МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЙ ПРОШИВКИ ОТВЕРСТИЙ ЭЛЕКТРОДОМ-ИНСТРУМЕНТОМ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ УЧАСТКОМ ГРАНИЦЫ

Миназетдинов Н.М.
к.ф.-м.н., доцент,
Набережночелнинский институт Казанского (Приволжского) федерального университета
nminazetdinov@yandex.ru

Аннотация. *Получено решение нелинейной двумерной задачи теории электрохимической обработки металлов, связанной с определением формы металлической поверхности при ее обработке катодом-инструментом с криволинейным участком границы. Представлены результаты расчетов для частных случаев.*

Ключевые слова: *электрохимическая обработка металлов, потенциал, гидродинамическая аналогия, свободная поверхность.*

MODELING OF ELECTROCHEMICAL MACHINING OF HOLES BY AN ELECTRODE-TOOL WITH A CURVILINEAR PART OF THE BOUNDARY

Minazetdinov N.,
Branch of Kazan Federal University in Naberezhnye Chelny

Abstract. *The solution of non-linear two-dimensional problem in the theory of the electrochemical machining of metals, associated with the determination the shape of metal surface during its treatment with an electrode tool with a curvilinear part of the boundary is obtained. In conclusion the constructed analytical solution of the problem is illustrated by the results of calculations for particular cases.*

Keywords: *electrochemical machining of metals, potential, hydrodynamic analogy, free surface.*

Описанию процесса электрохимической обработки металлов посвящено значительное число работ [1]. В работе [2], в рамках модели идеального процесса [3, 4], получено численно-аналитическое решение двумерной задачи, связанной с определением ширины паза и формы анодной границы при стационарной электрохимической прошивке детали трехгранным катодом симметричной формы. В данной работе находится решение задачи в случае катода симметричной формы с криволинейным участком границы. В отличие от схемы, рассмотренной в работе [5], катод содержит электроизолированный участок границы.

Постановка задачи и ее численно-аналитическое решение. Схема сечения межэлектродного промежутка представлена на рис.1. Граница катода – симметричный контур с криволинейным участком границы. В силу симметрии межэлектродного промежутка ограничимся рассмотрением левой его части. На ней линия *CDE* соответствует границе катода, состоящей из рабочей (токопроводящей) части *CD* и электроизолированного участка *DE*; *BC* и *EF* – линии симметрии. Введем систему декартовых координат (x_1, y_1), связанную с катодом, который движется в направлении оси ординат к обрабатываемой заготовке детали с постоянной скоростью V_c. Углы, образованные касательной к дуге *CD* в точках *C* и *D* к оси абсцисс, равны нулю и $\alpha\pi$, соответственно.

Потенциал u электрического поля в межэлектродном промежутке удовлетворяет уравнению Лапласа. На границах *FAB* анода и *CD* катода потенциал поля принимает постоянные значения: $u\big|_{FAB} = u_a$, $u\big|_{CD} = u_c$. На границе изоляции *DE* и линиях симметрии *BC*, *EF* выполняется условие: $\partial u / \partial n_1 = 0$.

В модели, искомую анодную границу разделим на два участка. На участке *AB* происходит растворение металла в соответствии с условием

$$\frac{\partial u}{\partial n_1} = \frac{1}{\kappa\, a_0}\left(-a_1 + \frac{\rho\, V_c}{\varepsilon}\cos\theta\right), \tag{1}$$

где κ – удельная электропроводность среды, ε – электрохимический эквивалент металла, ρ – плотность материала анода, θ – угол между вектором $\mathbf{V}_c$ скорости подачи катода и вектором $\mathbf{n}_1$ нормали (рис. 1) [4]. Постоянные a_0, a_1 характеризуют свойства электролита и обрабатываемого материала, их значения найденные из экспериментальных данных, приведены в работе [4].

В области, которая моделируется вертикальным прямолинейным участком AF, растворение металла не происходит в связи с увеличением межэлектродного расстояния.

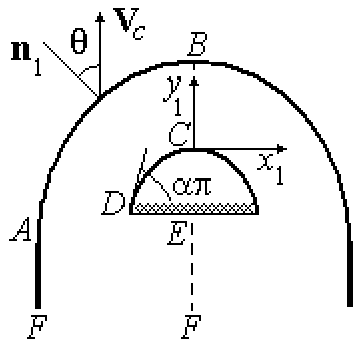

Рис. 1. Схема межэлектродного промежутка

Введем безразмерные переменные $x = x_1/H$, $y = y_1/H, n = n_1/H$, где $H = \kappa\left(u_a - u_c\right)/j_0$ – характерная длина, $j_0 = \rho V_c/\varepsilon$ – характерная плотность тока, и представим комплексный потенциал электрического поля [6] $W_1(z_1) = v(x_1, y_1) + i\,u(x_1, y_1)$, $z_1 = x + iy_1$ ($v(x_1, y_1)$ – функция тока) в безразмерном виде $W\left(z\right) = \varphi\left(x, y\right) + i\,\psi\left(x, y\right)$, $z = x + i\,y$ с помощью преобразования $W\left(z\right) = \left(W_1\left(z\right) - i\,u_c\right)/\left(u_a - u_c\right)$ [7]. Тогда условие (1) принимает вид

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = a + b\cos\theta, \quad a = -\frac{a_1}{a_0\,j_0}, \quad b = \frac{1}{a_0}. \qquad (2)$$

Электрическое поле в межэлектродном промежутке моделируется фиктивным плоскопараллельным потенциальным течением идеальной несжимаемой жидкости [8]. Поток создается системой непрерывно распределенных источников вдоль линии *DFE* и стоков на линии *BC*, а условие (2) определяет годограф скорости *V* фиктивного течения на неизвестной анодной границе *AB*

$$V = a + b\cos\theta, \qquad (3)$$

где θ – аргумент вектора скорости [4]. Вдоль границы AF скорость монотонно уменьшается от значения $V = a$ в точке *A* до нуля в точке *F*. Схема расположения линий тока фиктивного течения представлена на рис. 2а.

Для решения задачи введем параметрическую комплексную переменную $t = \xi + i\delta$, изменяющуюся в области G_t $\left(0 < \xi < \pi/2, 0 < \delta < \pi|\tau|/4\right)\left(\tau = i|\tau|\right)$ (рис. 2б), и будем искать функцию $z\left(t\right)$, конформно

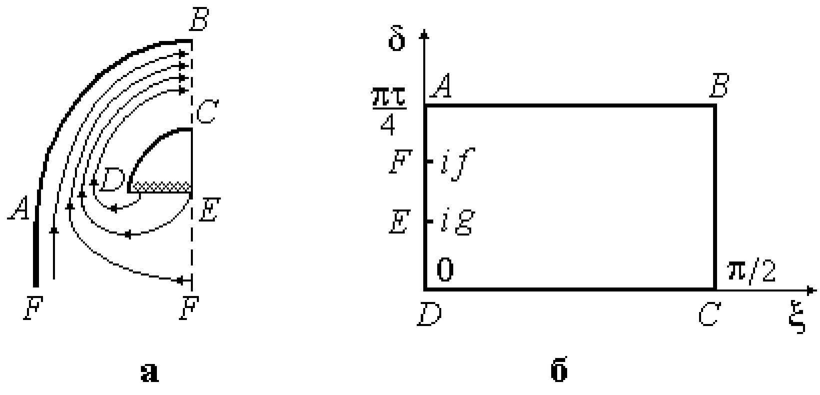

Рис. 2. а) схема линий тока фиктивного течения;
б) параметрическая плоскость t.

отображающую прямоугольник G_t на область течения. Соответствующие точки обозначены одинаковыми буквами на рис. 2а, б.

Комплексный потенциал $W(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\psi(\xi)=0,\ \psi(\xi+\pi\tau/4)=1,\ \xi\in[0,\pi/2],$$
$$\psi(i\delta)=1,\ \delta\in\left[f,\pi|\tau|/4\right],$$
$$\varphi(i\delta)=0, \delta\in[0,f],$$
$$\varphi(\pi/2+i\delta)=\varphi_0,\ \delta\in\left[0,\pi|\tau|/4\right].$$

Постоянная величина φ_0 определяет величину электрического тока, протекающего через анодную границу *FAB*. Область изменения комплексного потенциала представлена на рис. 3.

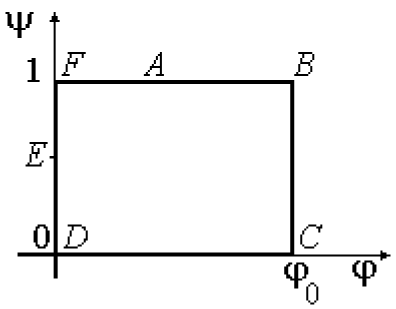

Рис. 3.

Используя метод конформных отображений [6], найдем производную комплексного потенциала и параметр φ_0

$$\frac{dW}{dt}=NF_1(t),\quad N=\left(\int_0^f F_1(ix)dx\right)^{-1},$$

$$\varphi_0=N\int_0^{\pi/2}F_1(x)dx, \tag{4}$$

$$F_1(t)=\sqrt{\frac{\vartheta_3\vartheta_3(2t)-\vartheta_2\vartheta_2(2t)}{\vartheta_2(2fi)\vartheta_3(2t)-\vartheta_3(2fi)\vartheta_2(2t)}},$$

где $\vartheta_i(u),\ \vartheta_i=\vartheta_i(0)\quad (i=\overline{1,4})$ – тета-функции для периодов π, $\pi\tau$ [9].

Введем функцию Жуковского

$$\chi(t)=\ln\left(dW/\left(V_0dz\right)\right)=r-i\theta,$$
$$r=\ln\left(V/V_0\right),$$

$V_0=a+b$ модуль скорости в точке $B\left(t=\pi/2+\pi\tau/4\right)$ [8]. На прямолинейных участках границы $\operatorname{Im}\chi(t)$ – кусочно-постоянная функция.

$$\operatorname{Im}\chi(t)=\begin{cases}-3\pi/2, & t=i\delta,\quad \delta\in(0,g),\\ -\pi, & t=i\delta,\quad \delta\in(g,f),\\ -\pi/2, & t=i\delta,\quad \delta\in\left(f,\pi|\tau|/4\right],\\ 0, & t=\pi/2+i\delta,\quad \delta\in\left[0,\pi|\tau|/4\right].\end{cases}$$

Пусть на дуге *CD* задана непрерывная функция $\theta(s)$, где s – длина дуги, отсчитываемая от точки *D* (рис. 1). Вводя кривизну $K(\theta)$ дуги *CD*, получим граничное условие [8]

$$\frac{d\theta}{d\xi}=-\frac{K(\theta)}{V_0}\left|\frac{dW}{d\xi}\right|\exp\left(-r(\xi)\right),\quad \xi\in[0,\pi/2], \tag{2}$$

На анодной границе *AB* выполняются условия [5]

$$a+b\cos\theta(t)-V_0\,\mathrm{e}^{r(t)}=0,$$
$$t=\xi+\pi\tau/4,\ \xi\in[0,\pi/2], \tag{3}$$

$$r\left(\pi/2+\pi\tau/4\right)=0. \tag{4}$$

Представим функцию $\chi(t)$ в виде суммы [10]

$$\chi(t)=\chi_*(t)+\Omega_1(t)+\Omega_2(t), \tag{5}$$

где $\Omega_k(t)=\nu_k(t)+i\varepsilon_k(t)\ \ (k=1,2)$ – аналитические в области G_t и непрерывные вплоть до ее границ функции. Функция $\chi_*(t)=r_*(t)-i\theta_*(t)$, $r_*=\ln\left(V_*/V_0\right)$ соответствует схеме (рис. 4) вспомогательного течения, в которой криволинейная дуга *CD* заменена отрезком $\theta_*(\xi)=\theta(0)=\alpha\pi,\ \xi\in[0,\pi/2]$, а на границе *AB* выполняется равенство $V_*=V_0$, т.е. $\operatorname{Re}\chi_*(\xi+\pi\tau/4)=0,\ \xi\in[0,\pi/2]$.

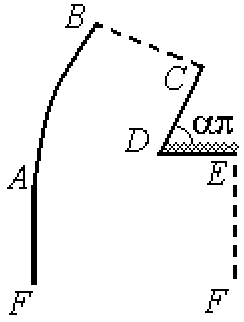

Рис. 4.

Функции $\chi(t)$ и $\chi_*(t)$ имеют одни и те же особенности в области изменения переменной *t*.

Используя метод особых точек Чаплыгина [8], получим

$$\chi_*(t)=\ln\left(\left(\frac{\vartheta_1(t)}{\vartheta_4(t)}\right)^{2\alpha-3}\left(F_2(t,f)F_2(t,g)\right)^{0,5}\right)-i\alpha\pi, \quad (6)$$

$$F_2(x,y)=\frac{\vartheta_1(x-iy)\vartheta_1(x+iy)}{\vartheta_4(x-iy)\vartheta_4(x+iy)}.$$

Потребуем выполнения следующих граничных условий для неизвестных функций $\Omega_k(t)=\nu_k(t)+i\,\varepsilon_k(t)\ (k=1,2)$:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1(t)=\varepsilon_2(t)=0,\ t=i\delta,\ \delta\in\left[0,\pi|\tau|/4\right],\\
&\varepsilon_2(t)=0,\ t=\xi,\ \xi\in[0,\pi/2],\\
&\varepsilon_1(t)=\alpha\pi,\ \varepsilon_2(t)=0,\ t=\pi/2+i\delta,\ \delta\in\left[0,\pi|\tau|/4\right],\\
&\nu_1(t)=0,\ t=\xi+\pi\tau/4,\ \xi\in[0,\pi/2].
\end{aligned} \quad (7)$$

Из сравнения граничных условий для функций $\chi(t)$ и $\chi_*(t)$, получим, что эти функции должны удовлетворять условиям

$$\frac{d\varepsilon_1}{d\xi}=\frac{K(\theta(\xi))}{V_0}\rho(\xi)\mathrm{e}^{-(\nu_1(\xi)+\nu_2(\xi))},\ \xi\in[0,\pi/2], \quad (8)$$

где

$$\theta(\xi)=\alpha\pi-\varepsilon_1(\xi),$$

$$\rho(\xi)=|dW/d\xi|\mathrm{e}^{-r_*(\xi)}=N\,F_3(\xi),$$

$$F_3(\xi)=F_1(\xi)\left(F_2(\xi,f)F_2(\xi,g)\right)^{-0,5}\left(\frac{\vartheta_1(\xi)}{\vartheta_4(\xi)}\right)^{3-2\alpha}.$$

$$\begin{aligned}
&a+b\cos(\theta(t))-V_0\,\mathrm{e}^{\nu_2(t)}=\\
&=0,\ t=\xi+\pi\tau/4,\ \xi\in[0,\pi/2],
\end{aligned} \quad (9)$$

$$\nu_2(\pi/2+\pi\tau/4)=0, \quad (10)$$

где $\theta(t)=\theta_*(t)-\varepsilon_1(t)-\varepsilon_2(t)$. Интегрируя выражение (8) на отрезке $[0,\pi/2]$, получим

$$\alpha\pi=I/V_0,$$

$$I=\int_0^{\pi/2}K(x)\rho(x)\exp\left(-\left(\nu_1(x)+\nu_2(x)\right)\right)dx. \quad (11)$$

В точке *A* выполняется условие гладкого отрыва [5, 8]

$$\theta'(t)=0\ \text{при}\ t=\pi\tau/4. \quad (12)$$

Таким образом, для определения неизвестных функций $\Omega_k(t)=\nu_k(t)+i\,\varepsilon_k(t)\ (k=1,2)$ имеем краевую задачу (7) - (12). Эти функции в силу условий (7) разлагаются в ряды с вещественными коэффициентами [10]

$$\begin{aligned}
\Omega_1(t)=\alpha\left(2ti+\frac{\pi|\tau|n}{2}\right)+\\
+2\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,\mathrm{sh}\left(\left(2ti+\frac{\pi|\tau|}{2}\right)n\right),
\end{aligned} \quad (13)$$

$$\Omega_2(t)=b_0+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cos 2tn.,$$

$$b_0=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n\,\mathrm{ch}\left(\pi|\tau|n/2\right). \quad (14)$$

Геометрические характеристики течения определяются из параметрической зависимости

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\exp\left(-\chi\left(t\right)\right)}{V_0}\frac{dW}{dt} =$$

$$= \frac{N\,e^{\alpha\pi i}}{V_0}F_3\left(t\right)\exp\left(-\left(\Omega_1\left(t\right)+\Omega_2\left(t\right)\right)\right), \quad (15)$$

Интегрируя выражение (15) по полуокружности бесконечно малого радиуса с центром в точке $t=if$ на плоскости переменной t с помощью теории вычетов [6], найдем расстояние $h = h\left(f, g, \tau\right)$ между линиями AF и EF, соответствующее половине безразмерной ширины паза. Интегрируя выражение (15) на отрезке $\left[0, ig\right]$ найдем длину L отрезка DE:

$$L = L\left(f, g, \tau\right). \quad (16)$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда криволинейный участок границы катода — дуга эллипса, фокусы которого расположены на оси ординат. Кривизна эллипса записывается в виде

$$K\left(\theta\right) = \left(1-\varepsilon^2\cos^2\theta\right)^{3/2}\Big/p,\ p = b_2^2\Big/a_2,$$

$$\varepsilon = \sqrt{a_2^2 - b_2^2}\Big/a_2. \quad (17)$$

где p – фокальный параметр, ε – эксцентриситет, a_2, b_2 – полуоси эллипса.

Расчеты выполнены при следующих значениях задаваемых параметров: $a_2 = 0{,}15$, $b_2 = 0{,}25$, $L = 0{,}15$, $\alpha = 0{,}5$, j_0 = 50 А/см², a_0 = 0,906, a_1 = -12,818. На рис. 5а сплошной линией представлены результаты расчета анодной границы для указанного частного случая. Результаты расчета значения h половины безразмерной ширины паза, величины зазора h_{BC} в сечении BC, координаты точки A таковы: h = 0.9237, h_{BC} = 0.4209, x = -0.9237, y = -0.8790. Для сравнения, на этом же рисунке, пунктирной линией обозначены результаты расчета анодной границы, для электрохимической обработки катодом-инструментом без изоляции на участке DE [5].

Для частного случая, если a_2 = b_2 = R = 0.25, L = 0.25, $\alpha = 0.5$, j_0 = 50 А/см², a_0 = 0,906, a_1 = -12,818 получается h = 1.0025, h_{BC} = 0.4690, x = -1.0025, y = -0.9054. На рис. 5б, аналогичным образом, представлены результаты расчета анодной границы с изоляцией и без изоляции на границе катода, для указанного частного случая.

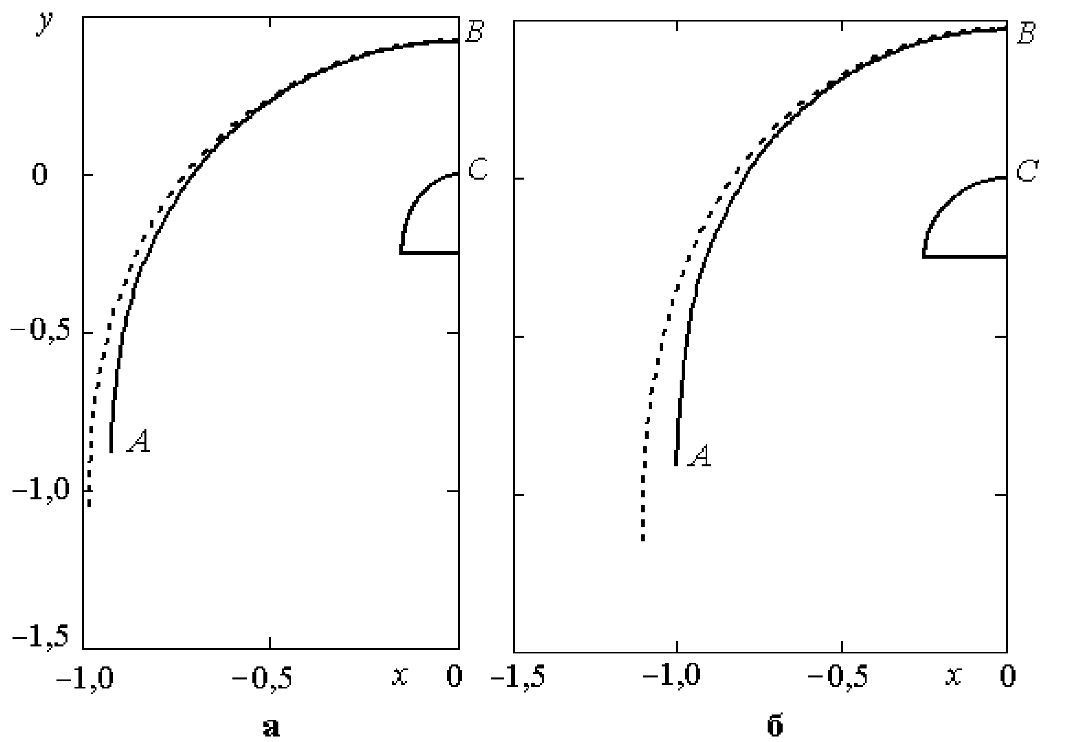

Рис. 5. Результаты расчета анодных границ

Список литературы

1. Rajurkar K.P., Sundaram M.M., Malshe A.P Review of electrochemical and electrodischarge machining // Proceeding of the seventeenth SIRP conference of electro physicals and chemical machining (ISEM). – 2013, – Vol. 6. – pp. 13 – 26.
2. Миназетдинов Н.М. Моделирование электрохимической прошивки пазов // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Естественные и технические науки. – 2014. – №11-12. – С. 56-61.
3. Давыдов А.Д., Козак Е. Высокоскоростное электрохимическое формообразование. – М.: Наука, 1990. – 272 с.
4. Котляр Л.М., Миназетдинов Н.М. Определение формы анода с учетом свойств электролита в задачах электрохимической размерной обработки металлов // ПМТФ – 2003. – Т.44. №3. – С. 179–184.
5. Миназетдинов Н.М. Об одной схеме электрохимической обработки металлов катодом-инструментом с криволинейным участком границы // ПММ – 2009. – Т. 73. Вып. 5. – С. 824-832.
6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
7. Каримов А.Х., Клоков В.В., Филатов Е. И. Методы расчета электрохимического формообразования. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. – 388 с.
8. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости – М.:Наука, 1979. – 536 с.
9. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа Т.2. Трасцендентные функции. – М.: Физматгиз, 1963. – 688 с.
10. Котляр Л.М., Миназетдинов Н.М. Моделирование процесса электрохимической обработки металла для технологической подготовки производства на станках с ЧПУ. – М.: Academia, 2005. – 200 с.