ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Пчелова Алевтина Зиноновна
Ст. преподаватель, ФГБОУ ВО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева» (г. Чебоксары)
apchelova@mail.ru

Аннотация. Рассматривается нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с полиномиальной правой частью пятой степени, решение которого обладает подвижными особыми точками, в общем случае не разрешимое в квадратурах. Применяется приближенный метод решения нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками, разработанный В. Н. Орловым. Сформулирована теорема существования и единственности решения задачи Коши для рассматриваемого уравнения в окрестности подвижной особой точки, построено приближенное аналитическое решение уравнения в окрестности подвижной особой точки и проведено исследование влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение. Результаты получены в комплексной области. Дано сравнение результатов расчетов с аналогичными результатами расчетов, полученными автором ранее.

Ключевые слова: нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, подвижная особая точка, задача Коши, приближенное аналитическое решение, возмущение, оценка погрешности.

A VARIANT OF ERROR ESTIMATES APPROXIMATE SOLUTIONS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE NEIGHBOURHOOD OF THE MOVING SINGULARITY IN THE COMPLEX PLANE

A. Pchelova

Summary. The article considers a first-order nonlinear ordinary differential equation with moving singularity which cannot be solved in quadratures in general case. We use the approximate method for solving nonlinear differential equations with movable singular points of algebraic type proposed by V. N. Orlov. The existence and uniqueness of Cauchy problem solution for this equation in some neighborhood of moving singularity is formulated, the approximate solution of the equation in neighborhood of moving singularity is constructed and research of influence of perturbation of moving singularity on the approximate solution is carried out. The results are obtained in a complex domain. Comparison of calculation results with similar results of calculations obtained by the author earlier is given.

Keywords: nonlinear ordinary differential equation, movable singular point, Cauchy problem, approximate analytical solution, perturbation, error estimation.

Актуальность и методы исследования

Нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения представляют собой математические модели различных процессов и явлений окружающего мира. Известные приближенные аналитические и численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений не применимы к нелинейным дифференциальным уравнениям ввиду наличия у их интегралов подвижных особых точек. В связи с этим задача нахождения приближенных решений нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками является актуальной.

Предлагается приближенный метод решения указанного выше уравнения, идея которого представлена в работах [1–4] и состоит в разделении области поиска решения нелинейного дифференциального уравнения на область голоморфности и окрестность подвижной особой точки, а затем в построении приближенных решений в этих областях. Исследование приближенного решения рассматриваемого уравнения в области голоморфности приведено в работах [5,6]. Разработан алгоритм и создано программное обеспечение для нахождения подвижной особой точки решения исследуемого нелинейного уравнения с заданной точностью [7].

Целью настоящей работы является построение приближенных аналитических решений задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения первого порядка (в нормальной форме) с полиномиальной правой частью пятой степени в окрестности подвижной особой точки. Согласно вышеупомянутому методу, необходимо решить следующие задачи: 1) доказательство теоремы существования и единственности решения задачи Коши для заданного дифференциального уравнения; 2) построение приближенного решения задачи Коши в окрестности точного значения подвижной особой точки; 3) исследование влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение задачи Коши для исходного уравнения.

Результаты

Рассмотрим задачу Коши для уравнения в нормальной форме

$$w'(z) = w^5(z) + \Phi(z) \tag{1}$$

с начальным условием

$$w(z_0) = w_0\,, \tag{2}$$

к которому приводится с помощью некоторой замены переменных нелинейное дифференциальное уравнение

$$w'(z) = \sum_{i=0}^{5} f_i(z)\, w^i(z)\,,$$

в общем случае не интегрируемое в квадратурах [8].

Нелинейность дифференциального уравнения предполагает гипотезу о существовании подвижных особых точек решения этого уравнения. В соответствии с классификацией подвижных особых точек [8], имеем следующую аналитическую структуру решения задачи Коши (1), (2) в окрестности подвижной особой точки z^*:

$$w(z) = (z^* - z)^{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z^* - z)^{n/4}\,, \quad C_0 \uparrow 0\,. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть функция Φ(z) задачи Коши (1), (2) удовлетворяет следующим условиям*:

1) $\Phi(z) \in C^1$ *в области* $|\, z^* - z \,| < r_1$, *где* $r_1 > 0$ *и* z^* *— подвижная особая точка решения w(z) рассматриваемой задачи*;

2) $\exists\, M_1 : (\,|\,\Phi^{(n)}(z^*)|\,/n!) \le M_1$, *где*

$$M_1 = const > 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots\ .$$

Тогда существует единственное решение задачи Коши (1), (2) в виде (3), где ρ = –1/4, правильная часть которого сходится в области

$$|\, z^* - z \,| < r_2\,, \tag{4}$$

где

$$r_2 = \min\left\{ r_1, 1/\sqrt[5]{(4M_2+1)^4} \right\},$$

$$M_2 = \sup_n (\,|\,\Phi^{(n)}(z^*)\,|\,/\,n!\,)\,,$$

$$n = 0,\ 1,\ 2\, \ldots .$$

Доказательство теоремы состоит из двух частей. На первом этапе доказывается единственность представления решения в виде дробно-степенного ряда (3), а на втором этапе — сходимость правильной части этого ряда. Применяется метод мажорант к решению нелинейного дифференциального уравнения, а не к правой части дифференциальных уравнений, как это сделано в классической литературе.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия 1 и 2 теоремы 1, тогда для приближенного аналитического решения*

$$w_N(z) = \sum_{n=0}^{N} C_n (z^* - z)^{(n-1)/4} \tag{5}$$

задачи Коши (1), (2) в области (4) справедлива оценка погрешности

$$\Delta w_N(z) = |\, w(z) - w_N(z) \,| \le$$

$$\le \frac{4^{-1}\,|\, z^* - z \,|^{N/4}}{1 - (4M_2+1)\,|\, z^* - z \,|^{5/4}} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{5} \frac{(4M_2+1)^{[(N+i)/5]}}{N+4+i}\,|\, z^* - z \,|^{(i-1)/4}. \tag{6}$$

Доказательство теоремы основано на оценке выражения $\Delta w_N(z)$ с учетом оценок для коэффициентов C_n ряда (3), полученных в ходе доказательства теоремы 1.

В связи с тем, что методы нахождения подвижных особых точек позволяют получать последние приближенно с заданной точностью, возникает задача исследования влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение. В окрестности возмущенного значения подвижной особой точки $\tilde{z}^*$ вместо (5) будем иметь

$$\tilde{w}_N(z) = \sum_{n=0}^{N} \tilde{C}_n (\tilde{z}^* - z)^{(n-1)/4}, \ \tilde{C}_0 \neq 0, \tag{7}$$

где $\tilde{C}_n$, $\tilde{z}^*$ — возмущенные значения.

Теорема 3. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) $\Phi(z) \in C^1$ *в области* $|\tilde{z}^* - z| < r_3$, *где* $r_3 > 0$;

2) $\exists M_3 : (|\Phi^{(n)}(\tilde{z}^*)|/n!) \le M_3$, *где*

$M_3 = const > 0, \ n = 0, 1, 2, \ldots;$

3) $|\tilde{z}^*| \le |z^*|$;

4) *известна оценка погрешности значения* $\tilde{z}^*$:

$|\tilde{z}^* - z^*| \le \Delta \tilde{z}^*$;

5) $\Delta \tilde{z}^* < 1/\sqrt[5]{4^{10}(4M+1)^4}$.

Тогда для приближенного аналитического решения (7) задачи Коши (1),(2) для любого z из областей

$$\left\{ z : \Delta\tilde{z}^* \le |\tilde{z}^* - z| < r_4 \right\} \cap \left\{ z : |z| \le |\tilde{z}^*| \right\}, \tag{8}$$

$$\left\{ z : |\tilde{z}^* - z| < \Delta\tilde{z}^* \right\} \cap \left\{ z : |z| \le |\tilde{z}^*| \right\} \tag{9}$$

справедлива оценка погрешности

$$\Delta \tilde{w}_N(z) \le \sum_{i=1}^{4} \Delta_i, \tag{10}$$

где

$$\Delta_1 \le \frac{\Delta\tilde{z}^*}{4\sqrt{2}|\tilde{z}^* - z|^{5/4}},$$

$$\Delta_2 \le \Delta \tilde{z}^*(4M+1) \cdot \frac{\sum_{i=1}^{5} 2^{i-5}(4M+1)^{[(4i-4)/5]}\alpha^{i-1}}{1-(4M+1)^4(2\alpha)^5} +$$

$$+4^{\beta}\Delta \tilde{z}^*(4M+1) \cdot \frac{\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{5} 4^{2i+(j-5)/2}(4M+1)^{[(4i+j-4)/5]}\alpha^{i-1+j/4}\right)}{1-(4M+1)^4(16\alpha)^5},$$

$$\Delta_3 \le \frac{\Delta M}{1-2^9(4M+4\Delta M+1)^4\alpha^5} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{4}\left(\sum_{i=1}^{5} \frac{2^{[(9i-j)/5]+1-j/4}}{4i-j+9}(4M+4\Delta M+1)^{[(4i-j)/5]}\alpha^{i+1-j/4}\right),$$

$$\Delta_4 \le \frac{4^{-1}|\tilde{z}^* - z|^{N/4}}{1-(4M+1)|\tilde{z}^* - z|^{5/4}} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{5} \frac{(4M+1)^{[(N+i)/5]}}{N+4+i}|\tilde{z}^* - z|^{(i-1)/4},$$

при этом $M = \sup_n(|\Phi^{(n)}(\tilde{z}^*)|/n!)$,

$$\Delta M = (\sup_{n,G}(|\Phi^{(n+1)}(z)|/n!))\Delta\tilde{z}^*, \ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$G = \left\{ z : |\tilde{z}^* - z| \le \Delta\tilde{z}^* \right\} \cap \left\{ z : |z| \ge |\tilde{z}^*| \right\},$$

$$r_4 = \min\{r_3, 1/\sqrt[5]{4^{10}(4M+1)^4}\},$$

$$\alpha = \begin{cases} |\tilde{z}^* - z| \ \text{для} \ z \ \text{из области} \ (8), \\ \Delta\tilde{z}^* \ \text{для} \ z \ \text{из области} \ (9), \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} 0 \ \text{для} \ z \ \text{из} \ \text{области} \ (8), \\ 1 \ \text{для} \ z \ \text{из} \ \text{области} \ (9). \end{cases}$$

Замечание. Теорема 3 справедлива в областях

$$\left\{ z : |\tilde{z}^* - z| < \Delta\tilde{z}^* \right\} \cap \left\{ z : |z| > |\tilde{z}^*| \right\}, \tag{11}$$

$$\left\{ z : \Delta\tilde{z}^* \le |\tilde{z}^* - z| < r_4 \right\} \cap \left\{ z : |z| > |\tilde{z}^*| \right\}, \tag{12}$$

если в этой теореме вместо условия 3 выполняется условие $|z^*| < |\tilde{z}^*|$. В этом случае

$$\alpha = \begin{cases} \Delta\tilde{z}^* \ \text{для} \ z \ \text{из} \ (11), \\ |\tilde{z}^* - z| \ \text{для} \ z \ \text{из} \ (12), \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} 1 \ \text{для} \ z \ \text{из} \ (11), \\ 0 \ \text{для} \ z \ \text{из} \ (12), \end{cases}$$

$$G = \left\{ z : |\tilde{z}^* - z| \le \Delta\tilde{z}^* \right\} \cap \left\{ z : |z| \le |\tilde{z}^*| \right\}.$$

Обсуждение полученных результатов и сопоставление их с ранее известными

Полученные результаты позволяют построить приближенное решение задачи Коши (1), (2) в окрестности подвижной особой точки с любой наперед заданной точностью. Для оптимизации структуры приближенного аналитического решения используется апостериорная погрешность.

Таблица 1

r_2	$\overline{r}_2$	Δ_1	$\overline{\Delta}_1$
1	0,33	0,00171	0,03538

Примечание. Δ_1 — априорная погрешность приближенного решения $w_3(z_1)$, найденная по теореме 2.

Таблица 2

N	Δ_2	$\overline{\Delta}_2$
15		$4{,}6\cdot 10^{-4}$

Примечание. Δ_2 — апостериорная погрешность.

Таблица 3

r_4	$\overline{r}_4$	Δ_1'	$\overline{\Delta}_1'$
0,063	0,021	0,00524	0,01016

Примечание. Δ_1' — априорная погрешность приближенного решения $\tilde{w}_3(z_2)$, найденная по теореме 3.

Таблица 4

N	Δ_2'	$\overline{\Delta}_2'$
15	$4\cdot 10^{-4}$	$6\cdot 10^{-3}$

Примечание. Δ_2' — апостериорная погрешность.

Следует отметить, что ранее в работе [9] были получены приближенные решения задачи Коши для уравнения

$$w'(z) = w^5(z) + \Phi(z)$$

в окрестности точного значения подвижной особой точки и в окрестности возмущенного значения подвижной особой точки. Анализ результатов, полученных в работе [9], и результатов данной работы позволяет сделать следующие выводы. Оценки (6) и (10) являются улучшенными по сравнению с аналогичными оценками, приведенными в [9]. Что касается окрестностей подвижных особых точек, то они увеличены по сравнению с результатами указанной работы. Проиллюстрируем сказанное на следующем примере.

Пример. Рассмотрим задачу Коши из [9]: $w'(z) = w^5(z)$, $w(i) = \frac{1}{2\sqrt[4]{3}}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$.

Эта задача имеет точное решение

$$w(z) = \frac{1}{\sqrt[4]{i-4z}}.$$

$z^* = 0,25i$ — точное значение подвижной особой точки. Вычислим $r_2 \approx 0,33$.

Выберем значение $z_1 = 0,1 + 0,27i$ в области $|z^* - z| < r_2$. Рассмотрим случай $C_0 = 1/\sqrt{2}$. Учитывая, что все производные функции $\Phi(z)$

равны нулю, в нашем случае получаем совпадение структуры приближенного решения с точным решением. Имеем

$$w(z_1) = 0,927359881 + 0,840068385i$$

и $w_3(z_1) = 0,927359881 + 0,840068385i$, $\Delta = 0$ — абсолютная погрешность приближенного решения $w_3(z_1)$. Будем обозначать значения величин, относящиеся к работе [9], чертой сверху. В следующих таблицах 1 и 2 приведем результаты расчетов.

Перейдем к нахождению приближенного решения рассматриваемой задачи Коши в окрестности точки $\tilde{z}^*$. Для расчетов взяты следующие значения:

$\tilde{z}^* = -0,0001 + 0,2499i,\ \Delta\tilde{z}^* = 10^{-4}$. Выберем

$z_2 = -0,0142 + 0,2411i$ из области (8). Имеем

$w(z_2) = 1,94607 - 0,27418i$ и

$\tilde{w}_3(z_2) = 1,95022 - 0,27381i$,

$\Delta' = 0,0042$ — абсолютная погрешность приближенного решения $\tilde{w}_3(z_2)$. Рассмотрим случай $C_0 = 1/\sqrt{2}$. Расчеты представлены в таблицах 3 и 4.

В результате проведенных расчетов имеем значения априорной и апостериорной погрешностей меньшие соответствующих значений, указанных в работе [9].

Выводы

В данной работе представлены результаты исследования приближенных аналитических решений нелинейного дифференциального уравнения как в окрестности точного, так и возмущенного значения подвижной особой точки в комплексной области. Приведены оценки погрешности приближенных решений задачи Коши, которые являются улучшенными по сравнению с аналогичными оценками, предложенными в работе [9]. Теоретические результаты подтверждены расчетами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Орлов В. Н. Метод приближенного решения дифференциального уравнения Риккати // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского гос. политех. ун-та. 2008. № 63. С. 102–108.
2. Орлов В. Н. Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати // Вестник Московского авиац. ин-та. 2008. Т. 15. № 5. С. 128–135.
3. Лукашевич Н.А., Орлов В. Н. Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве // Дифференциальные уравнения.— 1989. Т. 25. № 10. С. 1829–1832.
4. Редкозубов С.А., Орлов В. Н. Математическое моделирование решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки // Известия Института инженерной физики. 2010. Т. 4. № 18. С. 2–6.
5. Пчелова А. З. Построение приближенных решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка в области аналитичности // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия естественные науки. 2016. № 3. С. 3–15.
6. Пчелова А. З. Приближенные аналитические решения задач Коши для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка в области голоморфности // Вестник Российской Академии естественных наук. Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 16. № 3. С. 48–54.
7. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015618927, Программа «NDE1.5-MS» нахождения подвижной особой точки решения одного нелинейного дифференциального уравнения» / Орлов В. Н., Иванов С. А., Пчелова А. З., заявлено 30.06.2015, опубликовано 20.09.2015, РОСПАТЕНТ.
8. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.-Л.: Гостехиздат. 1950. 436 с.
9. Орлов В.Н., Пчелова А. З. Влияние возмущения подвижной особой точки на приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения в комплексной области // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1 (15). С. 131–141.


Чувашский государственный педагогическийуниверситет им. И. Я. Яковлева