

# ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ МЕТОДОВ ФИЛЬТРАЦИИ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ НАВИГАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ

## STUDY OF OPTIMAL LINEAR METHODS OF FILTERING AND PREDICTION OF NAVIGATION SIGNALS

**E. Vinogradova  
Yu. Ivanov**

*Summary.* As one of the potential alternatives to Kalman filtering and prediction, this article considers finite-time feedback, spectral-finite free optimal methods of filtering and predicting discrete navigation signals. The methods presented are versatile and easy to implement, with their accuracy and dynamic signal processing characteristics asymptotically approaching those of Kalman algorithms depending on the value of memory capacity  $r$  (number of measurement results).

During the research, a comparative analysis is performed of Kalman filtering and predicting methods with finite-time and spectral-finite optimal methods for processing and predicting navigation signals, with and without feedback, in terms of accuracy, transition time, robustness, and noise immunity. A linear discrete measurement model is considered with an additive error, a Gaussian Markov stationary random process is used as a useful signal, and uncorrelated stationary white Gaussian noise is used as interference.

*Keywords:* finite-time processing, spectral-finite processing, Kalman filtering and prediction, optimal filtering, optimal prediction, estimation of accuracy and dynamic properties.

**Виноградова Екатерина Денисовна**

Санкт-Петербургский государственный университет  
аэрокосмического приборостроения  
vinogradovae415@gmail.com

**Иванов Юрий Павлович**

кандидат технических наук, доцент,  
Санкт-Петербургский государственный университет  
аэрокосмического приборостроения  
yri35@mail.ru

*Аннотация.* В качестве одной из возможных альтернатив методу фильтрации и прогнозирования Калмана в данной статье рассматривается финитно-временной с обратной связью и спектрально финитный без обратной связи оптимальные методы фильтрации и прогнозирования навигационных дискретных сигналов. Представленные методы отличаются универсальностью, простотой реализации, а их точностные и динамические характеристики обработки сигнала асимптотически приближаются к показателям фильтрации и прогнозирования Калмановских алгоритмов в зависимости от значения объема памяти  $r$  (количество результатов измерений).

В процессе исследования выполняется сравнительный анализ методов фильтрации и прогнозирования Калмана с финитно-временным и спектрально-финитными оптимальными методами обработки и прогнозирования навигационных сигналов с обратной связью и без обратной связи соответственно по показателям точности, времени переходного процесса, робастности и помехозащищенности. Рассматривается линейная дискретная модель измерений с аддитивной погрешностью, в качестве полезного сигнала используется гауссовский марковский стационарный случайный процесс, а в качестве помехи — некоррелированный стационарный белый гауссовский шум.

*Ключевые слова:* финитно-временная обработка, спектрально-финитная обработка, фильтрация и прогноз Калмана, оптимальная фильтрация, оптимальное прогнозирование, оценка точности и динамических свойств.

## Введение

**А**ктуальность применения математических фильтров при обработке сигналов обусловлена неизменно присутствующей погрешностью в показаниях различного рода датчиков и устройств, вызванной как конечной точностью самого устройства, так и влиянием случайных воздействий: чаще всего это различные физические процессы природного характера, а также паразитные напряжения, возникающие из-за электромагнитных и тепловых полей внутри информационно-измерительных систем (ИИС) [1]. Существующие сложности в обработке сигналов усугубляются тем, что в большинстве случаев невозможно напрямую измерять

параметры процессов внутри разнообразных устройств без нарушения их целостности. Применение методов фильтрации позволяет минимизировать ошибку в наблюдениях и показаниях датчиков.

Метод фильтрации Калмана зарекомендовал себя как эффективный инструмент для решения задач цифровой обработки сигналов [2]. В настоящее время ни один GPS или ГЛОНАСС навигатор не обходится без программной реализации Калмановского алгоритма, который также успешно используется и в системах управления для обработки показаний датчиков.

Благодаря ряду достоинств метод Калмана может обеспечить высокую точность оценки [3]: критерием оп-

тимальности является средний квадрат ошибки оценки; оптимальность алгоритма в течение переходного процесса; если законы распределения векторных случайных процессов нормальные и модель измерения сигналов линейная, то оценка на выходе фильтра Калмана будет наилучшей оценкой в классе любых оценок, при негауссовом распределении сигналов алгоритм обеспечивает наилучшую оценку в классе линейных оценок; применение рекуррентных формул для оценки сигналов; для формирования текущих оценок используются все измерения с начального момента работы фильтра; возможность применения метода фильтрации в случае многомерных динамических систем.

Но наряду с достоинствами фильтрация Калмана имеет ряд серьезных недостатков: значительная чувствительность к изменениям характеристик наблюдаемых сигналов относительно заданных значений при выборе параметров фильтра Калмана; сравнительно большой объем исходных данных; модель оцениваемого сигнала должна обладать марковским свойством; необходимость представления сигнала в пространстве состояний, что, в сочетании с предыдущим пунктом, ограничивает универсальность метода и увеличивает размерность вектора оцениваемых процессов; необходимость решения нелинейного уравнения Риккати для функционирования фильтра; отсутствие универсальности алгоритмов оценки при использовании моделей помехи в виде белого шума и коррелированной помехи измерения.

Несмотря на то, что фильтрация Калмана имеет большое практическое значение в обработке навигационных сигналов, метод неидеален и вопрос поиска и внедрения новых альтернативных алгоритмов фильтрации, более простых в исполнении, универсальных и помехозащищенных, до сих пор актуален.

В качестве такой альтернативы в данной исследовательской работе предлагаются новые методы обработки навигационных измерений: финитно-временной (ФВ) с обратной связью (ОС) и спектрально-финитный (СФМ) без обратной связи оптимальные методы фильтрации и прогнозирования навигационных дискретных сигналов. Рассматриваемые алгоритмы не требуют свойства марковости процесса, что делает их универсальным в плане вида используемых сигналов, они инвариантны к наличию или отсутствию свойства коррелированности помехи измерения, а их реализация не предусматривает решения уравнения Риккати, что существенно упрощает вычислительный процесс. При этом по точности алгоритмы асимптотически приближаются к методу Калмана.

#### Описание математических методов

Проведение исследования и сравнительного анализа методов фильтрации и прогнозирования рассмотре-

но на примере скалярной дискретной линейной модели измерения сигналов с аддитивной погрешностью вида:

$$Y_i = X_i + H_i, i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

где  $Y_i$  — значение наблюдаемого случайного сигнала в канале датчика угла атаки в  $i$ -ый момент времени;  $X_i$  — значение оцениваемого полезного сигнала в  $i$ -ый момент времени;  $H_i$  — значение помехи измерения в канале датчика угла атаки в  $i$ -ый момент времени;  $N$  — общее число точек наблюдения в выборочной совокупности (объем выборки).

Процесс является гауссовским, стационарным, марковским, с нулевым математическим ожиданием. Погрешность измерения и полезный сигнал взаимно некоррелированы. Моделью помехи является стационарный гауссовский случайный процесс, корреляционная функция которого известна, распределенный по нормальному закону.

#### Финитно-временной метод фильтрации и прогнозирования

Для осуществления финитно-временной рекуррентной фильтрации с обратной связью и оценки прогноза необходимо линейную модель сигнала (1) представить в виде вектора размерностью  $r \times 1$ , образованного результатом измерений  $Y_i$  в  $i$ -ый момент времени и оптимальными оценками  $\hat{X}_p^*$ ,  $p = i-1, i-2, \dots, i-r+1$ , полученными в  $r-1$  моментах времени, предшествующих текущему моменту времени  $i$  [4]:

$$Z_i = \left[ Y_i, \hat{X}_{i-1}^*, \dots, \hat{X}_{i-r+1}^* \right]^T, \quad (2)$$

где  $r-1$  — величина, определяющая память алгоритма оценки; зависит от порядка марковости оцениваемого сигнала, а если он неизвестен или оцениваемый процесс является не марковским, от требуемого приближения точности оценки к необходимому значению точности при заданном виде и уровне помех.

Оператор оптимальной линейной оценки определяется на основании использования следствия теоремы ортогонального проецирования [5]. Его можно найти в виде матрицы весовых коэффициентов размера  $r \times r$  определяемой корреляционными моментами рассматриваемых центрированных составляющих векторов полезного сигнала  $X_i$  и  $Z_i$ , содержащего результат измерения в текущий момент времени  $i = 1, 2, \dots, n$  и интерполированные оценки сигнала в моменты времени  $k = i-1, i-2, \dots, i-r+1$  [6]:

$$A_i^* = K x_i z_i \times K z_i^{-1}, \quad (3)$$

где  $Kx_i z_i$  — взаимная матрица размерности  $r \times r$  корреляционных моментов полезного сигнала  $\mathbf{X}_i = [X_i, X_{i-1}, \dots, X_{i-r+1}]^T$  и вектора входного сигнала  $\mathbf{Z}_i$  в  $i$ -ый момент времени;  $Kz_i$  — матрица размерности  $r \times r$  корреляционных моментов входного сигнала  $\mathbf{Z}_i$  в  $i$ -ый момент времени.

Оптимальный вектор размерности  $r \times r$  оценок фильтрации и интерполяции сигнала  $\mathbf{X}_i$  в  $i$ -ый момент времени определяется соотношением:

$$\hat{\mathbf{X}}_i^* = \mathbf{A}_i^* \times \mathbf{Z}_i + \hat{\mathbf{X}}_{Hi}, \quad (4)$$

где  $\hat{\mathbf{X}}_{Hi}$  — вектор, обеспечивающий несмещенность оценок.

Матрица  $K\hat{\mathbf{X}}_i^*$  размерности  $r \times r$  взаимных корреляционных моментов оптимальных оценок в  $i$ -ый момент времени определяется из следующего соотношения:

$$K\hat{\mathbf{X}}_i^* = \mathbf{A}_i^* \times Kz_i \times \mathbf{A}_i^{*T} \quad (5)$$

В основе алгоритма финитно-временного прогнозирования лежит следствие финитно-временной фильтрации, где матрица преобразования  $\mathbf{A}^*$  изменяется с учетом прогноза сигнала на интервал времени  $t_{np}$  (с учетом некоррелированности помех измерения) [7]:

$$\mathbf{A}_{i+np}^* = Kx_i z_{i+np} (i \cdot d + t_{np} \cdot d) \times Kz_i^{-1}, \quad (6)$$

где  $d$  — дискрет, определяемый по теореме Котельникова;  $t_{np}$  — время прогноза.

Выражение для матрицы корреляционных моментов ошибок оптимальных оценок можно определить следующим соотношением:

$$K\varepsilon_i^* = Kx_i - K\hat{\mathbf{X}}_i^*, \quad (7)$$

где матрицу  $Kx_i$  размерности  $r \times r$  корреляционных моментов  $Kx_{i-k} x_{i-p}$ ,  $k, p = 1, 2, \dots, r$  компонент вектора оцениваемых сигналов.

Выражение для матрицы корреляционных моментов ошибок произвольных оценок можно определить следующим соотношением [8]:

$$K\varepsilon_i = Kx_i - \mathbf{A}_i^* \times Kx z_i - (\mathbf{A}_i^* \times Kx z_i)^T + K\hat{\mathbf{X}}_i^* \quad (8)$$

После окончания переходного процесса при использовании оптимальной оценки элементы матриц  $K\varepsilon_i^*$  и  $K\varepsilon_i$  совпадут. След корреляционной матрицы моментов ошибок оптимальных оценок определит качество филь-

трации и интерполяции используемых алгоритмов оценок.

Статистическая оценка дисперсии ФВ фильтрации и оценки прогноза в момент времени  $i$  определяется с помощью следующего соотношения:

$$D_{E_i}^* = D_{E_{i-1}}^* + \frac{1}{i-1} \times \left[ (E_i^* - M_{E_i})^2 - D_{E_{i-1}}^* \right], \quad (9)$$

где  $E_i^*$  — ошибка оценки фильтрации и прогнозирования;

$M_{E_i}$  — статистическая оценка математического ожидания, определяемая как:

$$M_{E_i} = M_{E_{i-1}} + \frac{1}{i-1} \times (E_i^* - M_{E_{i-1}}) \quad (10)$$

### Спектрально-финитный метод фильтрации и прогнозирования

Переход к спектрально-финитной фильтрации основывается на представлении случайного сигнала на финитном интервале времени в виде частичной суммы ряда Карунена-Лоэва, являющегося частным случаем ряда Фурье. Разложение полезного сигнала и помехи в ряд Фурье осуществляется с применением формулы [9]:

$$X_i = \sum_{k=1}^N Cx_k \Psi_k, \quad (11)$$

где  $\Psi_k$  — ортонормированный полный базис Карунена-Лоэва.

Коэффициенты разложения определяются из скалярного произведения следующим образом:

$$Cx_k = (X_i, \Psi_k) \quad (12)$$

Коэффициенты разложения Карунена-Лоэва являются ортогональными случайными величинами [10]. Наиболее информативным является первый коэффициент, так как в нем содержится большая часть энергии сигнала, а каждый следующий коэффициент дает точность прогноза лишь на десятые и сотые доли ввиду применения разложения Карунена-Лоэва.

Оптимальная по критерию минимума следа матрицы оценка вектора спектральных компонент рассчитывается по формуле [11]:

$$\hat{C}x_{s,i}^* = A c x_i^* \times C z_i, \quad (13)$$

где  $s$  — размерность вектора спектральных компонент;  $A c x_i^*$  — оператор оптимальной оценки;  $C z_i$  — вектор спектральных компонент сигнала.

Оператор оптимальной оценки  $Ax_i^*$  из формулы (13) в случае фильтрации и прогноза соответственно определяется в виде:

$$Ax_s^* = KCx_s \times KCz_s^{-1},$$

$$Ax_{\text{спр}}^* = KCx_s (i \cdot d + t_{\text{пр}} \cdot d) \times KCz_s^{-1}, \quad (14)$$

где  $KCx_s, KCz_s$  — корреляционные матрицы сигнала и сигнала с помехой.

Оптимальная оценка сигнала во временном представлении определяется из выражений:

$$Ax_s^* = BB_s \times Ax_s^* \times BB_s^{-1}, \quad (15)$$

где  $BB_s$  — матрица собственных векторов корреляционной функции полезного сигнала;  $\hat{X}_{H_i}$  — вектор, обеспечивающий несмещенность оценок.

Корреляционная матрица оптимальных оценок определяется выражением:

$$K\hat{X}_i^* = BB_i \times Ax_i^* \times KCz_i \times Ax_i^{*T} \times BB_i^T, \quad (16)$$

Матрица корреляционных моментов ошибок оптимальных оценок  $\hat{X}_i^*$  финитно-спектрального представления сигнала в  $i$ -ый момент времени [12]:

$$K\varepsilon_i^* = Kx_i - K\hat{X}_i^* \quad (17)$$

Матрица корреляционных моментов ошибок произвольных оценок определяется соотношением:

$$K\varepsilon_i = Kx_i - A_i^* \times Kxz_i - (A_i^* \times Kxz_i)^T + K\hat{X}_i^* \quad (18)$$

После окончания переходного процесса оценки точности, полученные по формулам (17) и (18), совпадут т.к. качество оценки, определяемое формулой (17) справедливо только когда выполняется процесс квазиоптимальной фильтрации в отличие от соотношения (18), справедливого для любого состояния процесса обработки сигналов.

Время переходного процесса зависит от того, насколько начальные значения для оценок будут отличаться от реальных значений, полученных после окончания переходного процесса. В качестве начальных значений в моменты времени  $r=0, 1, \dots, k-1$  можно задать векторы размерностью  $k \times 1$  результатов измерений  $Z_1$  и начальных значений вектора  $\hat{X}_{H_i}$ .

#### Сравнительный анализ рассматриваемых алгоритмов

Критерием оптимальности для рассматриваемых методов является дисперсия ошибки оценки. Исследуемым

объектом для оценивания является датчик угла атаки, модель измерения которого описывается линейным уравнением (1). Рассматривается модель полезного сигнала, которая представляет собой гауссовский стационарный случайный процесс с корреляционной функцией:

$$Kx_{i,j} = \sigma^2 \times e^{-\alpha|i-j|^d}, i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (19)$$

где  $\sigma$  — среднеквадратическое отклонение (СКО) полезного сигнала;  $\alpha$  — параметр корреляционной функции;  $d$  — дискрет, определяемый по теореме Котельникова.

Модель помехи представляется в виде некоррелированного стационарного белого гауссовского шума, корреляционная функция которого имеет вид:

$$K_{H_i} = \sigma_H^2 \cdot \delta_i, i = 1, 2, \dots, N, \quad (20)$$

где  $\sigma_H$  — среднеквадратическое отклонение белого шума (помехи);

$\delta_i$  — дельта-функция Дирака.

Сравнительный анализ рассматриваемых алгоритмов фильтрации, прогнозирования и оценки достоверности прогноза производится при следующих исходных данных:

- объем выборки  $N = 2000$ ;
- среднеквадратическое отклонение полезного сигнала  $\sigma = 10^\circ$ ;
- среднеквадратическое отклонение погрешности датчика угла атаки  $\sigma_H = 1^\circ$ ;
- параметр корреляционной функции  $\alpha = 0,01 \text{ с}^{-1}$ ;
- память (для финитно-временной обработки с ОС)  $r = 4$ ;
- дискрет  $d = 5$ ;
- интервалы времени прогноза  $pr = 20 \text{ с}$ ;
- математические ожидания полезного сигнала  $M[X_i] = 0$  и помехи  $M[H_i] = 0$ .

Для проведения сравнительного анализа по точности и времени переходного процесса приведены графики зависимостей теоретических и статистических дисперсий ошибок оценок исследуемых методов фильтрации и прогнозирования. На рисунке 1 используются следующие условные обозначения:

DOshOc\_X00<sub>i</sub> — статистическое значение дисперсии ошибки оценки финитно-временной обработки с ОС; DOshOc\_sT<sub>i</sub> — статистическое значение дисперсии ошибки оценки спектрально-финитной обработки соответственно; DOshOc\_k<sub>i</sub> — статистическое значение дисперсии ошибки оценки фильтрации Калмана.

Как видно из рисунка 1, ФВ метод с ОС при выбранном значении памяти  $r = 4$  по точности практически

не уступает фильтру Калмана, а по времени переходного процесса имеет небольшой выигрыш. СФМ алгоритм незначительно уступает Калмановской фильтрации по точности и времени переходного процесса.

Рассмотрим графики зависимостей теоретических и статистических дисперсий ошибок оценок исследуемых методов прогнозирования на интервалах упреждения 10 и 20 секунд. Для рисунков 2, 3 введены следующие условные обозначения:  $DOshOc\_X00pr_j$  и  $D00pr_{pr1,1}$  — статистическое и теоретическое значения дисперсий ошибки оценки ФВ оценки прогноза с ОС соответственно;  $DOshOc\_sTpr_j$  и  $D\_sTpr_{pr1,1}$  — статистическое и теоретическое значения дисперсий ошибки оценки СФМ оценки прогноза с ОС соответственно;  $DOshOc\_kpr_j$  и  $Dektpr_j$  — статистическое и теоретическое значения дисперсий ошибки оценки прогноза Калмана соответственно.

Из рисунков 2, 3 видно, что точность финитно-временной оценки прогноза с ОС близка прогнозу Калмана. Время переходного процесса алгоритма Калмана сравнимо с временем переходного процесса финитно-временного метода. Стоит обратить внимание, что при увеличении интервала времени прогнозирования происходит заметное сокращение различия между теоретическими значениями дисперсий финитно-временной оценки прогноза с ОС и методом Калмана.

Спектрально-финитная оценка прогноза незначительно уступает по точности и времени переходного процесса Калмановскому прогнозу.

Численные результаты дисперсий ошибки оценки и времени переходного процесса рассматриваемых методов фильтрации и прогнозирования при интервалах

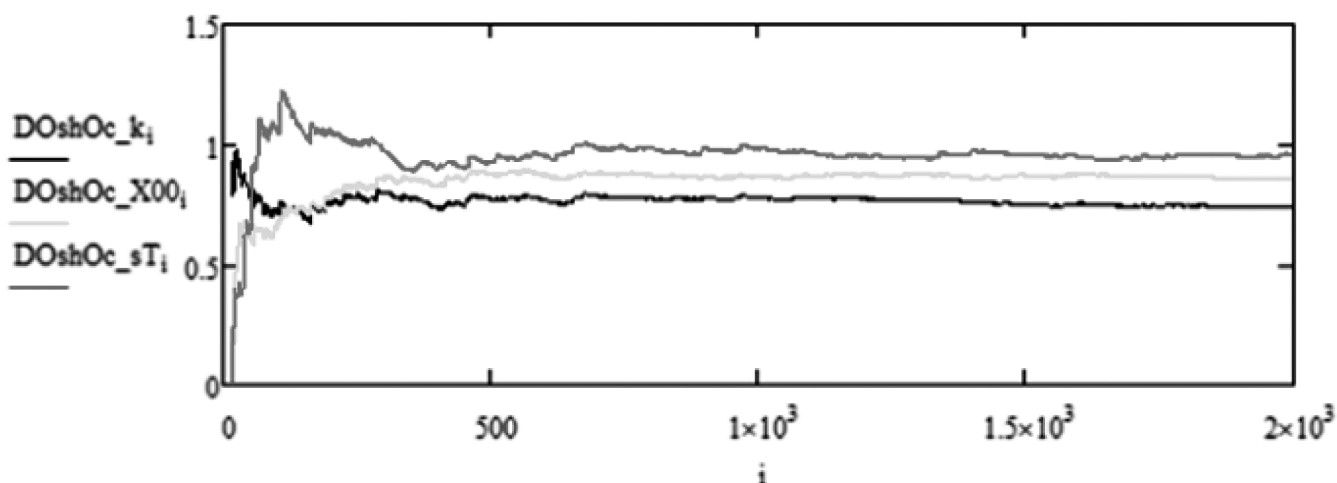


Рис. 1. Графики зависимостей теоретических и статистических дисперсий ошибок оценок финитно-временной обработки с ОС, спектрально-финитной обработки без ОС и фильтрации Калмана

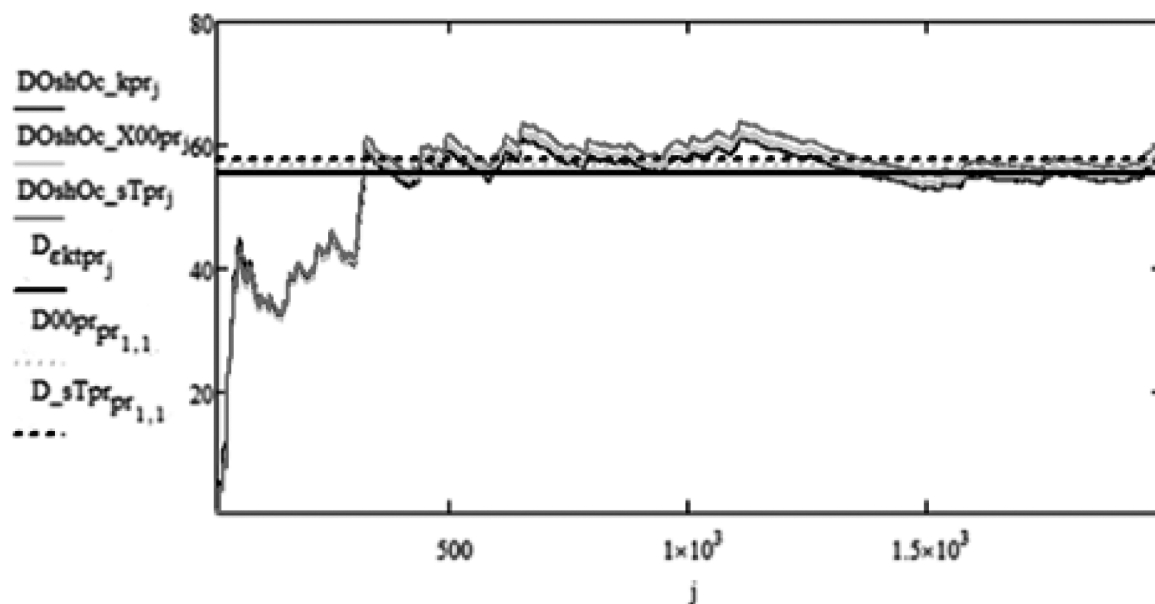


Рис. 2. Графики зависимостей теоретических и статистических дисперсий ошибок оценок исследуемых методов прогнозирования,  $pr = 10$  с



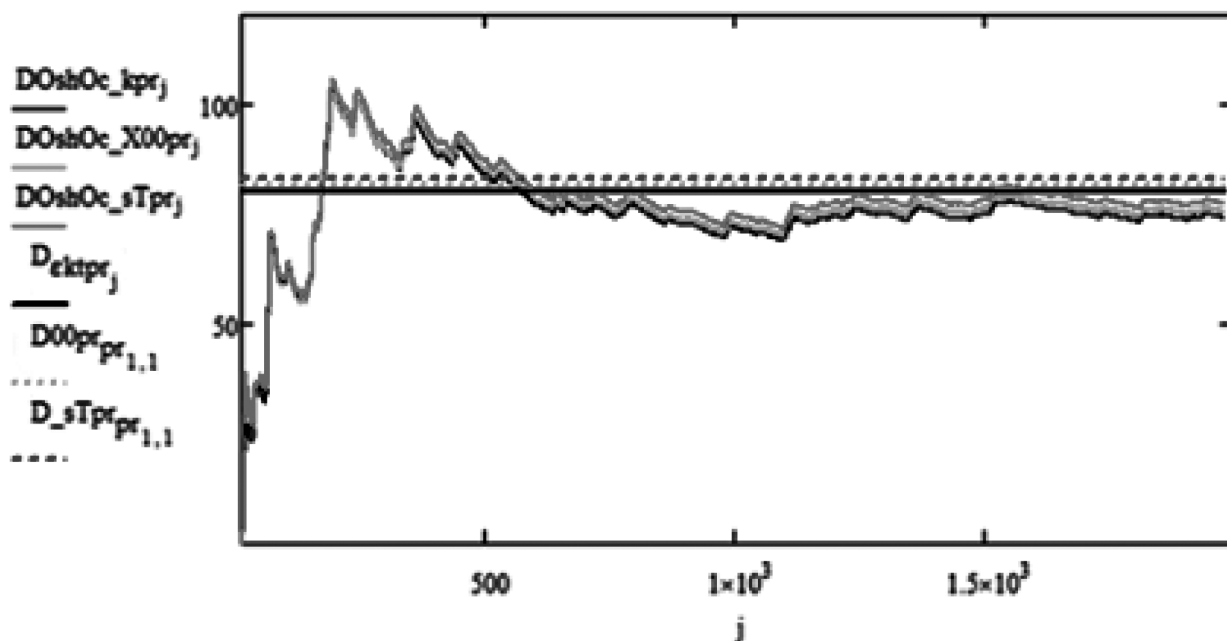


Рис. 3. Графики зависимостей теоретических и статистических дисперсий ошибок оценок исследуемых методов прогнозирования,  $pr = 20$  с

упреждения, равных 10, 20 секундам, занесены в таблицу 1.

Таблица 1.

Результаты сравнительного анализа рассматриваемых методов фильтрации и прогнозирования по параметрам точности и времени переходного процесса

| Метод обработки                        | Интервал времени прогноза, с | Теоретическая точность, град <sup>2</sup> | Статистическая точность, град <sup>2</sup> | Время переходного процесса, с |
|--|------------------------------|---|--|-------------------------------|
| Финитно-временная фильтрация с ОС      | —                            | 0,927                                     | 0,911                                      | 752                           |
| Спектрально-финитная фильтрация        |                              | 0,985                                     | 0,961                                      | 861                           |
| Фильтрация Калмана                     |                              | 0,856                                     | 0,866                                      | 778                           |
| Финитно-временная оценка прогноза с ОС | 10                           | 57,795                                    | 58,854                                     | 1046                          |
| Спектрально-финитный прогноз           |                              | 60,125                                    | 60,527                                     | 1059                          |
| Прогноз Калмана                        |                              | 57,780                                    | 58,073                                     | 1044                          |
| Финитно-временная оценка прогноза      | 20                           | 82,535                                    | 79,993                                     | 924                           |
| Спектрально-финитный прогноз           |                              | 86,972                                    | 83,674                                     | 953                           |
| Прогноз Калмана                        |                              | 82,528                                    | 79,991                                     | 925                           |

Изменение дисперсии ошибки оценки ФВ метода прогноза с ОС, спектрально-финитной оценки прогноза и прогнозирования метода Калмана при увеличении интервала времени прогноза  $pr$  представлено на рисунке 4. Используются следующие условные обозначения:  $D00pr_E$ ,  $DsTpr_E$  и  $Dkpr_E$  — статистическое значение дисперсии ошибки оценки финитно-временного прогнозирования с ОС, спектрально-финитного прогнозирования и прогноза Калмана соответственно.

Из рисунка 4 видно, что при увеличении интервала упреждения дисперсия ошибки оценки возрастает, ее значение для каждого из рассматриваемых алгоритмов стремится к квадрату среднеквадратического отклонения полезного сигнала.

На точностные характеристики ФВ фильтрации и оценки прогноза влияет значение объема памяти  $r$ . Зависимость значений дисперсии ошибки оценки финитно-временного прогнозирования с ОС, спектрально-финитного прогноза без ОС и метода прогнозирования Калмана при интервале упреждения  $pr = 20$  секундам при изменении параметра  $r$  представлена на рисунке 5. Условные обозначения, приведенные на рисунке, следующие:  $D00pr_E$  — статистическое значение дисперсии ошибки оценки финитно временной оценки прогноза с ОС;  $DsTpr_E$  — статистическое значение дисперсии ошибки оценки спектрально-финитной оценки прогноза;  $Dkpr_E$  — статистическое значение дисперсии ошибки оценки прогнозирования Калмана.

Как видно из вышеприведенного рисунка, с увеличением объема памяти  $r$  значение дисперсии ошибки оцен-

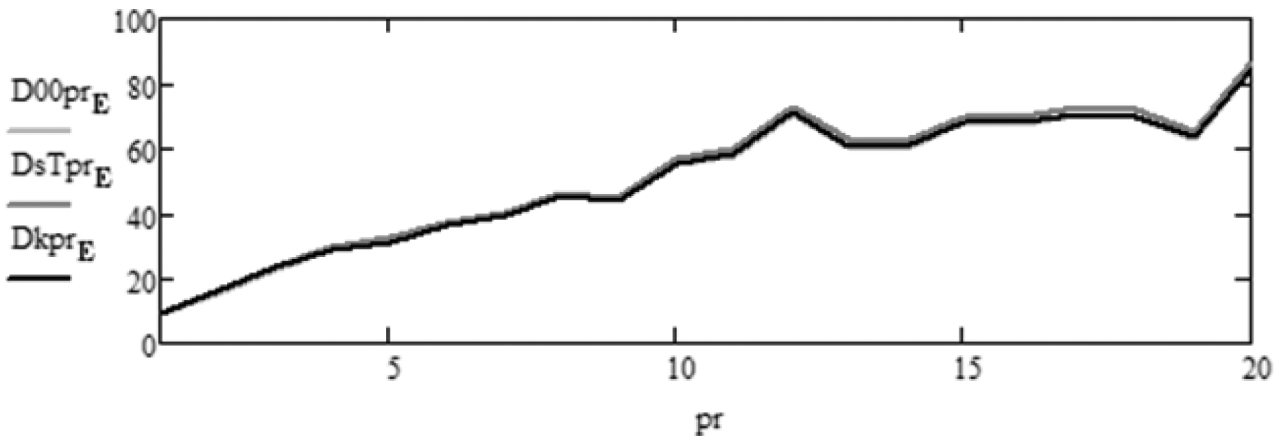


Рис. 4. Графики зависимостей статистических дисперсий ошибок оценок исследуемых методов прогнозирования от изменения параметра  $pr$  на интервале от 0 до 20 с

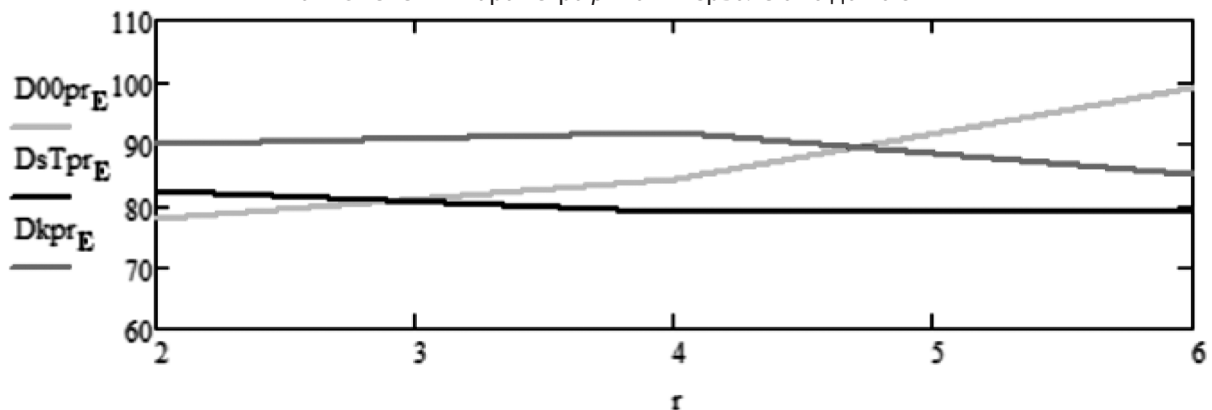


Рис. 5. Графики зависимостей статистических дисперсий ошибок оценок исследуемых методов прогнозирования от изменения памяти  $r$ ,  $pr=20$  с

ки спектрально-финитного прогнозирования уменьшается и стремится к дисперсии прогноза Калмана. Для ФВ алгоритма имеется оптимум при  $r = 2$ , при котором дисперсия минимальна и сравнима с методом Калмана, а с дальнейшим увеличением объема памяти дисперсия ошибок оценок начинает возрастать.

#### Сравнительный анализ по показателю робастности

Под робастностью понимается малая чувствительность показателя качества информационно-измерительной системы при изменении параметров обработки сигнала.

Определение показателя робастности производится по формуле [13]:

$$K_p = \frac{\Delta R / R^*}{\Delta b / b^*} \quad (21)$$

где  $\Delta R$  — изменение показателя качества ИИС при отклонении рассматриваемого параметра от номинального значения на величину  $\Delta b$ ;

$b^*$  — номинальное значение рассматриваемого параметра системы;

$R^*$  — показатель качества системы при номинальном значении параметра.

Система является робастной по параметру  $b^*$ , если выполняется условие:

$$K_p \leq 0,3 \quad (22)$$

При моделировании статистических значений дисперсий ошибки оценки от изменения рассматриваемого параметра обработки сигнала остальные параметры имеют номинальные значения.

На рисунках 6–9 приведены графики зависимостей статистических дисперсий ошибок оценок исследуемых методов прогнозирования от изменения вышеуказанных параметров для исследования робастности алгоритмов.

Вычисленные значения показателя робастности для рассматриваемых методов фильтрации и прогнозирования приведены в таблице 2.

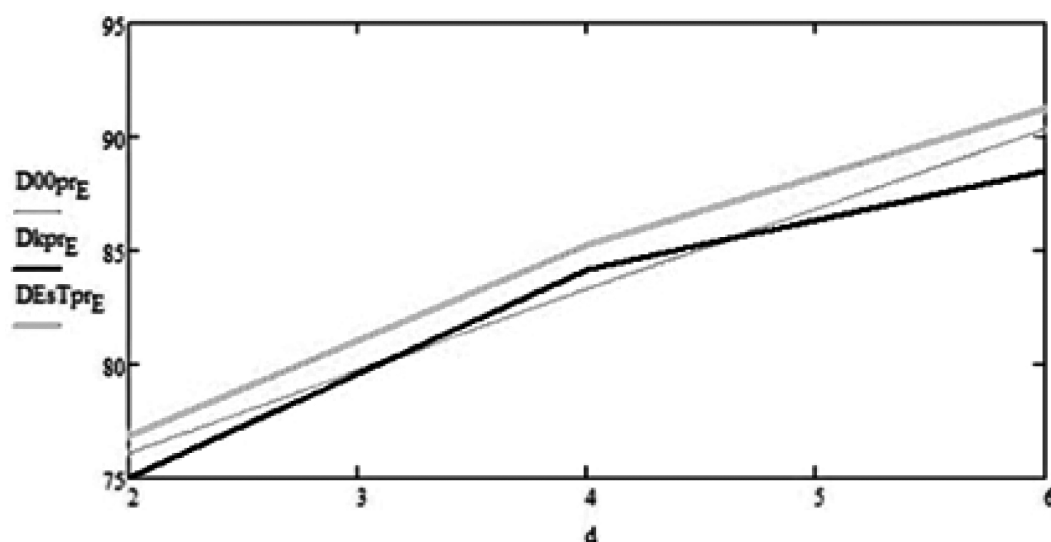


Рис. 6. Графики зависимостей статистических дисперсий ошибок оценок исследуемых методов прогнозирования от изменения дискрета  $d$  при  $pr = 20$  с

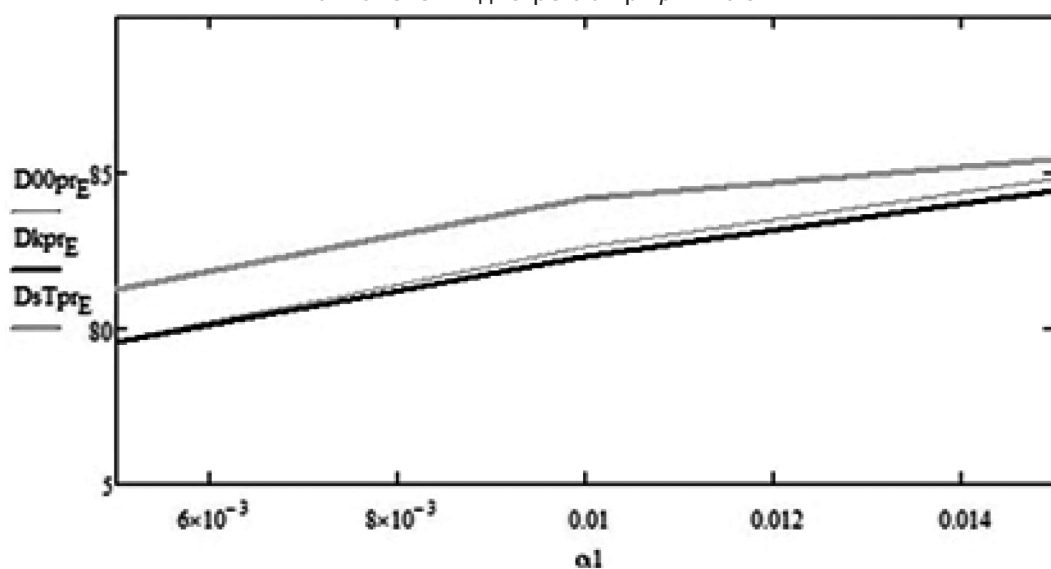


Рис. 7. Графики зависимостей статистических дисперсий ошибок оценок исследуемых методов прогнозирования от изменения параметра корреляционной функции  $\alpha_1$  при  $pr = 20$  с

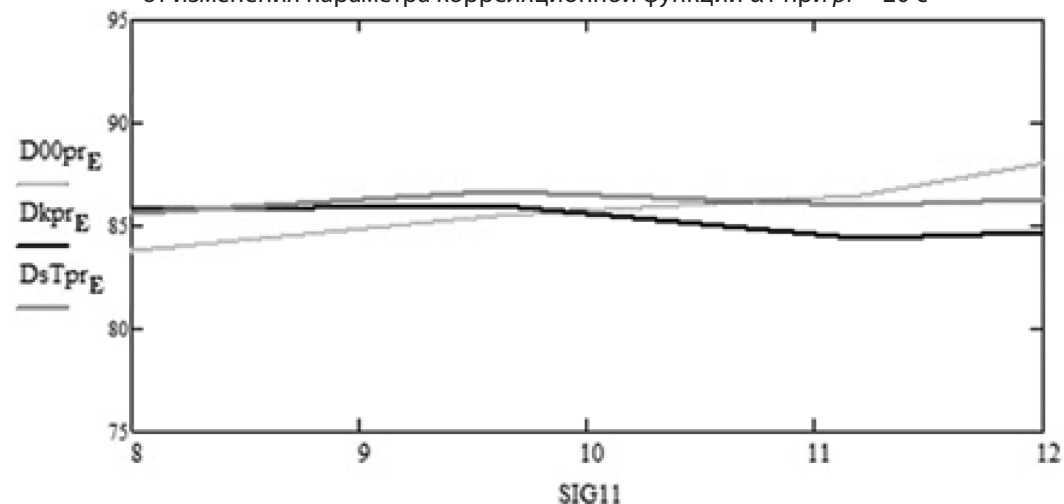


Рис. 8. Графики зависимостей статистических дисперсий ошибок оценок исследуемых методов прогнозирования от изменения СКО полезного сигнала  $SIG11$  при  $pr = 20$  с



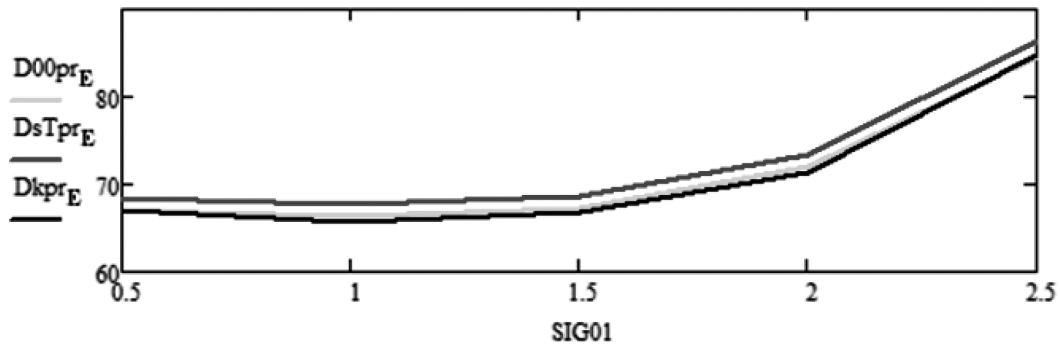


Рис. 9. Графики зависимостей статистических дисперсий ошибок оценок финитно-временной оценки исследуемых методов прогнозирования от изменения СКО помехи SIG01 при  $pr = 20$  с

Таблица 2.  
Результаты робастности исследуемых обработок

| Параметр робастности | Метод обработки                     | Значение показателя робастности |
|----------------------|-------------------------------------|---------------------------------|
| d                    | Финитно-временная фильтрация с ОС   | 0,261                           |
|                      | Спектрально-финитная фильтрация     | 0,257                           |
|                      | Фильтрация Калмана                  | 0,266                           |
|                      | Финитно-временной прогноз с ОС      | 0,192                           |
|                      | Спектрально-финитный прогноз без ОС | 0,189                           |
|                      | Прогноз Калмана                     | 0,201                           |
| $\alpha 1$           | Финитно-временная фильтрация с ОС   | 0,177                           |
|                      | Спектрально-финитная фильтрация     | 0,164                           |
|                      | Фильтрация Калмана                  | 0,173                           |
|                      | Финитно-временной прогноз с ОС      | 0,297                           |
|                      | Спектрально-финитный прогноз без ОС | 0,276                           |
|                      | Прогноз Калмана                     | 0,295                           |
| $\sigma$             | Финитно-временная фильтрация с ОС   | 0,111                           |
|                      | Спектрально-финитная фильтрация     | 0,103                           |
|                      | Фильтрация Калмана                  | 0,107                           |
|                      | Финитно-временной прогноз с ОС      | 0,182                           |
|                      | Спектрально-финитный прогноз без ОС | 0,157                           |
|                      | Прогноз Калмана                     | 0,141                           |
| $\sigma_H$           | Финитно-временная фильтрация с ОС   | 0,218                           |
|                      | Спектрально-финитная фильтрация     | 0,163                           |
|                      | Фильтрация Калмана                  | 0,231                           |
|                      | Финитно-временной прогноз с ОС      | 0,314                           |
|                      | Спектрально-финитный прогноз без ОС | 0,213                           |
|                      | Прогноз Калмана                     | 0,326                           |

Из полученных численных значений можно сделать вывод, что все алгоритмы фильтрации удовлетворяют критерию (22), то есть являются робастными. При прогнозировании заданному требованию не удовлетворяют ФВ оценка прогноза и прогноз Калмана при изменении среднеквадратического отклонения помехи  $\sigma_H$ .

В результате проведения сравнительного анализа по робастности было получено, что СФМ обработка и оценка прогноза являются наиболее робастными по всем параметрам, за исключением изменения СКО полезного сигнала  $\sigma$  при прогнозировании, где наиболее робастным является метод Калмана. Финитно-временная обработка и оценка прогноза с ОС выигрывает у метода фильтрации и прогнозирования Калмана по следующим параметрам:

- дискрет  $d$ ;
- среднеквадратическое отклонение помехи  $\sigma_H$ .

По параметру корреляционной функции  $\alpha 1$  и СКО полезного сигнала  $\sigma$  алгоритмы фильтрации и прогноза Калмана являются более робастными, чем финитно-временной метод.

На основании всего вышеперечисленного, справедливо сделать вывод о том, что наиболее робастным является спектрально-финитный метод, благодаря отсутствию в нем обратной связи. Финитно-временной алгоритм обработки и оценки прогноза с ОС по показателю робастности сравним с методами фильтрации и прогноза Калмана.

Важно отметить, что с увеличением значения параметров (дискрета, параметра корреляционной функции, СКО полезного сигнала и помехи) дисперсия ошибки оценки всех рассматриваемых алгоритмов фильтрации и прогнозирования возрастает.

#### Сравнительный анализ по показателю помехозащищенности

Под помехозащищенностью понимают устойчивость точностных характеристик ИИС при изменении параметров входных сигналов. В качестве показателя помехозащищенности ИИС применяется критерий [13]:

$$K_{\pi} = \frac{\Delta R / R^*}{\Delta a / a^*}, \quad (23)$$

где  $\Delta R$  — изменение показателя качества системы при отклонении рассматриваемого параметра от номинального значения на величину  $\Delta a$ ;

$R^*$  — показатель качества системы при номинальном значении параметра;

$a^*$  — номинальное значение рассматриваемого параметра системы.

Система является помехозащищенной по параметру  $a^*$ , если выполняется следующее условие:

$$K_{\pi} \leq 0,3 \quad (24)$$

При моделировании статистических значений дисперсий ошибки оценки от изменения рассматриваемого параметра обработки сигнала остальные параметры имеют номинальные значения.

На рисунках 10–12 приведены графики зависимостей дисперсий ошибок оценок исследуемых методов про-

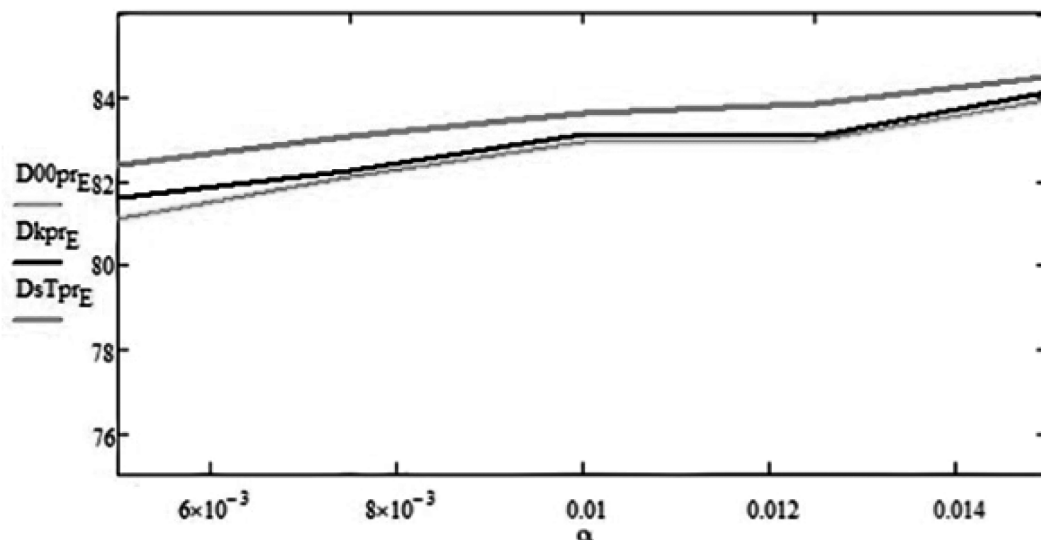


Рис. 10. Графики зависимостей статистических дисперсий ошибок оценок исследуемых методов прогнозирования от изменения параметра  $\alpha$  при  $pr = 20$  с

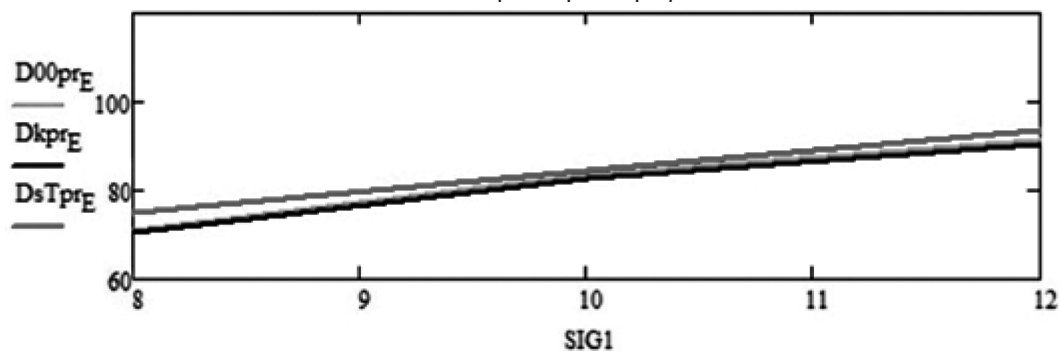


Рис. 11. Графики зависимостей статистических дисперсий ошибок оценок исследуемых методов прогнозирования от изменения СКО полезного сигнала  $SIG1$  при  $pr = 20$  с

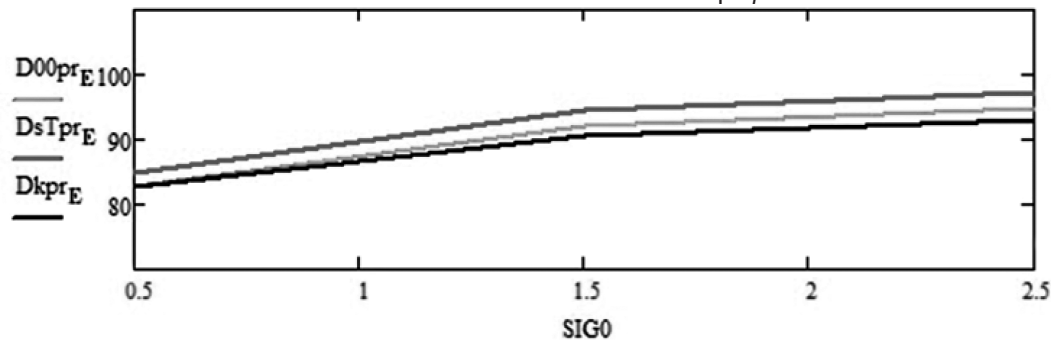


Рис. 12. Графики зависимостей статистических дисперсий ошибок оценок исследуемых методов прогнозирования от изменения СКО помехи  $SIG0$  при  $pr = 20$  с

гнозирования от изменения параметров для исследования помехозащищенности алгоритмов.

Вычисленные значения показателя помехозащищенности для рассматриваемых методов фильтрации и прогнозирования занесены в таблицу 3.

Таблица 3.

Результаты помехозащищенности исследуемых обработок

| Изменяемый параметр | Метод обработки                        | Значение показателя помехозащищенности |
|---------------------|--|--|
| $\alpha$            | Финитно-временная фильтрация с ОС      | 0,372                                  |
|                     | Спектрально-финитная фильтрация        | 0,271                                  |
|                     | Фильтрация Калмана                     | 0,356                                  |
|                     | Финитно-временная оценка прогноза с ОС | 0,286                                  |
|                     | Спектрально-финитная оценка прогноза   | 0,268                                  |
|                     | Прогноз Калмана                        | 0,283                                  |
| $\sigma$            | Финитно-временная фильтрация с ОС      | 0,285                                  |
|                     | Спектрально-финитная фильтрация        | 0,279                                  |
|                     | Фильтрация Калмана                     | 0,404                                  |
|                     | Финитно-временная оценка прогноза с ОС | 0,457                                  |
|                     | Спектрально-финитная оценка прогноза   | 0,397                                  |
|                     | Прогноз Калмана                        | 0,452                                  |
| $\sigma_n$          | Финитно-временная фильтрация с ОС      | 0,377                                  |
|                     | Спектрально-финитная фильтрация        | 0,386                                  |
|                     | Фильтрация Калмана                     | 0,324                                  |
|                     | Финитно-временная оценка прогноза с ОС | 0,233                                  |
|                     | Спектрально-финитная оценка прогноза   | 0,223                                  |
|                     | Прогноз Калмана                        | 0,241                                  |

По полученным результатам можно сформулировать вывод, что при изменении параметра корреляционной функции  $\alpha$  требование (24) выполнено в случае фильтрации только для спектрально-финитного метода обработки. ФВ фильтрация и фильтрация Калмана неустойчивы к изменению входного параметра  $\alpha$ , при этом с увеличением значения этого параметра дисперсия ошибки оценки алгоритмов возрастает. Финитно временной метод обработки незначительно проигрывает Калмановской фильтрации по показателю помехозащищенности.

В случае оценки прогноза при изменении параметра  $\alpha$  все методы удовлетворяют условию (24). Спектрально-финитная оценка прогноза является наиболее помехозащищенной к изменению параметра корреляционной функции  $\alpha$ . Финитно-временное прогнозирование показывает сравнительные результаты с прогнозом Калмана.

При изменении СКО полезного сигнала  $\sigma$  критерию (24) соответствуют финитно-временной и спектрально-финитный методы обработки. Метод фильтрации Калмана оказывается абсолютно не помехозащищенным

ми к изменению входного параметра  $\sigma$  по отношению к СФМ и ФВ алгоритмам обработки, так как показатель помехозащищенности для Калмановской фильтрации почти в 1,5 раза превышает значения для двух других методов. При этом, с увеличением среднеквадратического отклонения полезного сигнала точностные показатели финитно-временного алгоритма стремятся к точностным характеристикам метода Калмана. В случае прогноза ни один из исследуемых методов не является помехозащищенным, так как при прогнозировании дисперсии ошибки оценки алгоритмов стремятся к дисперсии полезного сигнала.

При изменении среднеквадратического отклонения помехи  $\sigma_n$ , при фильтрации требование (24) не выполняется ни для одного из методов, что обусловлено слишком быстрым нарастанием дисперсии ошибки оценки при увеличении СКО помехи. Наиболее устойчивым при этом оказывается метод фильтрации Калмана, а СФМ оказывается наименее помехозащищенным по данному параметру. В случае прогноза рост дисперсии ошибки оценки происходит более плавно, вследствие чего все три метода удовлетворяют условию и являются помехозащищенными. Наибольшую устойчивость имеет спектрально финитный метод прогноза, а метод Калмана показывает худший результат с точки зрения помехозащищенности. Важно, что при небольших значениях СКО помехи наблюдается приближенность значений дисперсий ошибки оценки ФВ метода обработки и оценки прогноза с фильтрацией и прогнозированием Калмана.

По результатам проведения сравнительного анализа по показателю помехозащищенности можно сформулировать вывод о том, что спектрально финитная обработка и оценка прогноза являются наиболее помехозащищенными методами. Финитно-временная обработка по данному показателю демонстрирует схожие результаты с алгоритмами Калмана, при этом по точности финитно-временной алгоритм практически не уступает фильтрации Калмана и его методу прогнозирования.

### Заключение

Исследуемые в рамках данной работы финитно-временной с обратной связью и спектрально финитный без обратной связи оптимальные методы обработки и прогнозирования навигационных сигналов рассматриваются в качестве альтернативы алгоритмам фильтрации и прогнозирования Калмана. Преимуществами новых методов обработки перед Калмановской фильтрацией являются простота их реализации и универсальность алгоритмов относительно вида используемых моделей сигнала, а также их инвариантность по отношению к наличию коррелированности измерения с помехой. Отсутствие требования наличия у процессов свойства марковости также делает алгоритмы более универсальными.

ными. При этом исследуемые методы по точности и времени переходного процесса практически не уступают Калмановским методам. Наибольшее приближение точностных характеристик финитно-временного алгоритма с обратной связью к значениям фильтрации и прогноза Калмана достигается при оптимальном значении размерности вектора результатов измерений  $r = 2$ .

В результате проведения сравнительного анализа выявлено, что спектрально-финитный без обратной связи метод фильтрации и оценки прогноза является наиболее робастным и помехозащищенным, а финитно-временной алгоритм с обратной связью по данным показателям демонстрирует сравнительные результаты с методом Калмана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лемешко О.В. Фильтр Калмана. Теоретические основы и практическое применение // Вестник магистратуры. 2014. №6–1. — с. 5–8.
2. Сейдж Э. Теория оценивания и её применение в связи и управления / Э. Сейдж, Дж. Мелс. — М.: Связь, 1976. — 495 с.
3. Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление / Дж. Медич. — М.: Энергия, 1973. — 440 с.
4. Иванов Ю.П. Метод оптимальной фильтрации дискретных сигналов. Международный форум. Метрологическое обеспечение инновационных технологий. — 2020. — с.56–57.
5. Иванов Ю.П. Информационно-статистическая теория измерений. Методы оптимального синтеза информационно-измерительных систем, критерии оптимизации и свойства оценок: учебное пособие / Ю.П. Иванов, В.Г. Никитин. — СПб.: ГУАП, 2011. — 104 с.
6. Иванов Ю.П. Финитно-временной метод оптимальной фильтрации дискретных сигналов. Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. — 2018. — №5. — с. 23–27.
7. Иванов Ю.П. Исследование финитно-временного адаптивного метода фильтрации и прогнозирования навигационных параметров / Ю.П. Иванов, Кондратьева О.С. // Научный журнал «Студенческий форум». — 2019. — Ч.1, № 19. — с. 34–40.
8. Иванов Ю.П. Основные идеи финитно-временной и спектрально финитной методологии обработки измерительной информации / Ю.П. Иванов // V Международный форум. Метрологическое обеспечение инновационных технологий. — 2023. — с.60–62.
9. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций: учебное пособие. — 3-е изд. — СПб.: Лань, 2021. — 464 с.
10. Френкс Л. Теория сигналов. — М.: Советское радио, 1974. — 344 с.
11. Иванов Ю.П. Финитно-временной и спектрально-финитный методы оптимальной фильтрации дискретных сигналов. / Ю.П. Иванов // Морские интеллектуальные технологии. — 2021. — Т.1 №3. — с. 140–147.
12. Иванов Ю.П. Спектрально-финитный метод оптимальной линейной фильтрации сигналов. // Аэрокосмическое приборостроение и эксплуатационные технологии. — 14–22 апреля 2020 г. — с. 35–42.
13. Иванов Ю.П. Информационно-статистическая теория измерений. Модели сигналов и анализ точности систем: учебное пособие / Ю.П. Иванов, Б. Л. Бирюков. — СПб.: ГУАП, 2008. — 160 с.

© Виноградова Екатерина Денисовна (vinogradovae415@gmail.com); Иванов Юрий Павлович (yri35@mail.ru)

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»