

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СИНТЕЗАТОРА ЧАСТОТЫ С ИМПУЛЬСНЫМ ЧАСТОТНО-ФАЗОВЫМ ДЕТЕКТОРОМ, ИСПОЛЬЗУЮЩЕЙ ФАЗОВЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА

CONSTRUCTION OF A MATHEMATICAL MODEL OF A FREQUENCY SYNTHESIZER WITH A PULSED FREQUENCY-PHASE DETECTOR USING PHASE SUBSPACES

**О. Antonovskaya
А. Besklubnaya**

Summary. Mathematical modeling of the dynamics of discrete phase synchronization systems is a creative process and involves the use of mathematical models of varying degrees of complexity. Typically, the complexity of a mathematical model is mainly related to the dimension of the problem and the design of the state space. Thus, the advisability of using one or another method for its study is dictated by considerations related to the ease of application of the method and the acceptable accuracy of the resulting results.

This paper presents the results of studying the dynamics of a frequency synthesizer with a pulsed frequency-phase detector using the point mapping method. This method considers the specifics of the system under consideration, namely: the abruptly changing nature of the structure of the equations describing the dynamics of the system. The presented mathematical model uses three phase subspaces corresponding to piecewise constancy of the control signal. Importance is attached to the study of possible transitions of the system trajectory between subspaces.

Keywords: discrete phase synchronization system, frequency synthesizer, mathematical model, point mapping method, phase subspace.

Антоновская Ольга Георгиевна

кандидат физико-математических наук, доцент,
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный архитектурно-
строительный университет»
olga.antonovskaja@yandex.ru

Бесklubная Антонина Вячеславовна

кандидат педагогических наук,
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный архитектурно-
строительный университет»
antbesk@gmail.com

Аннотация. Математическое моделирование динамики дискретных систем фазовой синхронизации является творческим процессом и подразумевает использование математических моделей различной степени сложности. Как правило, сложность математической модели связана, в основном, с размерностью задачи и конструкцией пространства состояний. Таким образом, целесообразность использования того или иного метода ее исследования диктуется соображениями, связанными с простотой применения метода и приемлемой точностью получающихся результатов.

В настоящей работе приводятся результаты исследования динамики синтезатора частоты с импульсным частотно-фазовым детектором методом точечных отображений. Этот метод учитывает специфику рассматриваемой системы, а именно: скачкообразно изменяющийся характер структуры уравнений, описывающих динамику системы. Приведенная математическая модель использует три фазовых подпространства, соответствующих кусочному постоянству сигнала управления. Особое значение придается изучению возможных переходов траектории системы между подпространствами.

Ключевые слова: дискретная система фазовой синхронизации, синтезатор частот, математическая модель, метод точечных отображений, фазовое подпространство.

Введение

Настоящая работа связана с практически важной прикладной задачей реализации надежной радиосвязи [1,2], в основе которой лежит использование управляемых синтезаторов частот (СЧ) [3], построенных на базе импульсных систем фазовой синхронизации. В таких системах используется широтно-импульсная модуляция (ШИМ) управляющего сигнала, и поэтому их математические модели (ММ) являются частным случаем

систем с переменной структурой (СПС), порядок смены дифференциальных уравнений в которых определяется динамическими свойствами фазовых траекторий движения. Именно в силу этого обстоятельства изучение динамики ММ таких СЧ осуществляется на основе применения метода точечных отображений [4]. С методологической точки зрения метод точечных отображений органически объединяет в единое целое и специфику математической модели, и свойства поведения фазовых траекторий как в локальном, так и в глобальном плане.

В работе [5] была сделана попытка получения качественных сведений нелокального характера об особенностях динамических процессов в системах синхронизации, использующих принцип широтно-импульсной модуляции управляющего сигнала. В качестве конкретного примера была взята схема синтезатора частоты (СЧ) с импульсным частотно-фазовым детектором типа ИЧФДЗН [3] и идеальным астатическим фильтром. Однако, несмотря на использование общеметодологического подхода к описанию процессов на основе метода точечных отображений, построение соответствующих функций точечных отображений с использованием инженерного подхода, основанного на описании характерных осциллограмм процессов, не позволило в связи с быстрым нарастанием трудностей при анализе, осуществить разбиение пространства параметров на области существования движений различной сложности.

В настоящей работе строится математическая модель системы управления работы [5]. Получение общих результатов оказалось возможным за счет распространения подхода к анализу систем с широтно-импульсной модуляцией систем управления, апробированного в [6,7], на системы с разрывным предельным циклом [8; 9, с.34–42.].

Математическая модель синтезатора частоты, использующая фазовые подпространства

Для наглядности представления предельного перехода от системы с неидеальным астатизмом к системе с идеальным астатизмом, уравнения рассматриваемой математической модели (ММ) СЧ с управляемой координатой x в произвольном периоде следования импульсов опорного генератора (ОГ) запишем в виде: при подключенном выходе детектора

$$\begin{aligned} \alpha \dot{\theta} &= g(x(\tau)), & (0 \leq \theta \leq 1, 0 \leq \tau \leq 1, u = \pm 1), & (1) \\ \mu \dot{x} &= u - x, \end{aligned}$$

и при отключенном выходе детектора на этапе хранения информации

$$\begin{aligned} \alpha \dot{\theta} &= g(x(\tau)), & (0 \leq \theta \leq 1, 0 \leq \tau \leq 1), & (2) \\ x(\tau) &= x_0, \end{aligned}$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени τ , изменяющемуся в пределах периода сигнала ОГ; $0 < \mu \ll 1$ — астатизирующий параметр; α — показатель счетчика (С); u — выходной сигнал детектора; x — выходная координата фильтра; θ — координата C пустого при $\theta=0$ и заполненного при $\theta=1$; x_0 — начальное условие; $g(x)>0$ — нормированная на единицу ($g(0)=1$) характеристика управляемого генератора (УГ).

Согласно методике работ [6,7], учитывающей скачкообразно изменяющийся характер структуры урав-

нений, для изучения поведения фазовых траекторий $\theta(\tau), x(\tau)$ ММ СЧ следует использовать три фазовых подпространства: Π_1 , в котором определена система (1) с $u = +1$; Π_3 , в котором система (1) определена при $u = -1$, — и подпространство Π_2 , в котором определена система (2).

Поскольку при таком подходе к моделированию динамики СЧ режимы работы детектора обусловлены свойствами фазовых траекторий в каждом из подпространств, а при переходе к случаю идеального астатизма ($\mu = +0$) в силу устойчивости (1) по быстрым движениям при $\mu = +0$ участков поверхности $x=u=const$ фазовая траектория возмущенного при $\mu \neq 0$ циклического движения располагается в $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности невозмущенного движения [10], и при этом направление и величина мгновенного скачка по координате x при переходе траектории движения из одного подпространства в другое определены однозначно, — постольку переход к изучению ММ СЧ пониженной размерности является обоснованным, что, в свою очередь, представляется возможностью проведения полного качественного анализа динамики.

Действительно, согласно логике работы детектора, в регулярном случае изображающая точка движения (ИТД) появляется в подпространстве Π_1 после прихода импульса ОГ, т.е. только на границе $\tau = 0$. Персонифицируя эту границу как сечение C_{12} (единица в обозначении соответствует номеру подпространства, а двойка — границе $\tau = 0$), из (1) при $u = +1$ найдем, что перемещение ИТД в Π_1 осуществляется по траектории

$$x(\tau) = +1, \theta(\tau) = \theta_0 + (g(1) / \alpha)\tau, \quad (0 < \tau \leq 1), \quad (3)$$

при условии, что в интервале времени $\tau = [0, +0)$ возможен мгновенный скачок по координате x из начальной точки (x_0, θ_0) в точку $(+1, \theta_0)$. При $x_0 = +1$ такой скачок отсутствует.

При выполнении условия $\alpha < g(1)$ управляемости СЧ из (3) следует, что $\theta(\tau = 1) > 1$ при любых $0 \leq \theta_0 \leq 1$. Но это означает, что движение траектории (3) всегда заканчивается при некотором значении $\tau = \bar{\tau} < 1$, порождая тем самым точечное отображение

$$\begin{aligned} T_{12,21} : \bar{x} &= +1, \bar{\tau} = \\ &= (\alpha / g(1))(1 - \theta_0) \quad (\theta_0 \in C_{12}, (\bar{x}, \bar{\tau}) \in C_{21}) \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку ИТД в Π_1 приходит на границу $\theta = 1$, постольку импульс C появляется раньше, чем очередной импульс ОГ, и, вследствие этого, выход детектора отключается, дальнейшее поведение ИТД определяется уравнениями (1), что, в свою очередь, означает, что осуществляется перенос точки $(\bar{x}, \bar{\tau})$ на сечение C_{21} ($\theta = 0 \in \Pi_2$) (что и отмечено справа от формулы (4)).

В подпространстве Π_2 , согласно (1), движение совершается по траектории

$$x(\tau) = +1, \theta(\tau) = (g(1) / \alpha)(\tau - \tau_0) \quad (0 < \tau \leq 1). \quad (5)$$

Из (5) следует, что в зависимости от величины τ_0 ИТД может перейти по траектории (5) либо на границу $\theta = 1$ (импульс С) с последующим переносом конечной точки движения в подпространство Π_3 , либо на границу $\tau = 1$ (импульс ОГ) с последующим переносом (возвратом) в Π_1 . Указанные движения порождают в Π_2 точечные отображения

$$T_{212,31} : \bar{x} = +1, \bar{\tau} = \tau_0 + (\alpha / g(1)) \quad (0 \leq \tau_0 \leq \tau_0(\Gamma_2)), (\bar{x}, \bar{\tau}) \in C_{31}, \quad (6)$$

$$T_{211,12} : \bar{x} = +1, \bar{\theta} = (g(1) / \alpha)(1 - \tau_0), (\tau_0(\Gamma_2) < \tau_0 \leq 1, (\bar{x}, \bar{\tau}) \in C_{12}), \quad (7)$$

и границу Γ_2 их определения —

$$\Gamma_2 : \tau_0(\Gamma_2) = 1 - (\alpha / g(1)). \quad (8)$$

Поскольку ИТД, выходящие из подпространства Π_2 в подпространство Π_1 , вновь возвращаются в Π_2 , целесообразно ввести в рассмотрение отображение $T_1 = T_{112,21} T_{211,12}$. Согласно (4), (7)

$$T_1 : \bar{x} = +1, \bar{\tau} = (\alpha / g(1)) - 1 + \tau_0 \quad (\tau_0(\Gamma_2) \leq \tau_0 \leq 1, (\bar{x}, \bar{\tau}) \in C_{21}). \quad (9)$$

Необходимо отметить, что в отличие от функции соответствия (6), определяющей отображение отрезка $0 \leq \tau_0 \leq \tau_0(\Gamma_2)$, сечения $C_{21} \in \Pi_2$ в соответствующий отрезок другого подпространства (в данном случае — Π_3), функция (9) является функцией последования отображения T_1 , поскольку определяет отображение отрезка $\tau_0(\Gamma_2) \leq \tau_0 \leq 1$, сечения $C_{21} \in \Pi_2$ в соответствующий отрезок того же сечения C_{21} того же подпространства Π_2 . Поэтому график функции соответствия отображения (6) и график функции последования (9) могут быть представлены на одной диаграмме Ламерея ([10, с.505]) (рисунок 1). На рисунке 1 введены обозначения: τ_1 и τ_2 — две близкие точки в окрестности перехода графика функции соответствия отображения $T_{211,31}$ в график функции последования отображения T_1 . Из рисунка 1 наглядно следует, что, несмотря на близость начальных точек $\tau_0 = \tau_1$ и $\tau_0 = \tau_2$, они отображаются в подпространство Π_3 на конечное (большое) расстояние друг от друга. Максимально возможное расстояние между ними в Π_3 равно величине $1 - (\alpha/g(1))$, т. е. разности между max и min графика функции соответствия. Следовательно, в общем случае отображение сечения C_{21} в сечение C_{31} разрывно и обязано наличием возвратных движений из Π_2 в Π_1 , обуславливающих задержку во времени в передаче сигнала.

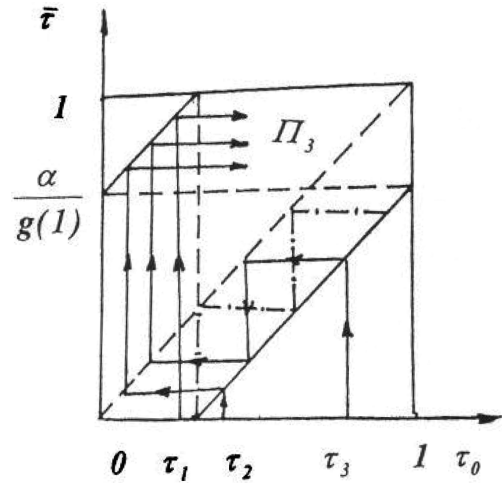


Рис. 1. Диаграмма Ламерея отображений $T_{212,31}$ и T_1

Обозначение τ_3 на рисунке 1 использовано для произвольной начальной точки в области определения отображения T_1 для иллюстрации характера диаграммы (лесенки) Ламерея и подтверждения того факта, что все точки интервала $\tau_0(\Gamma_2) \leq \tau_0 \leq 1$ определения отображения T_1 после некоторого количества итераций переводятся в интервал $0 \leq \tau_0 \leq \tau_0(\Gamma_2)$ определения функции соответствия отображения $T_{212,31}$. Таким образом, интервал $0 \leq \tau_0 \leq \tau_0(\Gamma_2)$ определения отображения $T_{212,31}$ является интервалом-ловушкой, через который в Π_3 проходят итерации, попавшие в Π_2 . На рисунке 2 штрих-пунктирной линией и соответствующими точками на графике функции последования отображения T_1 показаны места появления разрывов у итогового отображения $T_{21,31}$ отрезка $0 \leq \tau_0 \leq 1$ сечения $C_{21} \in \Pi_2$ в подпространство Π_3 , обнаруживаемые с помощью обратной лесенки Ламерея для точки $\tau_0 = \tau_0(\Gamma_2)$.

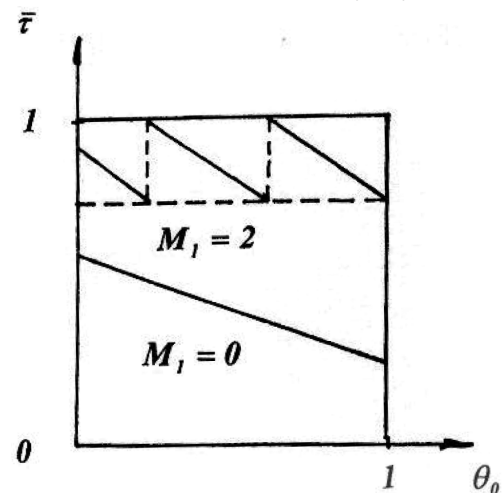


Рис. 2. Вид графиков для отображения T_+

Нетрудно проверить, что

$$T_{21,31} : \bar{x} = +1, \bar{\tau} = \tau_0 + (\alpha / g(1)) - (1 - (\alpha / g(1))m_1) \quad (0 \leq \tau_0 \leq 1) \quad (10)$$

где

$$m_1 = m_1(\tau_0) = \text{ceil}(\tau_0 / (1 - (\alpha / g(1))) - 1), \quad (11)$$

и использует операцию «ceil» округления числа до целого в большую сторону. Поэтому, когда при $\tau_0 < \tau_0(\Gamma_2)$ величина, стоящая за знаком «ceil» в (11) отрицательна, $\text{ceil}(\dots)=0$ и формула (10) совпадает с формулой (6), а при $\tau_0 > \tau_0(\Gamma_2)$ $m_1(\tau_0)$ обозначает число разрывов графика функции соответствия, проходимых лесенкой Ламе-рея, выходящей из точки $\tau_0 = \tau_3$ до попадания в интервал $0 \leq \tau_0 \leq \tau_0(\Gamma_2)$ (рисунок 1).

Поскольку в Π_1 $u=+1$, а в процессе возвратных движений из Π_2 в Π_1 и наоборот, связанных с чередованием импульсов ОГ и С, детектор подключает и отключает один и тот же генератор напряжений (ГН), сохраняя при этом величину $u \equiv +1$, имеет смысл ввести в рассмотрение отображение $T_+ = T_{212,31} T_{12,21}$ точек (x_0, θ_0) сечения $C_{12} \in \Pi_1$ в точки $(\bar{x}, \bar{\tau})$ сечения $C_{31} \in \Pi_3$. Подставляя величину $\bar{\tau}$ из (4) на место величины τ_0 в (10), находим, что

$$\begin{aligned} T_+ : \bar{x} &= +1 \\ \bar{\tau} &= (\alpha / g(1))(m_1 + 2 - \theta_0) - m_1, \quad (12) \\ &(0 \leq \theta_0 \leq 1, (\bar{x}, \bar{\tau}) \in C_{31}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} m_1 &= m_1(\theta_0) = \\ &= \text{ceil}(((\alpha / g(1))(2 - \theta_0) - 1) / (1 - (\alpha / g(1)))). \quad (13) \end{aligned}$$

Величина m_1 в (13) является кусочно-постоянной функцией θ_0 и определяет номер участка непрерывности функции соответствия (12), отсчитываемый от значения $\theta_0=1$. Участок графика функции $\bar{\tau} = \bar{\tau}(\tau_0)$ в (12) с $m_1=0$ является базовым и всегда существует. Из (12) следует, что величина $M_1 = \max_{\theta_0} m_1(\theta_0)$ достигается при

$\theta_0=0$ и определяет граничное значение $\alpha = \alpha(M_1)$, при переходе через которое в сторону увеличения α величина M_1 возрастает на единицу, причём

$$\alpha(M_1) = (M_1 + 1)g(+1) / (M_1 + 2) \quad (M_1 = 1, 2, \dots). \quad (14)$$

Из (14) следует, что $\alpha(M_1=0) = g(1)/2$ является границей появления первого разрыва функции соответствия (12), а $\alpha(M_1=\infty) = g(1)$ совпадает с границей управляемости СЧ. Разрывы функции (12) располагаются при $\theta_0 = \theta_{0p}$ (p — разрыв), где

$$\begin{aligned} \theta_{0p} &= 1 - (g(1) / \alpha) - 1(1 + m_1) \\ &(\alpha > g(1) / 2, m_1 = 0, 1, \dots, M_1) \end{aligned} \quad (15)$$

Согласно (12), (15), график функции (12) в месте любого разрыва лежит в диапазоне $\alpha / g(1) \leq \bar{\tau} \leq 1$, а при отсутствии разрывов располагается в интервале

$\alpha / g(1) \leq \bar{\tau} \leq 2\alpha / g(1)$. Вид графиков функции соответствия (12) отображения T_+ для случаев $M_1=0$ и $M_1=2$ приведен на рисунке 2.

Способ прохождения ИТД из подпространства Π_3 в подпространство Π_2 и далее в Π_1 внешне напоминает механизм прохождения ИТД из Π_1 в Π_3 , но отличается по существу. Так в Π_3 ИТД попадает только после появления импульса С, т.е. ее движение в Π_3 начинается из точки (x_0, τ_0) , лежащей на границе $\theta = 0$ (т.е. в сечении C_{31}) и осуществляется, согласно (2), по траектории

$$x(\tau) = -1, 0(\tau) = (g(-1) / \alpha)(\tau - \tau_0), \quad (0 < \tau \leq 1) \quad (16)$$

при условии мгновенного скачка по координате x из точки $x_0 = 1$ в точку $x(\tau=+0) = -1$.

При выполнении условия $\alpha > g(-1)$ управляемости СЧ движение по траектории (16) в силу того, что $\theta(\tau=1)$ при всех $0 \leq \tau_0 \leq 1$ меньше единицы, оказывается на границе $\tau = 1$ подпространства Π_3 при некотором значении $\theta = \bar{\theta}$, порождая тем самым точечное отображение

$$\begin{aligned} T_{31,22} : \bar{x} &= -1, \bar{\theta} = (g(-1) / \alpha)(\tau - \tau_0), \\ &(0 \leq \tau_0 \leq 1, (\bar{x}, \bar{\theta}) \in C_{22}). \end{aligned} \quad (17)$$

Поскольку в Π_3 импульс ОГ всегда появляется раньше, чем импульс С, ИТД переносится из Π_3 в Π_2 на границу $\tau = 0$ (сечение C_{22}) с начальными значениями x и θ , определяемыми соотношениями (17). Дальнейшее движение в подпространстве Π_2 , согласно (2), осуществляется по траектории

$$x(\tau) = -1, 0(\tau) = \theta_0 + (g(-1) / \alpha)\tau \quad (0 \leq \tau \leq 1). \quad (18)$$

В зависимости от величины θ_0 ИТД может перейти по траектории (18) либо на границу $\tau = 1$ (импульс ОГ) с последующим переносом в подпространство Π_1 , либо на границу $\theta = 1$ (импульс С) с последующим переносом (возвратом) в Π_3 . Указанные движения порождают в Π_2 точечные отображения

$$\begin{aligned} T_{221,12} : \bar{x} &= -1, \bar{\theta} = \theta_0 + (g(-1) / \alpha) \\ &(0 \leq \theta_0 \leq \theta_0(\Gamma_4), (\bar{x}, \bar{\theta}) \in C_{12}), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} T_{222,31} : \bar{x} &= -1, \bar{\tau} = (\alpha / g(-1)) \\ &(\theta_0(\Gamma_4) \leq \theta_0 \leq 1, (\bar{x}, \bar{\tau}) \in C_{31}), \end{aligned} \quad (20)$$

и границу их определения

$$\Gamma_4 : \theta_0(\Gamma_4) = 1 - (g(-1) / \alpha) \quad (21)$$

Поскольку ИТД, выходящие из подпространства Π_2 в подпространство Π_3 , вновь возвращаются в Π_2 , целесообразно ввести в рассмотрение отображение $T_2 = T_{31,22} T_{222,31}$. Согласно (17), (20)

$$T_2 : \bar{x} = -1, \bar{\theta} = (g(-1) / \alpha) - 1 + \theta_0 \quad (22)$$

$$(\theta_0(\Gamma_4) \leq \theta_0 \leq 1, (\bar{x}, \bar{\theta}) \in C_{22}),$$

Необходимо отметить, что в отличие от функции соответствия (19), определяющей отображение отрезка $0 \leq \theta_0 \leq \theta_0(\Gamma_4)$ сечения $C_{22} \in \Pi_2$ в отрезок подпространства Π_1 , функция (22) является функцией последования отображения T_2 , поскольку определяет отображение отрезка $\theta_0(\Gamma_4) \leq \theta_0 \leq 1$ сечения $C_{22} \in \Pi_2$ в соответствующий отрезок того же сечения $C_{22} \in \Pi_2$. Поэтому график функции соответствия (19) и график функции последования (22) могут быть представлены на одной диаграмме Ламерея. Эту диаграмму можно получить, произведя на рисунке 2 следующие преобразования:

$$\tau_0 \rightarrow \theta_0, \bar{\tau} \rightarrow \bar{\theta}, \tau_1 \rightarrow \theta_1, \tau_2 \rightarrow \theta_2, \tau_3 \rightarrow \theta_3,$$

$$\alpha / g(+1) \rightarrow g(-1) / \alpha, \Pi_3 \rightarrow \Pi_1.$$

Повторяя проведенные рассуждения для графиков функции соответствия $T_{222,31}$ и функции последования T_2 , можно отметить, что любая фазовая траектория, уходящая с сечения C_{31} подпространства Π_3 и попадающая затем в Π_2 , оказывается либо сразу, либо после некоторого количества возвратных движений в интервале-ловушке $0 \leq \theta_0 \leq \theta_0(\Gamma_4)$, из которого отображением $T_{221,12}$ переводится в подпространство Π_1 на сечение C_{12} . Поскольку в Π_3 $u = -1$, а в процессе возвратных движений из Π_2 в Π_3 и наоборот, связанных с чередованием импульсов ОГ и С, детектор подключает и отключает один и тот же ГН, сохраняя при этом величину $u \equiv -1$, имеет смысл ввести в рассмотрение отображение T_- точек (x_0, τ_0) сечения $C_{31} \in \Pi_3$ в точки $(\bar{x}, \bar{\theta})$ сечения $C_{12} \in \Pi_1$. Нетрудно проверить, что

$$T_- : \bar{x} = -1, \bar{\theta} = (g(-1) / \alpha)(m_2 + 2 - \tau_0) - m_2, \quad (23)$$

$$(0 \leq \tau_0 \leq 1, (\bar{x}, \bar{\theta}) \in C_{12}),$$

где

$$m_2 = m_2(\tau_0) =$$

$$= \text{ceil}\left(\left(\frac{g(-1)}{\alpha}(2 - \tau_0) - 1\right) / \left(1 - \frac{g(-1)}{\alpha}\right)\right), \quad (24)$$

Величина $m_2(\tau_0)$ в (24) является кусочно-постоянной функцией θ_0 и определяет не только номер участка функции соответствия (23), но и возможный очередной номер ее разрыва. Участок графика функции (24) с $m_2 = 0$ всегда существует, т. е. является базовым, и примыкает к границе $\theta_0 = 1$ ее определения. При $m_2 = 1$ появляется первый разрыв и соответствующий ему участок непрерывности (в дополнение к участку непрерывности с $m_2 = 0$). Из (24) следует, что в общем случае величина $M_2 = \max m_2(\tau_0)$ достигается при $\tau_0 = 0$ и определяет граничное значение $\alpha = \alpha(M_2)$, при переходе через которое в сторону увеличения α величина M_1 возрастает на единицу, причем

$$\alpha(M_2) = (M_2 + 2)g(-1) / (M_2 + 1) \quad (M_2 = 0, 1, \dots). \quad (25)$$

Из (25) следует, что $\alpha(M_2 = 0) = 2g(-1)$ является границей появления первого разрыва функции соответствия (23), а $\alpha(M_2 = \infty) = g(-1)$ совпадает с границей управляемости СЧ. Разрывы функции соответствия (23) располагаются при $\tau_0 = \tau_{op}$, где

$$\tau_{op} = 1 - \left(\frac{\alpha}{g(-1)} - 1\right)(1 + m_2) \quad (26)$$

$$\left(\alpha < 2g(-1), m_2 = 0, 1, \dots, M_2\right)$$

Согласно (23), (26) график функции (2.46) в месте любого разрыва лежит в диапазоне $g(-1) / \alpha \leq \bar{\theta} \leq 1$, а при отсутствии разрывов ($M_2 = 0$) располагается в интервале $g(-1) / \alpha \leq \bar{\theta} \leq 2g(-1) / \alpha$. Вид графиков функции соответствия (23) отображения T_- для случаев $M_2 = 0$ и $M_2 = 2$ с точностью до переименования осей совпадает с видом графиков, приведенных для отображения T_+ на рисунке 2.

Заключение

Из приведенных формул для отображений T_+ и T_- следует, что стационарные движения в рассматриваемой ММ СЧ описываются свойствами циклического отображения T равнопроизведению отображений T_+ и T_- , и поэтому для построения диаграммы Ламерея для отображения T достаточно воспользоваться построением графиков функций соответствия отображений T_+ и T_- на одной диаграмме ([10], С.505). Таким образом, возможно полное качественное исследование поведения системы по построенной ММ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шахгильдян В.В., Пестряков А.В. Перспективные направления развития динамической теории дискретных систем фазовой синхронизации для устройств синтеза и стабилизации частот. // *Электросвязь*. — 1993. — № 11. — С.38-42.
2. Шахгильдян В.В., А.А. Ляховкин, В.Л. Карякин и др. Системы фазовой синхронизации с элементами дискретизации. — М.: Радио и связь, 1989. — 320 с.
3. Левин В.А., В.Н. Малиновский, С.К. Романов. Синтезаторы частот с системой импульсно-фазовой автоподстройки. — М.: Радио и связь, 1989. — 232 с.
4. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1972. — 472 с.
5. Горюнов В.И. Исследование динамики системы управления с многопозиционной широтно-импульсной модуляцией. // *Математическое моделирование и оптимальное управление: Вестник ННГУ*, — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2003. — Вып.1(26). — С.207-215.
6. Антоновская О.Г., Горюнов В.И. Об особенностях методики исследования динамики системы с широтно-импульсной модуляцией и запоминанием сигнала управления. // *Вестник Нижегород. ун-та*. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2008. — №6. — С. 135-140.
7. Антоновская О.Г., Горюнов В.И. О влиянии диссипации энергии на динамику астатической системы с широтно-импульсной модуляцией управляющего сигнала. // *Вестник Нижегород. ун-та*. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2009. — №4. — С. 141-145.
8. Антоновская О.Г., Горюнов В.И. Анализ формы установившихся процессов в системе синхронизации с импульсным частотно-фазовым управлением при идеальном астатизме фильтра. // *Вестник Нижегород. ун-та*. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2013. — №6(1). — С. 173-179.
9. Антоновская О.Г., Горюнов В.И. Разрывные точечные отображения и динамика синтезаторов частот. — LAP Lambert Academic Publishing, OmniScriptum GmbH, Deutschland / Германия, 2014. — 101 с. (ISBN 978-3-659-58573-9)
10. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959. — 915 с.

© Антоновская Ольга Георгиевна (olga.antonovskaja@yandex.ru); Бесклубная Антонина Вячеславовна (antbesk@gmail.com)
Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»