом случае решается за полиноминальное время, если известны суммы предполагаемых инвестиций по всем периодам и суммы ожидаемых затрат (инвестиций).

Рассмотрим пример, представив предполагаемые инвестиционные затраты (a_{ij}) и доходы (u_{ij}) пяти производств по пяти годам в таблице 1.

Определим чистую прибыль $w_{ij} = u_{ij} - a_{ij}$ по производствам и периодам. Если $w_{ij} \le w^*_{ij}$, то $z_j = 0$ — производство не выбирается и ему не вносятся инвестиции. Если $w_{ij} \ge w^*_{ij}$, то z_j=1 — предприятие выбирается и ему вносятся инвестиции. В этом случае предприятию дополнительно к запланированным вносятся ещё инвестиции путем пропорционального перераспределения неиспользованных сумм.

Таблица 1.

i/j	a_{1j}	u_{1j}	w_{ij}	z_j	a_{2j}	u_{2j}	w_{ij}	z_j	a_{3j}	u_{3j}	w_{ij}	z_j
1.	20	30	+10	1	30	35	+5	1	30	40	+10	1
2.	50	40	–10	0	35	30	–5	0	40	50	+10	1
3.	25	30	+5	1	40	40	0	0	50	50	0	0
4.	50	50	0	0	50	45	–5	0	30	35	+5	1
5.	30	20	–10	0	25	30	+5	1	40	45	+5	1
∑	175	170	–5	0	180	180	0	0	190	220	+30	1

Оптимальная чистая прибыль равна:

F(w) =10x1+5x1+5x1+5x1+10x1+10x1+5x1+5x1 =
= 55 млн руб.

2. Предположим, что инвестор намерен инвестировать свободные денежные средства *A* в *n* производств в течение *m* периодов. Известны предполагаемые суммы вложений в каждое производство в каждом периоде. Также известны суммы предполагаемых доходов, получаемых каждым производством в каждом периоде. Задача состоит в выборе таких производств в каждом периоде, чтобы полученная общая сумма чистой прибыли за весь период, была максимальной.

Алгоритм α_2.

1. Вычисляются значения функции прибыли $F_j(z)$ по каждому производству P_i, i=1,2,…,n за каждый период j=1,2,…,m. Если на этапе j=1,2,…,m выполняется неравенство $w_{ij}>w^*_{ij}$, то P_i помечаются как выбранные на этапе j, $z_j(P_i)=1$.
2. Вычисляется сумма $\sum_{j=1}^{m} z_j(P_i)$ всех значений z_j: $z_j(P_i)=1$, j= 1,2,…,m.

Каждый раз, когда на этапе j=1,2,…,m выполняется условие $\sum_{j=1}^{m} z_j(P_i) = \max$, то полагаем $k=k+1$, где k число всех производств P_i, которые были выбраны по всем этапам j = 1, 2, … m (m=5) наибольшее число раз.

3. Если доход u_{ij}, полученный производством P_i на этапе j = 1, 2, … m, оказался меньше чем вложения (затраты), то все возможные затраты суммируются и вычитаются из общей ожидаемой прибыли (табл. 2).
4. Вывести значения общей максимальной прибыли.

Работа алгоритма α_2 показана в таблице 3:

В результате решения задачи максимальная чистая прибыль составила: F(z) =20x1+15x1+25x1+20x1+20x1 = 100 млн руб.

Таблица 2.

i/j	u_{ij}	a_{ij}	w_{ij}	z_j	u_{ij}	a_{ij}	w_{ij}	z_j	u_{ij}	a_{ij}	w_{ij}	z_j
1.	30	20	+10	1	30	30	0	0	30	30	0	0
	35	20	+15	1	35	30	+5	1	35	30	+5	1
	40	20	**+20**	1	40	30	+10	1	40	30	+10	1
2.	40	50	–10	0	40	35	+5	1	40	40	0	0
	30	50	–20	1	30	35	–5	0	30	40	–10	0
	50	50	0	0	50	35	**+15**	1	50	40	+10	1
3.	30	25	+5	1	30	40	-10	0	30	50	–20	0
	40	25	+15	1	40	40	0	0	40	50	–10	0
	50	25	**+25**	1	50	40	+10	1	50	50	0	0
4.	50	50	0	0	50	50	0	0	50	30	**+20**	1
	45	50	+5	0	45	50	–5	0	45	30	+15	1
	35	50	–15	0	35	50	-15	0	35	30	+5	1
5.	20	30	–10	0	20	25	–5	0	20	40	–20	0
	30	30	0	0	30	25	+5	1	30	40	–10	0
	45	30	+15	1	45	25	**+20**	1	45	40	+5	1

Итого за 5 лет при общем доходе (∑u) в 235 млн рублей и внесении 135 млн рублей инвестиций (∑a) оптимальный размер общей чистой прибыли (∑w) при уровне рентабельности производства продукции в 74 % составит 100 млн. рублей. Неиспользованная сумма инвестиций в сумме 15 млн рублей может перераспределяться между производствами для их расширения пропорционально полученным ими доходам.

3. Рассмотрим задачу оптимального инвестирования с неполной информацией. Предположим, что известна только общая сумма инвестиций и распределение этой суммы между производствами. Требуется распределить предполагаемые затраты по периодам так, чтобы максимизировать значение целевой функции *F*:

$$F(w) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} w_{ij} z_{ij} \rightarrow \max \qquad (4)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} z_{ij} \le b_i,\ j = 1,2,...,m \qquad (5)$$

$$z_{ij} \in \{0,1\} \qquad (6)$$

где $w_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$ — чистая прибыль производства P_i в период j; w^*_{ij} — пороговое значение;

$z_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } w_{i,j} \ge w*_{i,j} \\ 0, \text{ если } w_{i,j} < w*_{i,j} \end{cases}$. В общем случае ограничения (5) задачи оптимального инвестирования представляют собой совокупность линейных диофантовых уравнений с неотрицательными коэффициентами.

Задачу (4)–(6) можно отнести к классу задач с большими данными. Поэтому проблема конструирования алгоритмов для решения таких задач является актуальной и практически значимой. Для решения этой проблемы предлагается параллельный алгоритм α_3, описание которого представим ниже.

Пусть имеется параллельная вычислительная система типа SIMD [3,4], состоящая из m процессоров, каждый из которых выполняет один и тот же поток инструкций, но над различными потоками данных. Спроектируем алгоритм для m процессоров $p_t, t \in \{1,2,...,m\}$. Перенумеруем процессоры числами $p_1, p_2, ..., p_m$. Каждый процессор $p_t, t \in \{1,2,...,m\}$ выполняет действия этапа α_t алгоритма α. После выполнения всех действий этапа $\alpha_t, t \in \{1,2,...,m\}$, каждый процессор $p_t, t \in \{1,2,...,m\}$ передает результаты вычислений центральному, который выдаёт результат.

Описание алгоритма α_3.

Параллельный алгоритм α_3 состоит из m этапов α_3^t, перенумерованных индексом $t = 1,2,...,m$. Работа алгоритма α_3 состоит в том, что на вход каждого этапа α_3^t, $t = 1,2,...,m$ подаётся одно из уравнений совокупности ограничений:

$$\left[\begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + ... + x_{n1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + ... + x_{n2} = b_2 \\ .... \\ x_{1m} + x_{2m} + ... + x_{nm} = b_m \end{array} \right. \tag{7}$$

и находятся все решения $X_t = \{x\}, t = 1,2,...,m$ этого уравнения, и из множества всех решений выбирается такое, которое удовлетворяет неравенствам (5). Затем на вход каждого этапа α_3^t, $t = 1,2,...,m$ подаётся и решается одно из уравнений совокупности ограничений (8) $\sum_{i=1}^{n} w_{ij} = w*_j, j = 1,2,...,m$

$$\left[\begin{array}{l} w_{11} + w_{21} + ... + w_{n1} = w^*{}_1 \\ w_{12} + w_{22} + ... + w_{n2} = w^*{}_2 \\ .... \\ w_{1m} + w_{2m} + ... + w_{nm} = w^*{}_m \end{array} \right. \tag{8}$$

где w_j^*— пороговое значение чистой прибыли производства P_i в период j. Множество всех таких решений обозначим через $X_t = \{x\}$ для некоторого $t = 1,2,...,m$ и $W_t = \{w\}$ для некоторого $t = 1,2,...,m$. Далее все решения $W_t = \{w\}, t = 1,2,...,m$ сравниваются между собой и выбирается такое решение с наибольшим числом ненулевых компонент, которое доставляет функции (4) максимальное значение $F_t^*(w) = \max_{w \in W_t} F(w)$ и удовлетворяет условиям (5). Полученные, таким образом, результаты передаются на вход заключительного этапа α_3^{t+1}. На этапе α_3^{t+1} сначала все значения $F_t^*(w) = \max_{w \in W_t} F(w)$ сравниваются между собой и выбирается такое решение w*, что $F^*(w^*) = \max_{1 \le t \le m} F^*(w)$. Затем устанавливается взаимно— однозначное соответствие между всеми компонентами вектора значений $F_t^*(w^*), t = 1,2,...,m$ и всеми компонентами одного из каждого вектора выделенного подмножества $X = \bigcup_{1 \le t \le m} X'_t$ и выбирается один из них –x^*. Таким образом, (w^*–x^*) — решение задачи (4)–(6). На этом каждый этап α_3^{t+1}, а вместе с ним и параллельный алгоритм α_3 заканчивает свою работу.

Заметим, что предложенный алгоритм α_3 в случае, когда параметры n,m конечны, является полиномиальным алгоритмом.

Для решения этой проблемы при малых значениях параметров n,m требуется дополнительная информация при том условии, если такая информация имеется. Например, можно определить показатели рентабельности каждого производства P_i, i=1,2,.. n по периодам j = 1, 2, … m. Необходимо инвестировать каждое производство по периодам так, чтобы общая сумма прибыли, полученная по всем производствам (целевая функция) $F(w) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} x_{ij} \to \max$ была максимальной, где β_{ij} — уровень рентабельности, который определяется как отношение чистой прибыли к затратам производства P_i, i=1,2, n по периодам j = 1, 2, m:

$$\beta_{ij} = \frac{w_{ij}}{a_{ij}} = \frac{u_{ij} - a_{ij}}{a_{ij}} \tag{7}$$

Тогда задача (4)–(6) сводится к следующей:

$$F(w) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} w_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left(u_{ij} - a_{ij}\right) \to \max \tag{8}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \le b_i, \ j = 1,2,...,m \tag{9}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, x_{ij} \ge 0, \tag{10}$$

где $$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \le b_i, \ j = 1,2,...,m \\ 0, \text{ если} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_{ij} > b_i, \ j = 1,2,...,m \end{cases} \quad (11)$$

Для этого случая предложим следующий алгоритм.

Алгоритм α_4.

1. Ввести предполагаемую общую сумму инвестиций для всех производств.
2. Ввести предполагаемые коэффициенты рентабельности для всех производств по всем периодам $j = 1, 2, \dots m$ (таблица 4).
3. Вычислить предполагаемые затраты a_{ij} для всех производств P_i, i =1,2, n, по всем периодам $j = 1, 2, \dots m$ (таблица 5). Привести систему ограничений к виду (9).
4. Для каждого предприятия P_i, i =1,2,...n, проверить, выполняется ли условие (9). Если условие (9) выполняется на этапе j =1,2,...n, то соответствующее неравенство сохраняется в системе (9) иначе оно удаляется.

4. Предположим, что некоторое предприятие с многопрофильным производством имеет свободные денежные средства в сумме A. Он готов инвестировать n производств в течение m периодов. Известны суммы вложений в каждом периоде S_j, а также предполагаемый уровень рентабельности β_{ij} каждого производства в каждом периоде. Необходимо выбрать для инвестирования некоторые производства, чтобы общая прибыль была максимальной.

Для этого случая предложим следующий алгоритм.

Алгоритм α_4.

1. Ввести значения общих объёмов α_{ij} инвестиций и коэффициенты уровней рентабельности β_{ij} для всех производств P_i, i =1,2,...n по всем периодам $j = 1, 2, \dots m$.
2. Вычислить ожидаемую прибыль w_{ij} для каждого производства P_i, i =1,2,...n, по всем периодам $j = 1, 2, \dots m$.
3. Общий объём инвестиций α_{ij} равномерно вложить в каждое производство P_i, i =1,2,...n, на каждый период $j = 1, 2, \dots m$: $\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$.
4. Вычислить сумму всех w_{ij} и найти значение ожидаемой прибыли каждого производства P_i в период j: i =1,2,...n.
5. Все значения $F(w_i)$, i =1,2,...n, сравнить между собой и найти $F^*(w_i) = \max_{1\le i\le n} F(w_i)$.
6. Выбрать все производства P_i, для которых выполняется условие $F^*(w_i) \ge F^0(w)$, где $F^0(w)$ — пороговое значение прибыли, которое вычисляется по формуле $F^0(w) = (A / n) * \beta_{\min}$.
7. Вычислить значение целевой функции: $F(w) = \sum_{i=1}^{n_0} F^*(w_i)$, где $n_{i0} \le n$.

Рассмотрим решение задачи на примере. Предположим, что у инвестора Альфа-Банк имеются свободные средства 150 тыс. дол, которые он готов вложить в течение 5 лет в 5 производств (Табл. 3):

в 1-ом году — 20000 дол., во 2-ом году-25000 дол., в 3-ем году— 30000 дол., в 4-ом году — 35000 дол. и в 5-ом году — 40000 дол. Причём задано пороговое значение прибыли $F^0(w)$=(150000/5)* 0,25 = 7500.

Таблица 3.

Таблица коэффициентов уровней рентабельности (β_{ij})

S_j \ P_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
S_1	0,25	0,28	0,32	0,34	0,36
S_2	0,28	0,31	0,33	0,35	0,37
S_3	0,32	0,33	0,35	0,37	0,39
S_4	0,34	0,36	0,38	0,41	0, 43
S_5	0,36	0,38	0,40	0,42	0,44

Используя коэффициенты уровней рентабельности (β_{ij}) и объемы инвестиций a_{ij}, получим следующий результат (Табл. 4):

Таблица 4.

S_j \ P i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	F(wi)	F*(wi)
S_1	1000	1120	1280	1360	1440	6200	<7500
S_2	1400	1550	1650	1750	1850	8200	>7500
S_3	1920	1980	2100	2220	2340	10560	>7500
S_4	2380	2520	2660	2870	3010	13440	>7500
S_5	2880	3040	3200	3360	3520	16000	>7500

Таким образом, получен оптимальный план (Табл. 4), согласно которому вложить инвестиции выгодно в производства P_5, P_4 ,P_3 , P_2 . При этом может быть получена чистая прибыль в сумме 48200 (дол.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гэри М. Джонсон Д, Вычислительные машины и трудно решаемые задачи. М.: Мир, 1982.
2. Емеличев В.А., Комлик В.И. Метод построения последовательности планов для решения задач дискретной оптимизации. — М.: Наука, 1981.
3. Воеводин В. В. Математические модели и методы в параллельных системах. М.: Наука, 1986, 296 с.8.
4. Дж. Макконелл. Анализ алгоритмов. М.: Техносфера, 2002, 304с\
5. Томас Кормен, Чарльз Лейзерсон, Рональд Ривест, Клиффорд Штайн. Алгоритмы: построение и анализ, 2-е издание. : Пер. с англ. — М. Издательский дом «Вильямс», 2011 — 1296 с.
6. Бирман И. Оптимальное программирование. — М.: Экономика, 1968.
7. Гольдштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Новые направления в линейном программировании. — М.: Советское радио, 1966.
8. Гольдштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Специальные направления в линейном программировании. — Изд. Красанд. 2018.
9. Ковалев М.М. Дискретная оптимизация: Целочисленное программирование. Изд. стереотип. 2023. 192 с.
10. Дж. Хедли. Линейная алгебра (для экономистов). — М.: Высшая школа, 1966.
11. Канторович Л.В. Оптимальные решения в экономике. — М.: Наука, 1972.
12. Шунгаров Х.Д. , Боташев Р.А., Оптимизация модели выбора варианта инвестиции в многопрофильном производстве // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и Технические Науки. — 2024. — № 7-2.

© Шунгаров Хамид Джашауевич (hamidsh@rambler.ru); Боташев Руслан Азаматович (botashevruslan@mail.ru)
Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»