DOI 10.37882/2223-2966.2025.09.40

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ ОЦЕНКИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ И ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ, РЕАЛИЗУЮЩЕГО СОЗДАНИЕ АЛГОРИТМОВ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО

Шаронов Павел Александрович
Аспирант,
Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Саратов
stalker-scharonov@mail.ru

Аннотация. В традиционной практике оценка неопределённости измерений выполняется по методу линейного распространения (GUM), который предполагает линейность модели, независимость и нормальность входных величин. Однако в реальных задачах системного анализа и управления модели часто нелинейны, распределения входов асимметричны, а параметры могут быть коррелированы. Это приводит к искажению результатов, что обуславливает необходимость разработки алгоритмов оценки неопределённости на основе метода Монте-Карло и их программной реализации.
Цель исследования заключается в разработке и апробации алгоритмов оценки неопределённости измерений на основе метода Монте-Карло, обеспечивающих корректный учёт нелинейных зависимостей, корреляций и нестандартных распределений входных величин. Для достижения этой цели создаётся программное обеспечение, реализующее предложенные алгоритмы и позволяющее проводить численное моделирование, анализ результатов и визуализацию распределений в задачах системного анализа и управления.

Ключевые слова: метод Монте-Карло, стандартная и расширенная неопределенность, корреляция входов, распределения, программная реализация.

DEVELOPMENT OF ALGORITHMS FOR ESTIMATING MEASUREMENT UNCERTAINTY AND SOFTWARE IMPLEMENTING THE CREATION OF ALGORITHMS USING THE MONTE CARLO METHOD

P. Sharonov

Summary. In traditional practice, measurement uncertainty is estimated using the linear propagation method (GUM), which assumes the linearity of the model, independence, and normality of the input quantities. However, in real-world problems of system analysis and management, models are often nonlinear, input distributions are asymmetric, and parameters can be correlated. This leads to a distortion of the results, which necessitates the development of algorithms for estimating uncertainty based on the Monte Carlo method and their software implementation.
The purpose of the study is to develop and test algorithms for estimating measurement uncertainty based on the Monte Carlo method, which ensure the correct accounting of nonlinear dependencies, correlations and non-standard distributions of input quantities. To achieve this goal, software is being created that implements the proposed algorithms and allows for numerical modeling, analysis of results, and visualization of distributions in system analysis and management tasks.

Keywords: monte Carlo method, standard and expanded uncertainty, input correlation, distributions, software implementation.

Введение

В современных системах измерения и управления всё более остро стоит задача надёжной оценки неопределённости измерений. Неопределённость — это не просто погрешность прибора, это совокупность всех факторов, которые вызывают вариации результата измерения: шум, особенности метода, нелинейности, влияния среды, корреляции между входами, цифровая обработка и т.д. Без качественной оценки неопределённости невозможно корректно интерпретировать результаты измерений, сравнивать их, принимать решения по управлению на основе данных [1, 2].

Классическим подходом является метод, основанный на руководстве GUM (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement) и аналогичных стандартах, где неопределённости отдельных входов (источников) комбинируются через закон распространения неопределённости LPU (linear propagation / law of propagation of uncertainty). Однако такой подход имеет ограничения: он предполагает линейность модели или приближение линейности, нормальные (или близкие к нормальным) распределения входов, независимость влияющих величин, малость высших порядка членов в разложении и пр. [3, 4].

В последние годы стандарт дополняется или частично конкурируется методом Монте-Карло (MC), где неопределённость оценок входов могут быть распределениями любой формы, могут учитывать корреляции, нелинейности и более сложные модели. Примеры применения метода Монте-Карло в настоящее время можно встретить метрологии, в измерениях формы, в измерениях скорости излучения и др.

В задачах системного анализа и управления часто требуется:

- оценивать надежность измерений, на которых строится управление;
- понимать, как ошибки и неопределённости измерений влияют на устойчивость или качество управления;
- при моделировании систем управления, особенно в реальном времени, желательно иметь оценку, а не просто точечное значение, чтобы управлять процессом с учётом риска.

При практическом применении (например, при работе с датчиками, системами автоматического регулирования, обработке сигналов) появляются нелинейные элементы, цифровая дискретизация, корреляции между сенсорами и т.д., что делает классический LPU-подход (линейная аппроксимация) недостаточным [2, 4].

Цель данного исследования — разработать и реализовать алгоритмы количественной оценки неопределённости измерения на основе метода Монте-Карло, способные работать в условиях:

- нелинейных моделей измерения,
- нестандартных распределений входных величин (не только нормальных),
- коррелированных входов,
- ограниченных вычислительных ресурсов (требуется адаптивный подход к числу симуляций).

Новизна исследования заключается в следующих аспектах:

1. **Сочетание адаптивного метода Монте-Карло и анализа вклада входных параметров.** Многие работы применяют MC при фиксированном числе симуляций, либо исключительно для распределений стандартного вида; наше исследование вводит критерий остановки симуляций при достижении заданной точности и анализ вклада каждого параметра в неопределённость.
2. **Особое внимание к корреляциям между входными величинами.** Хотя стандарты (например, JCGM 101 и 102) предусматривают возможность учёта корреляций, на практике многие исследования пренебрегают ими. В данной работе корреляции моделируются и их влияние на неопределённость тщательно исследуется.
3. **Разработка модульного программного обеспечения, включающего визуализацию распределения результата, доверительных интервалов и анализ вклада входов.** Это обеспечивает воспроизводимость, прозрачность и возможность практического применения в лабораториях и прикладных системах управления.
4. **Обоснование вычислительной эффективности.** Работа рассматривает методы ускорения (например, уменьшение числа симуляций без потери точности) и демонстрирует, что при тщательно подобранных параметрах можно получить хорошую оценку неопределённости относительно затрат ресурсов.

Неопределённость измерения (measurement uncertainty) — параметр, характеризующий разброс значений, которые могут быть приписаны измеряемой величине, при условии повторяемой процедуры измерения. Включает как случайные, так и систематические источники [1, 3, 5].

Существует стандарт GUM («Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement») и его дополнения, в частности JCGM 101:2008 — *Supplement 1: Propagation of distributions using a Monte Carlo method* — регулирующий распространение распределений входных величин через математическую модель измерения. Так же дополнение JCGM 102:2011 рассматривает модели с любым числом выходных величин (multivariate output quantities).

Подходы к оценке неопределённости:

- Классический подход (по GUM, линейный подход / law of propagation of uncertainty — LPU): предполагается, что модель измерения либо линейна, либо может быть линеаризована; входные неопределённости заданы стандартными отклонениями (тип A и тип B), предполагаются независимость и нормальность распределений либо приближение к ним [6].
- Ограничения линейного подхода: при сильной нелинейности модели, сильных корреляциях между входами, нестандартных распределениях (ненормальных, асимметричных, с тяжёлыми хвостами) — линейная аппроксимация может давать значительные искажения [1,3].
- Метод Монте-Карло (Monte Carlo Method, MCM) согласно стандарту, JCGM 101: позволяет задать распределения входов (любой формы, с корреляциями), простимулировать большое число реализаций измерительной модели, получить эмпирическое распределение измеряемой величины, оценить параметры этого распределения (среднее, стандартное отклонение, доверительный интервал, расширенную неопределённость) [8].

Постановка задачи и математическая модель

Пусть у нас имеется измерительная система, призванная оценить величину Y (измеряемая величина, measurand), которая зависит от множества входных величин (влияющих параметров) X_1, X_2, …, X_n [7]. Эти входы могут быть случайными величинами с определёнными распределениями (тип A) или неопределённостями типа B (например, систематическими эффектами, характеристиками прибора и др.), возможно с корреляциями между ними.

Цель: построить алгоритм, который по заданным распределениям и корреляциям X_i, по математической модели $Y=f(X_1,\ldots,X_n)$ оценит:

- стандартную неопределённость результата U(Y)
- расширенную неопределённость U(Y) при заданном уровне покрытия (coverage factor, например 95 %)
- доверительный интервал результата (или функцию распределения результата)

Дополнительно: если модель f нелинейна, либо есть необходимость учесть коррелированность Xi, или распределения нестандартной формы, нужно, чтобы алгоритм корректно работал в этих условиях.

Математическая модель

Обозначим:

- $X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ — вектор входных величин
- Каждая X_i имеет распределение P_i, возможно с параметрами: математическое ожидание μ_i, стандартное отклонение σ_i, возможно плотностью $p_i(x_i)$ (если непрерывная) или вероятностной функцией, если дискретная.
- Возможны корреляции между X_i; можно задать их через матрицу ковариаций Σ.

Модель измерения:

$$Y=f(X)$$

где f:Rn → R — заданная (возможно нелинейная) функция.

Применение метода Монте-Карло

В данной работе для реализации выбран язык Python (версия ≥ 3.7), в силу его зрелой экосистемы для научных вычислений. В частности, используются:

- numpy — для операций с массивами и генерации случайных величин,
- scipy.stats — для распределений и статистических функций,
- matplotlib / seaborn — для визуализации (гистограммы, плотности, доверительные интервенты),
- при необходимости — библиотеки copulas, pandas, multiprocessing (для параллелизма).

```python
import numpy as np
from scipy.stats import norm, lognorm, uniform
import matplotlib.pyplot as plt

def simulate_uncertainty(f, dist_info, cov_matrix=None, N=100000):
    """
    f : функция, принимающая вектор x (размер n) и возвращающая значение Y
    dist_info : список словарей, каждый описывает распределение Xi
        {'type': 'normal', 'mu': ..., 'sigma': ...},
        {'type': 'lognormal', 'mean': ..., 'sigma': ...},
        {'type': 'uniform', 'low': ..., 'high': ...}, и т.д.
    cov_matrix : ковариационная матрица (n × n), если требуется учитывать корреляции
    N : число симуляций
    """
    n = len(dist_info)
    # Генерация выборок
    if cov_matrix is None:
        samples = np.zeros((N, n))
        for i, info in enumerate(dist_info):
            if info['type'] == 'normal':
                samples[:, i] = np.random.normal(info['mu'], info['sigma'], size=N)
            elif info['type'] == 'lognormal':
                samples[:, i] = np.random.lognormal(info['mean'], info['sigma'], size=N)
            elif info['type'] == 'uniform':
                samples[:, i] = np.random.uniform(info['low'], info['high'], size=N)
```

Рис.1. Листинг 1. Фрагмент кода генерации выборок входных параметров X_i с учётом распределений (Python)

```python
def f_model(x):
    X1, X2, X3 = x
    return X1 * np.exp(X2) / (1 + np.sin(X3))

# Пример параметров распределений
dist_info = [
    {'type': 'normal', 'mu': 1.0, 'sigma': 0.1},
    {'type': 'lognormal', 'mean': 0.0, 'sigma': 0.2},
    {'type': 'uniform', 'low': 0.0, 'high': np.pi}
]

# Выполнение симуляции
result = simulate_uncertainty(f_model, dist_info, cov_matrix=None, N=200000)

print("Среднее Y:", result['mean'])
print("Стандартная неопределённость:", result['std_uncertainty'])
print("Доверительный интервал 95 %:", (result['ci_lower'], result['ci_upper']))

# Визуализация
plt.hist(result['samples'], bins=50, color='blue', edgecolor='black')
plt.xlabel('Y')
plt.ylabel('Частота')
plt.title('Гистограмма распределения Y')
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Рис. 2. Листинг 2. Вычисление результатов $Y^{(j)} = f(X(j))$ и сбор статистики (среднее, стандартное отклонение, доверительные интервалы)

Такая комбинация обеспечивает баланс между простотой кода, гибкостью настроек и производительностью.

Функция simulate_uncertainty генерирует N выборок входных параметров, учитывая заданные распределения и корреляции, вычисляет соответствующие значения результата Y, и оценивает статистики: среднее значение, стандартную неопределённость и доверительный интервал. Приведён код реализации, в экспериментальной части применён этот алгоритм к моделям (линейной, нелинейной, с коррелированными входами).

Приведённый выше код демонстрирует, каким образом можно смоделировать процесс распространения неопределённостей от входных параметров к результату измерения. В результате выполнения программы формируется массив значений $Y^{(j)}$, на основании которого вычисляются ключевые характеристики: среднее значение, стандартная неопределённость и доверительные интервалы. Такой подход позволяет учесть не только форму распределений входных параметров, но и их возможные корреляции и нелинейное влияние на выходную величину.

Графическое представление (гистограмма, плотность распределения) является удобным инструментом для визуальной оценки характера распределения результата. В ряде случаев (например, при логнормальном или треугольном распределении входов) распределение результата может быть существенно асимметричным, и в таких ситуациях метод Монте-Карло даёт более реалистичную картину неопределённости по сравнению с классическим линейным подходом [9, 10].

1. **Гибкость в выборе распределений.** Возможность моделировать нормальные, логнормальные, равномерные, треугольные и другие распределения без ограничения линейной аппроксимацией.
2. **Учёт корреляций.** Реализация позволяет моделировать зависимые входные параметры, что крайне важно в реальных измерительных задачах.
3. **Визуализация результатов.** Гистограммы и доверительные интервалы позволяют не только численно, но и наглядно оценивать характер распределения результата.
4. **Адаптивность.** При необходимости число симуляций N можно увеличивать до тех пор, пока оценка неопределённости не станет устойчивой.

Заключение

В ходе исследования были рассмотрены проблемы традиционного подхода к оценке неопределённости

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Количество симуляций
N = 10000
np.random.seed(42)

# Генерация случайных входов
X1 = np.random.normal(1, 0.1, N)
X2 = np.random.lognormal(0, 0.2, N)
X3 = np.random.uniform(0, np.pi, N)

# Модель
Y = X1 * np.exp(X2) / (1 + np.sin(X3))

# Построение гистограммы
plt.figure(figsize=(8,5))
plt.hist(Y, bins=50, color='blue', edgecolor='black', alpha=0.7)
plt.xlabel("Значение результата Y")
plt.ylabel("Частота")
plt.title("Гистограмма распределения результата (нелинейная модель, Монте-Карло)")
plt.grid(axis='y', linestyle='--', alpha=0.6)

# Сохранение в PNG
plt.tight_layout()
plt.savefig("mc_histogram.png", dpi=300)
plt.show()
```

Рис. 3. Гистограмма распределения результата нелинейной модели, построенная методом Монте-Карло ($N=10^4$). Распределение асимметрично, что подчёркивает необходимость применения численных методов вместо линейной аппроксимации

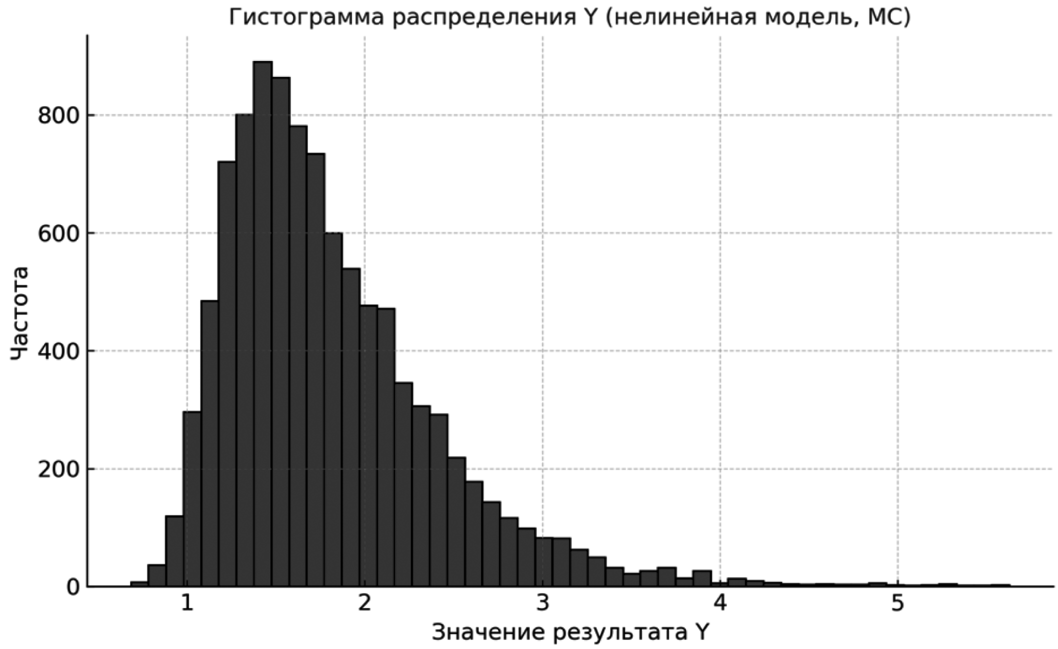

Рис. 4. Гистограмма распределения Y (нелинейная модель, MC-симуляция)

измерений, основанного на линейной аппроксимации (метод GUM), и показано, что он недостаточен при наличии нелинейных моделей, асимметричных распределений и коррелированных входных величин. В качестве альтернативы разработаны алгоритмы на основе метода Монте-Карло, которые позволяют воспроизводить реальные распределения выходной величины и формировать более надёжные оценки стандартной и расширенной неопределённости [11].

Предложенные алгоритмы реализованы в программном обеспечении, которое поддерживает широкий набор распределений входных параметров, учитывает корреляции и обладает адаптивным механизмом выбора числа симуляций. Это делает метод практически применимым для задач метрологии, инженерных измерений и анализа систем управления.

Проведённые численные эксперименты показали, что:
- для простых линейных моделей с нормальными входами метод Монте-Карло даёт результаты, сопоставимые с классическим методом распространения неопределённостей;
- при усложнении модели (нелинейные зависимости, асимметрия распределений) классический метод существенно занижает неопределённость, тогда как Монте-Карло обеспечивает достоверную оценку;
- учёт корреляций между входными величинами в рамках Монте-Карло критически важен, поскольку их игнорирование может привести к серьёзным искажениям итоговой оценки.

Таким образом, применение метода Монте-Карло обеспечивает универсальность и гибкость при оценке неопределённости, а разработанное программное обеспечение делает данный подход доступным для широкого круга специалистов. Разработанный алгоритм может использоваться как в исследовательских целях, так и в практических приложениях:
- в метрологических лабораториях для подтверждения достоверности измерений [12],
- в системах управления для анализа устойчивости алгоритмов к возмущениям,
- в инженерных расчётах для оценки риска выхода параметров за допустимые пределы.

Программная реализация универсальна и может быть интегрирована в существующие системы анализа данных или представлена в виде отдельного модуля для специалистов в области измерений и управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Marschall M., Demeyer S., Petit S., Wübbeler G., Fischer N., Elster C. Utilizing prior knowledge about the measurement process for uncertainty evaluation through plain Monte Carlo sampling // International Journal of Metrology and Quality Engineering. — 2024. — Vol. 15. — P. 14.
2. Mahmoud G. M., Hegazy R. S. Comparison of GUM and Monte Carlo methods for the uncertainty estimation in hardness measurements // International Journal of Metrology and Quality Engineering. — 2017. — Vol. 8, No. 6. — P. 22.
3. Białek A., Vellucci V., Gentil B., Antoine D., Gorroño J., Fox N., Underwood C. Monte Carlo–Based Quantification of Uncertainties in Determining Ocean Remote Sensing Reflectance from Underwater Fixed-Depth Radiometry Measurements // Journal of Atmospheric and Oceanic Technology. — 2020. — Vol. 37, No. 2. — P. 243–258.
4. Liu G., Wang H., Han Y., Liu C., Liang M. Application of the adaptive Monte Carlo method for uncertainty evaluation in the determination of total testosterone in human serum by triple isotope dilution mass spectrometry // Analytical and Bioanalytical Chemistry. — 2024. — Published online: 19 June 2024. — DOI: 10.1007/s00216-024-05380-z.
5. Гаврилова А.С. МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО В МОДЕЛИРОВАНИИ // Форум молодых ученых. 2019. №1-1 (29). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/metod-monte-karlo-v-modelirovanii (дата обращения: 30.09.2025).
6. Божко Л.М. Использование метода Монте-Карло в имитационном моделировании экономических систем // Интеллектуальные технологии на транспорте. 2023. №1 (33). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-metoda-monte-karlo-v-imitatsionnom-modelirovanii-ekonomicheskih-sistem (дата обращения: 30.09.2025).
7. В.А. Воеводин, Метод Монте-Карло для оценки устойчивости функционирования объекта информатизации в условиях массированных компьютерных атак. Вестн. Астрахан. гос. техн. ун-та. Сер. управление, вычисл. техн. информ., 2022, номер 2, 66–75.
8. Рукавишникова, А.И. Методы Монте-Карло и Квази Монте-Карло для решения систем линейных алгебраических уравнений: специальность 01.01.07 «Вычислительная математика»: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук / Рукавишникова Анна Игоревна. — Санкт-Петербург, 2008. — 16 с. — EDN NKRMPR.
9. Кудряшов, С.Ю. Расчет термодинамических характеристик адсорбции метана и этана на графите методом Монте-Карло / С. Ю. Кудряшов // Журнал физической химии. — 2024. — Т. 98, № 10. — С. 14–23. — DOI 10.31857/S0044453724100031. — EDN NMKHHW.
10. Павленко, Л. В. Параллельная реализация алгоритма прямого метода Монте-Карло для моделирования стационарного течения одноатомного газа / Л.В. Павленко, С.А. Маякова // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2010): Труды международной научной конференции, Уфа, 29 марта — 02 2010 года / Ответственные за выпуск: Л.Б. Соколинский, К.С. Пан. — Уфа: Издательский центр ЮУрГУ, 2010. — С. 545–550. — EDN RDXQKM.
11. Шаронов П.А., Ивженко С.П., Умнова Е.Г., Вагарина Н.С., Мельникова Н.И. Интервальный метод расчета неопределенностей в экспериментальных исследованиях тензодатчиков // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2021. №2. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/intervalnyy-metod-rascheta-neopredelennostey-v-eksperimentalnyh-issledovaniyah-tenzodatchikov (дата обращения: 09.10.2025).
12. Шаронов П.А., Балабан О.М., Пчелинцева Е.Г., Гулевич Н.А. Математическая модель распространения неопределенности в измерительных системах // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2021. №2. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/matematicheskaya-model-rasprostraneniya-neopredelennosti-v-izmeritelnyh-sistemah (дата обращения: 09.10.2025).